Риск процентной ставки

Содержание

Введение

Появление первых долговых обязательств относится, по-видимому, ко времени зарождения человеческой цивилизации. В основе отношений заимствования - необходимость *перераспределения ресурсов и благ во времени*. Потребность в перераспределении *потребления* во времени определяет межвременной выбор домашних хозяйств. Межвременной выбор фирм состоит в определении объемов и направлений *инвестиций* (создании капитала) для будущего расширения производственных возможностей. Наконец, межвременной выбор государства перераспределяет во времени *общественные ресурсы*. Наличие *рынка*, позволяющего обменивать сегодняшние ресурсы на будущие, расширяет возможности и повышает экономическую эффективность решений по межвременному выбору. Именно это является фундаментальной экономической причиной появления феноменов *долговых обязательств* и *процента*.

На протяжении веков данный рынок, если оценивать его, глядя из сегодняшнего, дня был очень простым. Процентные ставки, выражающие цену заимствования, были стабильными на протяжении длительных промежутков времени. Существенное качественное развитие и усложнение финансовых рынков в целом, и рынков долговых обязательств в частности, относится к XX веку, в особенности – к его последним двум десятилетиям. Этому послужило множество причин, детальный анализ которых не входит в задачу данной книги. Отметим лишь бурное развитие технологий (в том числе информационных и финансовых), значительный (по сравнению с предыдущими веками) рост доходов и средней продолжительности жизни, что увеличило потребность в перераспределении потребления во времени, а также возрастающую активность государства в социальном обеспечении и вмешательстве в экономику, что увеличивает потребность в государственных заимствованиях.

Но усложнение и повышение эффективности технологии имеет свою цену, находящую отражение, в частности, в увеличении *риска*. Это в равной степени относится как к производственным технологиям, так и к финансовым. Рост объемов, расширение многообразия факторов спроса и предложения (и связанное с этим революционное количественное и качественное развитие сферы финансовых услуг), стремление субъектов рынка к повышению эффективности финансовых решений, ужесточение конкуренции, неизбежно привели к фундаментальным изменениям в принципах его функционирования, и в частности - к изменчивости и непредсказуемости процентных ставок.

Колебание рыночных процентных ставок под воздействием разнообразных сил спроса и предложения, инфляционных ожиданий, государственной политики и других факторов - одна из основополагающих характеристик современного финансового рынка. Изменчивость процентных ставок, будучи следствием большей эффективности рынка, является, в то же время, источником *процентного риска*. Риск состоит в неопределенности, невозможности точного прогнозирования будущих доходов кредиторов и процентных издержек заемщиков. И перед одними, и перед другими возникает проблема выбора решений, предполагающих компромисс между доходом и риском. Это, в свою очередь, служит причиной возникновения рынков, предметом торговли на которых является риск. Как и в случае с межвременным выбором, возможность торговли риском повышает эффективность принимаемых решений.

Последние десятилетия XX века характеризовались особенно бурным развитием рынков разнообразных финансовых инструментов, основное предназначение которых состоит в том, чтобы предоставить экономическим субъектам возможности регулировать риск принимаемых решений. На современном финансовом рынке происходит не только *торговля будущими ресурсами* (перераспределение ресурсов во времени), но и *торговля риском* (перераспределение рисков между экономическими субъектами). В этот же период времени наблюдается беспрецедентное развитие *теории* оценки финансовых инструментов и методов контроля риска. Эти процессы являются в существенной степени взаимно поддерживающими. Например, можно утверждать, что популярность формулы Блэка-Шоулза связана с возникновением и развитием организованного рынка опционов. Но верно и обратное - появление формулы, простой и интуитивно понятной, в существенной степени способствовало бурному развитию данных рынков. Эта особенность характерна и для рынка производных по процентным ставкам.

О чем эта книга

Задачи данной книги скромны. Первая - дать сжатый и понятный в первую очередь *для практиков*, обзор современных методов оценки процентных инструментов и управления процентным риском. В действительности, эта область настолько огромна, что даже беглый обзор существующих подходов с трудом поместился бы в одной книге. Поэтому, естественно, присутствует определенный субъективизм - далеко не все (в особенности это касается наиболее современных и сложных подходов) современные методы и модели упоминаются и, тем более, - подробно рассматриваются в настоящем издании. С этой точки зрения книгу можно рассматривать как своеобразное введение в проблематику риска процентной ставки, необходимый минимум знаний. Для более глубокого знакомства с предметом, естественно, необходимо изучение существенно большего круга источников (достаточно подробный список которых приводится в конце книги).

Вторая, более важная для автора задача, - проиллюстрировать необходимость и, что еще более существенно, - показать практические возможности использования современных методов управления процентным риском в условиях *развивающегося рынка* (т.е., в первую очередь, Украины, России, других стран постсоветского пространства). Здесь, естественно, проблем гораздо больше, чем готовых ответов. В отношении множества прикладных задач теоретические основы и практические методы их решения еще только предстоит развить. Тем не менее, современные финансы уже сегодня предлагают широкий арсенал достаточно эффективных методов, и вопрос состоит в их правильном понимании и применении менеджерами. Если этому в какой-то степени будет способствовать эта книга - цель ее издания можно считать достигнутой.

Для кого эта книга

В первую очередь книга предназначена для практиков - менеджеров и аналитиков компаний, для которых риск процентной ставки - не абстрактные понятие, а фактор, с которым они сталкиваются ежедневно при принятии управленческих решений. Речь идет, прежде всего, о *финансовых посредниках* - банках, страховых компаниях, инвестиционных и пенсионных фондах, существенную часть балансов которых составляют долговые обязательства, стоимость которых непосредственно зависит от процентных ставок. Но зависимость финансовых результатов от процентной ставки характерна не только для финансовых институтов. Для *производственного или торгового предприятия*, использующего долговое финансирование, защита от риска колебаний процентной ставки может быть не менее важна.

Книга адресована также тем, кто изучает современные финансы - студентам и аспирантам финансовых специальностей. Она может быть полезна как введение в проблематику оценки долговых обязательств и производных по процентной ставке, управления портфелем процентных инструментов и ограничения процентного риска.

Практическая направленность накладывает определенные ограничения на содержание. В первую очередь это касается математического аппарата. Для понимания книги, по сути, достаточно математических знаний в объеме обычной школьной программы и первых курсов нематематических специальностей вузов. Там, где необходим более сложный аппарат (теория случайных процессов, стохастические дифференциальные уравнения, современные эконометрические методы), мы, жертвуя математической строгостью, ограничиваемся интуитивным пониманием математических концепций. Современные финансы - чрезвычайно сложная и «математизированная» отрасль, неправильное и неточное понимание смысла используемых методов, восприятие их как «черного ящика», может оказать губительные последствие на принимаемые решения. Одной из задач книги является сокращение разрыва в понимании современных финансов, существующего между т.н. «учеными-ракетчиками» (аналитиками с глубокой математической подготовкой) и менеджерами финансовых и нефинансовых компаний.

Содержание книги

Книга состоит их шести разделов, по две главы в каждом. Основной текст сосредоточен на проблематике управления риском процентной ставки, в первую очередь - на кратком изложении основных практических методов, существующих в данной области. Важная часть книги - Примеры, целью которых является практическая иллюстрация использования рассматриваемых методов. Исходной информацией для большинства примеров служат данные по рынкам стран с переходной экономикой (прежде всего Украины и России). В этом смысле отдельные Примеры могут рассматриваться как попытки исследования возможностей эффективного применения рассматриваемых в книге методов в условиях формирующегося финансового рынка.

Первая глава посвящена краткому описанию современных рынков долговых обязательств и их производных. Основное внимание уделено рынкам России и Украины, хотя также приводится сжатое описание основных международных рынков. Во *второй* главе обсуждаются основные проблемы контроля и управления риском процентной ставки, которые стоят перед финансовым учреждением. Рассмотрены современные подходы к регулированию процентного риска, в том числе – документы Базельского комитета по банковскому надзору, директивы ЕС, нормативные документы центральных банков России и Украины.

Третья глава является введением в финансовые расчеты по долговым обязательствам. Рассматриваются базовые понятия финансовых расчетов – доходность к погашению, спот-ставки, форвардные ставки, приводятся рыночные правила расчетов и котировок. Основная практическая задача, обсуждаемая в данной главе – оценка долговых обязательств с детерминированными платежами, а также то, как корректно использовать и интерпретировать рыночную информацию.

Необходимым условием адекватной оценки долговых обязательств является наличие информации о кривой доходности – текущих значениях спот-ставок для различных сроков погашения. Современным методам оценивания («сглаживания») кривой доходности посвящена *четвертая* глава.

В *пятой* и *шестой* главах обсуждается хорошо известный инструментарий оценки и ограничения риска процентной ставки – показатели дюрации и основанные на этих показателях методы хеджирования и иммунизации портфеля долговых обязательств.

Для оценки финансовых инструментов с неопределенными платежами, зависящими от будущих значений процентных ставок – таких как форвардные и фьючерсные контракты, опционы, облигации со встроенными опционами, - недостаточно лишь знания сегодняшней структуры кривой доходности. Необходима информация о закономерностях динамики процентных ставок, другими словами – модель поведения процентных ставок во времени. В *седьмой* главе содержится обзор наиболее известных моделей временной структуры. *Восьмая* глава посвящена основанным на данных моделях методам оценки финансовых инструментов с неопределенными платежами.

Девятая и *десятая* главы посвящены описанию рынков и методам оценки производных финансовых инструментов, базовыми активами для которых выступают процентные ставки и процентные инструменты. В девятой главе рассматриваются форвардные и фьючерсные контракты по процентным ставкам, в десятой опционы, а также методы оценки инструментов со встроенными опционами.

В *одиннадцатой* главе обсуждаются современные подходы к измерению и контролю риска процентной ставки. Основное внимание уделено показателям, основанным на величине Value-at-Risk (VaR) и ее использованию в задачах контроля рисков финансового учреждения.

В *двенадцатой* главе приведены примеры моделей управления риском процентной ставки для финансовых учреждений – коммерческих банков, а также пенсионных и инвестиционных фондов.

II. Контроль риска процентной ставки: принципы и регулирование

Контроль и управление разнообразными рисками - ключевая функция финансового менеджмента компании, независимо от того, идет ли речь о финансовых институтах или предприятиях, производящих товары и услуги. Но в случае финансового института проблемы управления рисками приобретают особое значение. Одна из главных функций финансового посредничества - *перераспределение риска в экономике*, посредничество в торговле риском. Сочетание торговли рисками с посредничеством в межвременной торговле экономических субъектов, делает финансовый институт особенно подверженным *финансовым рискам*: рыночному риску, риску ликвидности, кредитному риску. Поэтому основное внимание в настоящей главе уделено вопросам контроля риска процентной ставки финансового института (прежде всего - коммерческого банка, но также пенсионного фонда, инвестиционного фонда, страховой компании). Тем не менее, многие концепции являются, по существу, универсальными, и их применение может быть расширено и на случай производственного предприятия.

Риск процентной ставки является одной из разновидностей *рыночных рисков*, наряду с валютным риском, ценовыми рисками товарных рынков и риском рынка акций. Данный риск возникает в связи с неопределенностью будущих финансовых результатов финансового института, их зависимостью от неизвестных будущих значений рыночных процентных ставок. Риск процентной ставки сложно, даже невозможно рассматривать изолированно от других рисков, с которыми сталкивается финансовый институт, тем не менее главное внимание в этой главе, как и в книге в целом, мы уделим именно данному виду риска.

Стоимость замствований (рыночные процентные ставки) на современном рынке, находясь под непрерывным воздействием факторов спроса и предложения заемных средств, постоянно меняются. Эти изменения непосредственно влияют как на стоимость активов, обязательств и внебалансовых позиций, так и на размеры прибыли. Как сами изменения процентных ставок, так и размеры их влияния, могут быть самыми разнообразными. Это означает, что и финансовая устойчивость, и финансовый результат находятся под влиянием данного случайного фактора. Чем больше подверженность финансовых показателей изменениям процентных ставок - тем выше процентный риск. Тем самым, ключевая задача менеджмента - используя доступные методы и предлагаемые рынком инструменты, контролировать размеры влияния случайных факторов, не допустить, чтобы рыночные изменения оказали существенный негативный эффект на финансовую позицию компании. Таким образом, задача контроля риска сводится, как минимум, к измерению риска (оценке степени влияния возможных изменений на финансовый результат) и управлению риском - ограничению влияния фактора неопределенности до приемлемого уровня.

В настоящей главе, большей частью на качественном уровне, рассматриваются методы измерения процентного риска как степени возможного воздействия колебаний процентных ставок на финансовые показатели компании, существующие подходы к контролю и управлению данным видом риска, а также вопросы регулирования деятельности финансовых институтов в области контроля риска процентной ставки.

Источники риска процентной ставки

Подверженность рыночному риску, в том числе - риску процентной ставки, возникает случае, когда изменение рыночных цен (процентных ставок) способно повлиять на финансовые результаты компании. Если рыночные цены *никак не влияют* на денежные потоки, либо если это влияние в равной степени относится как к поступлениям (в частности - доходам по активам), так и к выплатам (по обязательствам) - рыночный риск отсутствует. Например, если у банка все длинные и короткие позиции (активы и обязательства, а также внебалансовые позиции) в точности согласованы по срокам, природе платежей (фиксированные или плавающие ставки) и другим характеристикам, подверженность процентному риску отсутстует. Другими словами, рыночный риск возникает при наличии *несоответствий* в тех или иных характеристиках длинных и коротких позиций (размеру, сроку погашения, структуре платежей, наличии встроенных опционов и т.д.), что приводит к различиям во влиянии одних и тех же изменений рыночных цен на их стоимость.

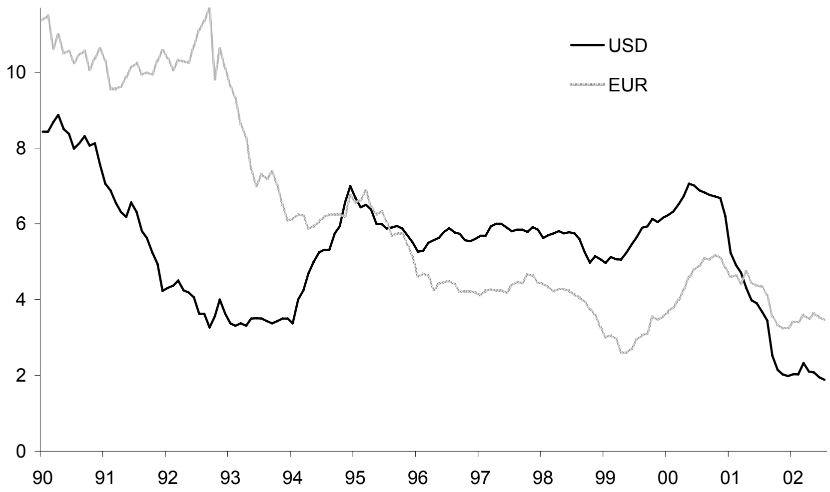


Рис. 2.1 Шестимесячный LIBOR по доллару США и евро, 1990 - 2002, (процентов годовых, помесячно, значения на конец месяца). *Источник: Economagic.com.*

Рассмотрим банк, привлекающий финансовые ресурсы на депозит и размещающий их в виде кредитов по рыночным ставкам. Пусть срок как депозитов, так и кредитов - один месяц. Если рыночные процентные ставки вырастут, это не повлияет на финансовые результаты банка только в том случае, если рост депозитных ставок на один процент приводит к точно такому же росту кредитных ставок. Если возможны *непропорциональные* изменения кредитных и депозитных ставок - появляется процентный риск. Кроме того, уровень риска вырастет если рыночная конкуренция заставит банк размещать ресурсы в более долгосрочные инструменты. Пусть ресурсы частично размещаются в трехмесячные государственные ценные бумаги. Ликвидность банка может не пострадать если существует возможность в любой момент продать эти бумаги, но возрастет риск процентной ставки, так как цена, по которой они могут быть проданы, зависит от текущей рыночной ситуации (значений рыночных процентных ставок). Еще раз подчеркнем - основным источником и причиной подверженности компании риску процентной ставки является различная степень воздействия рыночных факторов (в данном случае - процентных ставок) на стоимость длинных и коротких позиций. Тем самым, сокращение этих несоответствий ограничивает (*хеджирует*) риск.

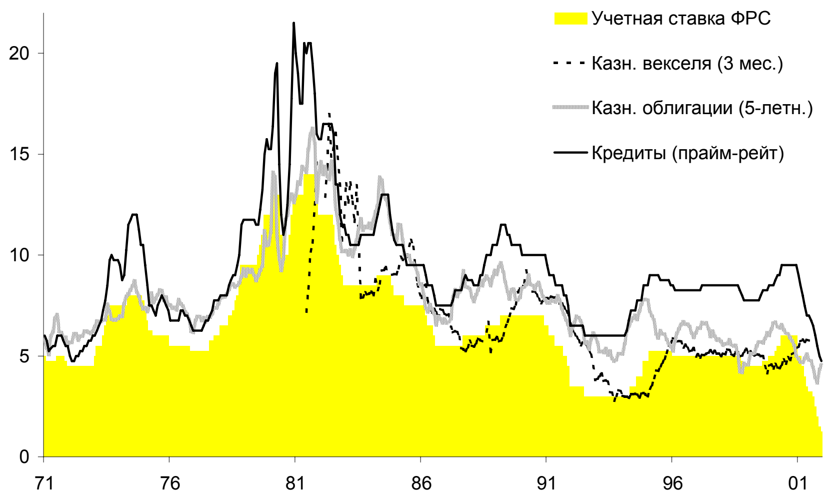


Рис. 2.2 Процентные ставки в США, 1971 - 2001
(процентов годовых, помесячно, средние за месяц).
Источник: US Federal Reserve.

В целом, ключевые источники риска процентной ставки для финансового института можно классифицировать следующим образом[1]:

1) *Риск переоценки.* Важнейший и наиболее часто обсуждаемый источник риска процентной ставки связан с разницей в сроках погашения, которая существенна для активов и обязательств с *фиксированной ставкой* и необходимостью периодичной переоценки инструментов с *плавающей ставкой*. Несоответствия, возникающие при переоценке активов, обязательств и внебалансовых позиций, создают существенную неопределенность денежных потоков и способны значительно влиять на экономическую стоимость банка.

2) *Риск кривой доходности.* Существенный риск могут создать возможные изменения в *форме* кривой доходности[2]. Даже если изменение общего уровня процентных ставок не имеет значительного влияния на финансовую позицию института, негативное влияние могут оказывать непропорциональные и непараллельные изменения процентных ставок по различным срокам погашения.

[1] См. напр. *BIS* (2001) [ ].

[2] Изменение формы кривой доходности происходит, когда процентные ставки для различных сроков погашения меняются в разных направлениях или - в одном направлении, но в разной степени.

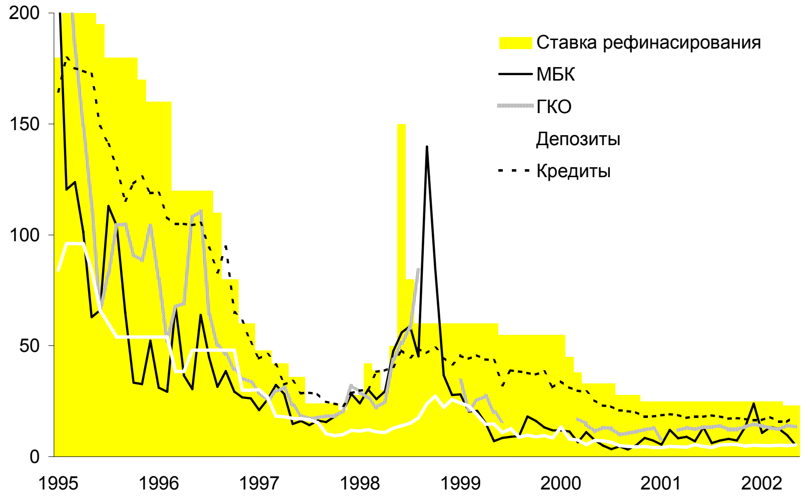


Рис. 2.3 Процентные ставки в Российской Федерации, 1995 - 2002 (процентов годовых, помесячно, средние за месяц). *Источник: Банк России.*

3) *Базисный риск*. Базисным риском называют непропорциональность изменения ставок по коротким и длинным позициям. При изменении общего уровня процентных ставок разница (спред) ставок по активам и обязательствам может расти или снижаться, что создает дополнительный источник неопределенности.

4) *Опционы*. Множество акивов и обязательств финансового института имеют в своей финансовой структуре встроенные опционы. Кроме того, все большее распространение на мировых рынках получают опционы как отдельные инструменты, обращающиеся на организованном либо неорганизованном рынке. Колебания процентных ставок непосредственным образом влияют на стоимость этих опционов, причем размеры этого влияния подчинены особым правилам, связанным с несимметричной структурой выплат по опциону.

Факторы, определяющие колебания процентных ставок

Колебания процентных ставок - одно из важнейших свойств современного финансового рынка, являющееся следствием воздействия множества факторов. Прежде всего, отметим, что рыночные процентные ставки всегда имеют номинальное (денежное) выражение. Номинальную процентную ставку можно представить как сумму двух составляющих - во-первых, это *реальная* процентная ставка, выражающая относительную *стоимость ре-*

альных ресурсов во времени, во-вторых - прогнозируемое участниками рынка изменение реальной стоимости (покупательной способности) денег - *ожидаемая инфляция*[3]. Изменения в ожиданиях экономических агентов в отношении будущей инфляции является одной из важнейших причин, объясняющих колебания номинальных ставок.

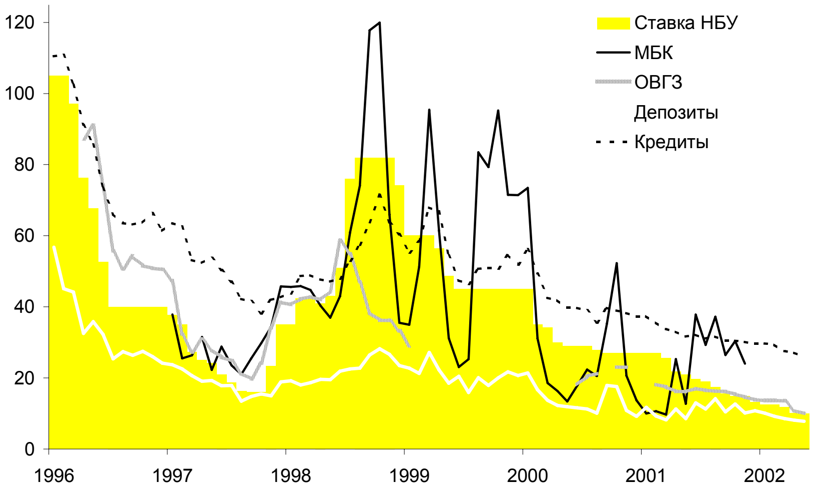


Рис. 2.4 Процентные ставки в Украине, 1996 - 2002 (процентов годовых, помесячно, средние за месяц).
Источники: НБУ. Ukrainian Economic Trends, Бизнес.

Не менее важны изменения в *спросе и предложении* заемных средств. Со стороны *спроса* основными участниками рынка являются государство, фирмы и домашние хозяйства. Соответственно, увеличение дефицита государственного бюджета увеличит потребность в заимствованиях и будет способствовать росту процентных ставок. *Рост доходности реальных инвестиций* в экономике приведет к увеличению спроса на финансовые ресурсы со стороны фирм и также будет способствовать увеличению процентных ставок. Росту процентных ставок будет способствовать также изменение предпочтений домашних хозяйств в пользу увеличения текущего потребления.

Предложение заемных средств на рынке определяется прежде всего предпочтениями домашних хозяйств относительно текущего и будущего потребления. Эти предпочтения определяются размерами накопленного богатства, объемом текущего дохода и ожиданиями относительно будущих доходов, возрастной структурой населения, традициями, и т.д. В то же вре-

[3] Разделение номинальной ставки на две составляющие - реальную ставку и ожидаемую инфляцию, носит название *эффекта Фишера* (см. И. Фишер (1930) [ ]).

мя важнейшую роль среди факторов предложения играет развитость финансовых рынков и институтов финансового посредничества, степень доверия домашних хозяйств к финансовым посредникам и особенности инфраструктуры рынка.

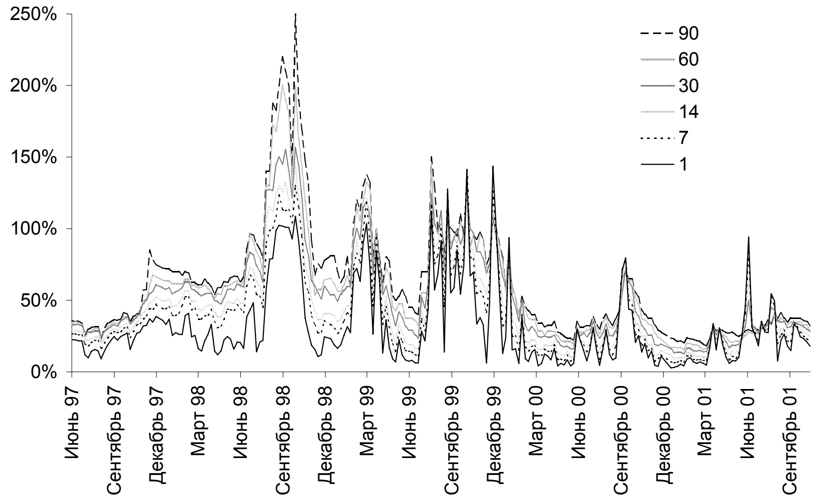


Рис. 2.5 Динамика *KIBOR* (*Kiev Interbank Offered Rate*) - средневзвешенные ставки киевского рынка межбанковских кредитов, сроки - 1 (*overnight*), 7, 14, 30, 60 и 90 дней, 1997 - 2001 (по неделям, средние за неделю).
Источник: Бизнес.

Рынок заемных средств ни в одной стране не является полностью нерегулируемым. Это означает, что цены на этом рынке определяются не только под воздействием спроса и предложения, но и находятся под влиянием *государственной политики*. Изменение предложения денег, ставок рефинансирования банков, другие инструменты политики непосредственным или опосредованным образом влияют на рыночные процентные ставки.

Сами по себе колебания процентных ставок могут иметь различный характер. Прежде всего, возможно изменение общего *уровня* процентных ставок, т.е. все процентные ставки на рынке могут вырасти или снизиться вследствие изменений в спросе и предложении, инфляционных ожиданиях, государственной политике. Если все процентные ставки изменились пропорционально, говорят о *параллельном* изменении временной структуры процентных ставок. Но процентные ставки не обязательно меняются параллельно: например, краткосрочные ставки могут вырасти в то время, как долгосрочные снизились, и наоборот (т.н. *разворот* структуры процентных ставок). Либо, даже если направление изменений одинаково, прирост одних ставок может быть существено большим, чем других (изменение *кривизны* временной структуры). Изменение процентных ставок может, кроме того, сопровождаться увеличением или снижением *спредов* (разниц) между ставками по обязательствам с различным кредитным риском (различной надежностью выполнения обязательств), ценами покупки и продажи финансовых инструментов (в частности, изменением маржи между кредитными и депозитными ставками).

Измерение процентного риска

Какие показатели характеризуют *размер* (*величину*) процентного риска, с которым сталкивается компания? Ответ на этот вопрос является ключом к эффективному выполнению задач контроля риска и определению размеров резервов для компенсации возможных потерь. Традиционный и наиболее простой вариант - рассматривать в качестве величины риска номинальные *размеры позиций* по процентным инструментам. Оценка риска в данном случае сводится к построению таблицы, в которой активы, обязательства и внебалансовые позиции банка разбиваются на определенное количество *временных зон* в зависиости от сроков погашения (для инструментов с фиксированной ставкой) или строков переоценки (для инструментов с плавающей ставкой). В отсутствие точно определенного срока, инструмент относится к той или иной временной зоне исходя из прогнозируемого (ожидаемого) периода до погашения, определяемого на основании существующего опыта, исторических наблюдений, и т.п. Размеры уязвимости к риску процентной ставки расчитывают исходя из величин «разрывов»[4] - разницы между активами и обязательствами в рамках каждой временной зоны. Величина возможных потерь может быть приближенно подсчитана путем умножения разрыва на предполагаемую величину изменения процентной ставки. В случае роста процентных ставок потери возникают при наличии отрицательного разрыва, и наоборот - положительный разрыв означает возможность потерь в случае когда процентные ставки снизятся.

Оценка риска на основании анализа разрывов, очевидно, имеет ряд существенных недостатков. Во-первых, не принимается во внимание *степень воздействия* фактора риска на ту или иную позицию. Во-вторых, не учитывается степень изменчивости (размер возможных колебаний) рыночных цен и корреляция между ними. Наконец, в-третьих, для производных инструментов, таких как форвардные контракты и свопы, номинальная стоимость (так называемый *условный номинал*) как правило ничего не говорит о размерах фактической подверженности риску.

[4] Данный подход называют «анализом разрывов» (*gap analysis*).

Другим традиционым подходом оценки размеров риска является использование показателей *чувствительности* имеющихся у компании позиций и порфеля в целом к рыночным ценам (процентным ставкам). Для долговых обязательств в качестве таких показателей, чаще всего используют величины *дюрации* (продолжительности) и *выпуклости*[5]. Математически, это, соответственно, первая и вторая производные цены (стоимости) по процентной ставке. Так называемая *модифицированная дюрация* - есть изменение цены (в процентах) при параллельном изменении уровня процентных ставок на один процент. Тем самым, использование дюрации позволяет не только учесть размер позиции, но и определить - насколько сильно эта позиция подвержена влиянию фактора риска. Другим положительным свойством дюрации является простота расчета этого показателя для портфеля в целом. Выпуклость характеризует то, как при изменении уровня процентных ставок изменится дюрация.

Расчет дюрации может дополнять анализ разрывов при оценке общего уровня процентного риска для финансового института. Если анализ разрывов сконцентрирован прежде всего на влиянии процентного риска на доходы (точнее - чистый процентный доход), то на основании показателей дюрации может быть оценено влияние изменений процентных ставок на экономическую стоимость компании.

Величины чувствительности к различным факторам риска часто используются для оценки размеров риска по *производным инструментам* - в частности, опционам и инструментам со встроенным опционом. Речь идет о так называемых «греческих мерах» (*greeks*) - название произошло от традиционного способа обозначения данных показателей буквами греческого алфавита. Это прежде всего «дельта» и «гамма», являющиеся, по существу, обобщением понятий дюрации и выпуклости на случай производных инструментов. *Дельта* - есть изменение стоимости производного инструмента в ответ на изменнение величины базовой переменной (например, процентной ставки или рыночной цены базового актива) на единицу (т.е. первая производная стоимости по базовой переменной). *Гамма* (вторая производная) - это, соответственно, изменение величины дельта в ответ на изменение базовой переменной. В отношении опционов известны также показатели «вега», «тета» и «ро». *Вега* - чувствительность стоимости опциона к величине изменчивсти (*волатильности*) базовой переменной, *тета* - к величине промежутка времени до момента выполнения опциона, *ро* - к изменению процентной ставки (в данном случае - ставки дисконтирования).

Чувствительность к рыночным ценам как мера риска является полезным инструментом для управления рисками (целый ряд моделей управле-

[5] Подробно о расчете и использовании данных показателей в управлении риском процентной ставки - см. Главы 5 и 6.

ния портфелем основан именно на этих показателях), но одновременно обладает и рядом недостатков. Сам по себе показатель чувствительности не отражает размеры возможных потерь в результате изменений на рынке, а значит не может служить в качестве средства определения размеров резервов или стандартов достаточности капитала.

Показателем, свободным от указанных выше недостатков, является величина *Value-at-Risk* (*VaR*)[6], в последнее десятилетие приобретающая все большую популярность, и становящаяся, по существу, отраслевым стандартом как основная мера риска портфеля финановых инструментов.

Value-at-Risk - это максимальная величина потерь по данному портфелю финансовых инструментов, которые могут быть понесены на протяжении определенного промежутка времени с заданной вероятностью. Например, если известно, что 10-дневная *VaR* некоторого портфеля составляет 20 млн. доларов с доверительной вероятностью 95% - это означает, что потери стоимости в течение следующих 10 дней с вероятностью 95% *не могут превысить* 20 млн. долларов (или, что то же самое, вероятность того, что потери на протяжении следующих 10 дней *превысят* 20 млн. долл., равна 5%). Причина все возрастающей популярности и расширения практического использования *VaR* в качестве основной меры риска - это, прежде всего, простота и интуитивная понятность данного показателя. Но не только это важно. *Value-at-Risk* способна учитывать такие важные факторы, как противоположное направление воздействия рыночных цен на длинные и короткие позиции, различную чувствительность позиций к риску, наконец - корреляцию между различными рыночными факторами. Кроме того, *VaR* может служить удобной основой для определения размеров резервов и норм достаточности капитала, необходимых для компенсации возможных потерь.

Риск процентной ставки и стандарты адекватности капитала Базельского комитета по банковскому надзору

Одной из наиболее важных целей государственного регулирования финансового сектора экономики является обеспечение надежности и устойчивости деятельности финановых посредников. Это в первую очередь означает, что влияние факторов риска не должно сказываться на способности посредника выполнять свои обязательства. Гарантировать выполнение обязательств даже в случае потерь, связанных с непредвиденными неблагоприятными изменениями, позвояет достаточный (т.е. соответствующий величине возможных потерь) *размер капитала* финансового института. Поэтому требования относительно минимального размера капитала посред-

[6] Термин *Value-At-Risk* дословно может быть переведен как «стоимость, находящаяся под воздействием риска», т.е. часть стоимости портфеля, которая может быть потеряна всредствие воздействия факторов риска.

ников (в первую очередь банков) является одним из наиболее важных средств государственного регулирования в данной области. Достаточность капитала у финансовых посредников означает, что финансовая система в значительной степени защищена от «системного» риска, когда финансовая несостоятельность одного участника рынка влечет несостоятельность других и ставит под угрозу устойчивость всей системы.

Достаточность капитала предельно важна не только для регулирующих органов, но и для самого посредника. Достаточный капитал означает снижение риска для собственников и надежность (высокий кредитный рейтинг) финансового института в глазах контрагентов, что способствует повышению его конкурентоспособности. В то же время *чрезмерный* размер капитала неблагоприятным образом влияет на конкурентоспособность финансового института, снижая эффект финансового рычага, негативно сказывается на эффективности финансового посредничества в целом. Поэтому нормы достаточности капитала в идеальном (как для государства, так и для участников рынка) случае должны быть в точности *адекватными* тем рискам, которые берет на себя посредник.

На сегодня международным стандартом в определении достаточности капитала банков являются документы Базельского комитета по банковскому надзору (*Basel Committee on Banking Supervision*). Первым таким стандартом явилось Соглашение 1988 года об измерении и стандартах достаточности капитала (*1988 Capital Accord* [ ]), введеное в действие странами-участницами[7] в 1992 - 93 гг. На сегодня к Соглашению присоединились более 100 стран.

Капитал банка в соответствии с Базельским соглашением - это не только собственные средства, он включает: (1) капитал 1-го уровня, или «основной» капитал (собственные средства с определенными поправками[8]) и (2) капитал 2-го уровня, или «дополнительный» капитал, включающий гибридные инструменты (например, кумулятивные привилегированные акции) и долгосрочные (сроком не менее пяти лет) субординированные[9] долговые обязательства.

---

[7] Участниками Базельского комитета по банковскому надзору являются руководители центральных банков и надзорных органов Бельгии, Великобритании, Германии, Италии, Канады, Нидерландов, Соединенных Штатов Америки, Франции, Швеции, Японии (так называемая группа G-10), а также Люксембурга и Швейцарии. Организация деятельности комитета осуществляется Банком международных расчетов (*Bank for International Settlements*, *BIS*).

[8] Подробно о расчете величины капитала - см. *BIS 1988* [ ].

[9] В случае субординированного долга, кредитор может претендовать на его погашение только после выполнения обязательств по другим (имеющим более высокую очередность) долгам - например, по депозитам. Тем самым субординированный долг играет роль своего рода «буфера», являясь дополнительной страховкой для депозитов.

Соглашение определяет два основных требования к величине капитала банка:

1) *Максимальное соотношение активы/капитал*. Отношение суммарного объема активов и определенных внебалансовых позиций (в первую очередь - кредитных эквивалентов) к величине капитала банка не должно превышать 20.

2) *Минимальное значение коэффициента платежеспособности* (*коэффициента Кука*). Размер капитала по отношению к суммарному объему *взвешенных по риску*[10] позиций не должен быть менее 8%. Не менее половины из общей величины необходимого капитала должен составлять капитал 1-го уровня.

Соглашение 1988 года сосредоточено на основном для большнства коммерческих банков виде риска - кредитном. Но современные банки (и, в особенности, - крупные транснациональные финансовые учреждения) осуществляют значительные операции на валютных и товарных рынках, рынках ценных бумаг, предлагают криентам продукты, хеджирующие риски. Это означает значительную подверженность банка рыночным рискам, которую нельзя не принимать во внимание, говоря о достаточном размере капитала. Понимание этого регулирующими органами развитых стран привело к появлению опубликованного в январе 1996 г. Дополнения (Поправки[11]) к Соглашению 1988 года, предписывающего надзорным органам стран - участников соглашения при определении требований по достаточности капитала банков, помимо кредитных рисков, учитывать также *рыночные риски* - риски потерь по балансовым и внебалансовым позициям банка, связанных с колебаниями рыночных цен. К рыночным рискам отнесены риски, связанные с *процентными* инструментами, акциями, курсами валют и ценами на товарных рынках. Соответственно, общие требования по минимальому размеру капитала банка[12] должны определяться исходя из суммы (1) требований по кредитному риску, определяемых в соответствием с Соглашением 1988 года, за исключением позиций *торгового портфеля*

[10] Для активов банка веса определяются следующим образом: 0% - по денежным средствам, золоту, обязательствам центральных правительств развитых стран (членов *OECD* - Организации по экономическому сотрудничеству и развитию), 20% - по обязательствам государственных организаций, местных властей и банков стран-членов *OECD*, 50% - по негарантированным государством ипотечным обязательствам, 100% - по всем другим активам. Для кредитных эквивалентов веса составляют: 0% - правительства стран-членов *OECD*, 20% - банки и государственные организации стран *OECD*, 50% - другие контрагенты.

[11] *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks* (January 1996) [ ], документ, известный также как *BIS 1998*, т.к. начиная с 1998 года введен в практику регулирования в развитых странах в дополнение к *BIS 1988* (*Capital Accord*).

[12] Дополнение 1996 года несколько расширяет понятие капитала - для компенсации рыночных рисков торгового портфеля, банк может использовать *капитал 3-го уровня* - субординированный долг сроком не менее двух лет

(«торговой книги»[13]) - *долговых* и паевых *ценных бумаг*, товарных и валютных позиций (но *включая* кредитный риск по внебиржевым производным инструментам), и (2) требований по капиталу для компенсации рыночных рисков торгового портфеля.

Одной из наиболее важных особенностей Дополнения 1996 года является возможность использования *двух альтернативных подходов* к измерению рыночных рисков. Национальным надзорным и регулирующим органам предоставлена возможность выбора - какой именно подход использовать. Первый подход представляет собой *стандартную* методологию оценки размеров рисков - ее краткая характеристика в отношении риска процентной ставки представлена в следующем разделе. Требования по капиталу по каждому виду рыночного риска (процентный, валютный, ринка акций и товарных рынков) расчитываются отдельно и затем складываются. Второй подход основывается на использовании собственных (*внутренних*) моделей банка для измерения риска. Возможность использования внутренних моделей (с разрешения национального регулирующего органа) отражает существенно возросщую сложность финансового рынка, невозможность учесть все особенности современных рыночных рисков в универсальной стандартизованной методике.

Стандартизованый метод измерения риска процентной ставки

Риск процентной ставки представяет собой риск, связанный с позициями по долговым ценным бумагам (а также инструментам, свойства которых близки к долговым ценым бумагам[14] - например, привилегированным акциям) и производным инструментам, связанным с процентными ставками. Риски разделяются на две категории, для каждой из которых определяются свои требования по капиталу, - *специфический риск* (изменения цены, вызванные факторами, относящимися к конкретному эмитенту) и *общий рыночный риск* (колебания цен, связанные с изменением уровней рыночных процентных ставок). Требования по капиталу в отношении *специфического риска* суммируются по всем позициям (зачет коротких и длинных позиций не допускается) и определяются следующим образом:

[13] *Trading book* - в Дополнении 1996 г. определяется как совокупность позиций банка по инструментам, которые удерживаются банком с целью краткосрочной перепродажи и/или были открыты банком с намерением получения краткосрочной прибыли на разнице цен, а также позиций по финансовым инструментам, сопутствующим деятельности банка как брокера и маркет-мейкера, и позиций, открытых с целью хеджирования.

[14] Ценные бумаги не всегда просто классифицировать, поэтому Базельский комитет констатирует, что, например, конвертируемые облигации или конвертируемые привилегированные акции «должны рассматриваться как долговые ценые бумаги, если они торгуются как долговые ценные бумаги, и как паевые - если они торгуются как паевые (акции)».

- по *государственным* долговым ценным бумагам (не несущих кредитного риска в соответствии с действующим (1988 г.) Соглашением о достаточности капитала) требования по капиталу отсутствуют (0%);
- по долговым обязательствам государственных учреждений, международных банков развития, и другим, имеющим рейтинг инвестиционного уровня - 0,25% (обязательства сроком менее полугода), 1% (от полугода до двух лет), 1,6% (свыше двух лет);
- остальные процентные инструменты - 8%.

Определение величины *общего рыночного риска* и соответствующих данному риску требований по капиталу предполагает *зачет*[15] длинных и коротких позиций, осуществляемый по определенным правилам. Возможность зачета объясняется тем, что одно и то же изменение рыночных процентных ставок оказывает противоположное влияние на короткие и длинные позиции. Зачет длинных и коротких позиций осуществляется только по инструментам, номинированным в одной валюте. Риск по различным валютам расчитывается отдельно и требования по капиталу суммируются. Стандартная методология предлагает два альтернативных метода зачета по позициям с различным знаком и, соответственно, - определения размеров капитала для компенсации риска процентной ставки, - *метод сроков погашения* (*“maturity”*) и *метод средней продолжительности* или *дюрации* (*“duration”*). Различие состоит в способах определения возможного влияния изменений процентной ставки на стоимость позиций с различным сроком.

Метод сроков погашения предполагает распределение позиций в зависимости от срока на временные промежутки (всего 13 временных промежутков для купонных инструментов, и 15 - для дисконтных[16], которые более сильно подвержены влиянию колебаний процентных ставок). Для каждого промежутка установлены весовые коэффициенты, отражающие «размер риска», т.е. влияние предполагаемого изменения процентной ставки на стоимость позиции (от 0% для инструментов сроком один месяц и менее, до 12,5% для дисконтных инструментов сроком свыше 20 лет).

Размер капитала для компенсации риска процентной ставки определяется следующим образом. В рамках каждого временного промежутка расчитываются суммарные взвешенные позиции (длинные и короткие - отдельно). Первая компонента для определения размера капитала - *чистая позиция*, определяемая взаимозачетом взвешенных длинной и короткой позиций, и имеющая знак плюс или минус в зависимости от того - какая из позиций больше. Вторая компонента призвана учесть различия в свойствах инструментов в рамках каждого промежутка (т.н. «вертикальные несоответствия»). Она определяется как 10% от размера взвешенной длинной *или*

[15] *Offsetting.*

[16] Точнее - с купоном, меньшим чем 3%.

короткой позиции, в зависимости от того - какая из них меньше[17]. Далее временные промежутки группируются в три временные *зоны* и осуществляется т.н. «горизонтальный зачет» позиций (также с использованием специально определенных весовых коэффициентов) вначале в рамках каждой зоны, а затем между зонами. Требования по капиталу для компенсации общего рыночного риска по процентным инструментам определяются как сумма (1) «вертикальных несоответствий» в каждой зоне, (2) «горизонтальных несоответствий», возникающих при агрегировании длинных и коротких позиций внутри каждой зоны и между зонами[18], и (3) сумарной взвешенной чистой позиции.

Метод дюрации является более точным, так как чувствительность каждой позиции к изменению процентной ставки расчитывается отдельно. Последовательность шагов и методика расчета размера капитала для компенсации процентного риска аналогична методу сроков погашения. Отличием является способ определения весов для суммирования позиций в рамках каждого временного промежутка. Веса определяются как изменение стоимости каждой позиции в ответ на изменение ставки доходности на 0,6 - 1% (предполагаемое изменение ставки различается для позиций с различным сроком). Кроме того коэффициент, испольуемый для расчета компенсации «вертикальных несоответствий» равен 5% (а не 10% как в предыдущем случае - учитывается факт, что чувствительность позиций к процентным ставкам учтена более точно).

Трактовка производных инструментов в определении нормативов достаточности капитала

Стандартный метод расчет требований по достаточности капитала охватывает не только базовые инструменты (долговые ценные бумаги) но и все *производные*, подверженные непосредственному влиянию рыночных процентных ставок: форвардные контракты по процентным ставкам (в частности, *FRA*), свопы (как процетные, так и валютные), процентные фьючерсы, позиции в иностранной валюте, процентные опционы. С целю расчета риска, позиции по производным пересчитываются в соответствующую эквивалентную позицию по базовому активу. Правила перерасчета, как и

[17] Приведем пример, взятый непосредственно из обсуждаемого документа. Пусть в рамках определенного временного промежутка сумма взвешенных длинных позиций составила 100 миллионов долларов, взвешенных коротких - 90 миллионов долларов. Величина чистой взвешенной позиции (первая компонента требований по капиталу) равна 100 – 90 = 10 (плюс десять) миллионов долларов. Требования по капиталу для компенсации «вертикальных несоответствий» (вторая компонента, не имеющая определенного знака) равна 9 млн. доларов (10% от 90 миллионов).

[18] Если агрегирования внутри зоны или между зонами не возникает, «горизонтальные несоответствия» не расчитываются.

методы взаимозачета длинных и коротких позиций, для отдельных видов производных могут иметь свои особенности.

Форварды и *фьючерсы* трактуются как комбинация длинной и короткой позиций по базовому активу (если базовым активом выступает индекс, в расчет берут рыночную стоимость *портфеля* ценных бумаг, служащего базой для данного индекса). Например форвардный контракт на приобретение (длинная позиция) государственной облигации, погашаемой через один год рассматривается как комбинация длинной позиции по государственной облигации, погашаемой через год, и короткой позиции по аналогичной бумаге с погашением через три месяца. Взаимозачету подлежат длинные и короткие позиции по полностью аналогичным контрактам.

Свопы, подобно фьючерсам и форвардам, также преобразуются в две позиции по государственным обязательствам: одна - по инструменту с плавающей ставкой, погашаемому в момент следующего определения размера ставки, другая - по инструменту с фиксированной ставкой, погашаемому в момент окончания действия свопа.

Перерасчет позиций по *опционам* возможен несколькими методами, что отражает существенно более сложную финансовую структуру данных инструментов. *Упрощенный подход* может использоваться банками, выступающими только как покупатели опционов. Если речь идет о сочетании длинной или короткой позиции по базовому активу и *соответственно* опционов пут или колл (так называемый *покрытый* опцион), размер требуемого капитала расчитывается как требования по специфическому и общему рыночному риску в отношении базового актива за минусом текущей стоимости опциона. Под текущей стоимостью в данном случае понимается, выигрыш владельца опциона, расчитанный по текущим рыночным ценам[19].

Для банков, выступающих как продавцы опцонов, может применяться один из *промежуточных подходов*: метод *дельта-плюс* и *сценарный метод*. Согласно методу дельта-плюс, так называемые *дельта-взвешенные* опционные позиции включаются в расчет требований по капиталу стандартизованым методом. Процентные опционы, как и другие производные, пересчитываются в соответствующий эквивалент по базовому активу. Так, короткая позиция во опциону колл (т.е. проданный банком опцион колл)

Требования по капиталу по опционным позициям расчитываются как сумма (1) *дельта*-эквивалента, (2) поправки на *гамму*, и (3) поправки на *вегу* опциона.

[19] Например, если цена выполнения опциона *колл* равна 5 долларов за одну единицу базового актива, текущая рыночная цена - 6 долларов, количество - 100 единиц, то текущий выигрыш владельца равен 100×(6–5)=100 долларов. Соответственно на эту сумму будут снижены требования к капиталу, связанные с рыночным риском по данному базовому активу. Если рыночная цена упадет до 4 доларов, выигрыш владельца будет равным нулю.

Внутренние модели измерения рыночных рисков

Использование *внутренних моделей* (т.е. собственных моделей банка) для оценки размера рыночных рисков (показателя *Value-at-Risk*) и определения на основе этих оценок размеров регуляторного капитала может, в сответствии с *BIS 1998*, осуществляться на основании явного разрешения надзорного органа. Такое разрешение должно выдаваться только в случае, когда внутренняя система управления рисками банка эфективна и интегрирована в его деятельность, у банка имеется достаточный и квалифицированный персонал для осуществления функций измерения рисков, имеется достаточно свидетельств о точности оценки рисков внутренней моделью, банком регулярно производится стресс-тестинг.

Важнейшей составной частью внутреней модели измерения риска является *спецификация основных факторов риска* - рыночных цен и ставок, влияющих на стоимость торговых позиций банка. В отношении процентных ставок это должен быть набор факторов, соответствующих процентным ставкам по каждой валюте, в которой банк имеет балансовые либо внебалансовые позиции. Система измерения риска процентной ставки должна включать модель кривой доходности, базирующуюся на одном из общепринятых подходов. Кривая доходности делится на несколько сегментов (по времени погашения), для каждого из которых определяется свой фактор риска (процентна я ставка). Количество и длина сегментов, как и количество факторов риска, должно определяться структурой операций банка. Чем более сложна структура операций (в частности - количество различных видов инструментов в портфеле банка) - тем больше факторов риска должно рассматриваться. В качестве отдельных факторов риска должны рассматриваться *спреды* между различными ставками (вплоть до введения в модель разных кривых доходности для основных сегментов рынка).

Допуская определенную гибкость в построении внутренней модели (в качестве методов расчета *VaR* могут использоваться имитационые модели, модели, основанные на ковариационной матрице, модели на базе исторических наблюдений и т.д. - подробнее о моделях и методах расчета *VaR* см. Главу 11), *Дополнение* устанавливает определенные стандарты, которым данная модель должна соответствовать (см. *BIS 1998* [ ]):

1) Величина *Value-at-Risk* должна расчитываться ежедневно, на основании 99% доверительной вероятности, для периода времени длительностью 10 торговых дней.

2) Длительность периода исторических наблюдений, на основании которых производится расчет, должен быть не менее одного года.

3) Банк должен обновлять базу данных, используемую для расчета, не реже одного раза в три месяца.

4) Банк должен стремиться по возможности точно оценивать корреляцию между факторами риска.

5) Необходимо точно оценивать риски, связанные со встроеными опционами, в т.ч. принимая во внимание нелинейные характеристики опционных позиций и включая в состав факторов риска величины волатильности цен и процентных ставок.

6) Минимальный размер капитала, необходимый для компенсции рыночных рисков, определяется банком *ежедневно* по следующему принципу: максимальная из двух величин - (а) VaR предыдущего дня или (б) средняя VaR за последние 60 рабочих дней умножается на *коэффициент*, который определяется надзорным органом, но не может быль меньше 3. Данный коэффициент для каждого отдельного банка может быть увеличен (не более чем на единицу) в зависимости от эффективности модели, которая оценивается по историческим днным (т.н. *бэк-тестинг*).

7) Если в модель не включены специфичесие риски по тем или иным процентным инструментам, требования по капиталу для этих рисков расчитываются в соответствии со стандартизованным подходом и затем суммируются. Даже в случае, когда внутренняя модель охватывает специфические риски, требования по капиталу для компенсации этих рисков не могут быть меньше 50% требований, расчитанных в соответствии о стандартизованным подходом.

Использование внутренней модели для определения величины регуляторного капитала может стать важным средством повышения конкурентоспособности банка. Стандартизованный метод, являясь осторожным и консервативным, как правило *завышает* размер капитала, необходимого для компенсации рисков. В нем не учитываются эффекты диверсификации, корреляция между факторами риска и другие существенные факторы. Более того, в соответствии со стандартизованным подходом, один и тот же размер регуляторного капитала может быть получен для портфелей с существенно различным риском[20] (например, один портфель харатеризуется значительной степенью диверсификации, другой - нет). Применение внутренней модели позволяет учесть риски более точно, тем самым снизив величину регуляторного капитала для банка, эффективно использующего диверсификацию и стратегии хеджирования рисков (как показывает практика, разница между регуляторным капиталом, расчитанным по стандартизованному методу и полученому на основании расчета *Value-at-Risk* может достигать 50% - см. напр. Круи и др. (2001) [ ]).

[20] Несответствие между реальным риском, которому подвержен портфель банка и величиной риска, расчитываемого в соответствии со стандартизованным подходом, приводит к пояалению так называемого «регуляторного арбитража» - банки с более рисковым (например, в меньшей степени диверсифицированм) портфелем получают конкурентнй преимущества, так как требования к капиталу для них могут такими же, как и для более надежных банков.

Риск процентной ставки в Директиве ЕС об адекватности капитала

Директива Коммисии Европейских Сообществ 93/6/EEC от 15 марта 1993 г. [ ] об адекватности капитала инвестиционных фирм и кредитных учреждений (так называемая *Capital Adequacy Directive* или *CAD*), введенная в действие с начала 1996 г., устанавливает стандарты определения требований к величине капитала («собственных средств») для финансовых посредников стран-членов ЕС. Директива *CAD дополняет* принятые в 1989 г. директивы 89/647/EEC [ ] и 89/299/EEC [ ] (о коэффициенте платежеспостобности и о собственных средствах[21]) - в первую очередь *в отношении рыночных рисков*.

Основные подходы определения требований к размеру капитала, содержажиеся в директивах ЕС, аналогичны принципам Базельского Соглашения 1988 г. и Дополнения 1996 г. Отличием является то, что если документы Базельского комитета имеют отношение только к банкам, то директивы ЕС охватывают как банки (кредитные учреждения), так и инвестиционные фирмы.

Требования к капиталу в отношении рыночных рисков[22], и в частности - риска процентной ставки, в соответствии с *CAD* расчитываются в целом *аналогично* стандартизованной методике Базельского комитета (с некоторыми непринципиальными отличиями и особенностями).

В июне 1998 г. Европарламентом и Комиссией Европейских Сообществ принята директива 98/31/EC, которой внесены поправки в директиву *CAD*. Наиболее существенной поправкой явилось Приложение VIII, допускающее возможность использования *внутренних моделей* (т.е. показателя *Value-at-Risk*) для опредления нормативов достаточности капитала. Как и в документах Базельского комитета, здесь перечисляется целый ряд условий, при выолнении которых надзорный орган может разрешить использование внутренних моделей. Требования по размеру капитала для компенсации рыночных рисков, как и в случае *BIS 1998*, рассчитываются умножением *VaR* (доверительная вероятность - 99%, 10-дневный интервал времени) на коэффициент, минимальное значение которого равно трем и может быть

[21] В 2000 г. директивы 89/647/EEC, 89/299/EEC и ряд других «банковских» директив Европейского Сообщества объединены в консолидированной директиве 2000/12/EC.

[22] В директиве *CAD* указывается, что надзорные органы могут разрешить кредитным организациям и инвестиционным фирмам расчитывать нормативы достаточности капитала только лишь в соответствии с директивой 89/647/EEC (т.е. учитывая только кредитные риски и не принимая во внимание рыночные риски по позициям торгового портфеля), если (а) торговый портфель обычно не превышает 5% общего размера бизнеса, (б) торговый портфель обычно не превышает 15 млн. евро, (в) торговый портфель *никогда не превышал* 6% размера бизнеса и 20 млн. евро.

увеличено надзорным органом до четырех в зависимости от результатов бэк-тестинга.

В отношении процентного риска важно отметить также требование 4-го параграфа статьи IV Директивы *CAD*, указываещего, что «*регулирующие органы должны требовать от учреждений <, подпадающих под действие данной директивы,> создания систем мониторинга и контроля риска процентной ставки по отношению к бизнесу в целом, причем такие системы должны быть предметом надзора со стороны данных регулирующих органов*».

Риск процентной ставки и норматив достаточности капитала в Росийской Федерации

Начиная с отчетности на 1 апреля 2000 г. российские банки, при расчете норматива достаточности капитала, должны учитывать размер рыночных рисков - это определено Положением ЦБ РФ от 24 сентября 1999 г. № 89-П «О порядке расчета кредитными организациями размера рыночных рисков» [ ]. Нормы данного Положения в целом следуют *стандартизованой методике* расчета нормативов достаточности капитала Базельского комитета (*BIS 1998*) и Евросоюза (*CAD*).

Величина *рыночного риска*, рассчитывается как умноженная на 12,5 сумма величин (1) рыночного риска по финансовым инструментам, чувствительным к изменениям процентных ставок (процентного риска), (2) рыночного риска по финансовым инструментам, чувствительным к изменению цен на фондовые ценности (фондового риска)[23], и (3) рыночного риска по позициям в иностранных валютах и драгоценных металлах. Размер рыночного риска, полученный указанным образом, учитывается при расчете норматива достаточности капитала (норматив Н1)[24]. При этом величины процентного и фондового риска учитываются только теми кредитными организациями, совокупная балансовая стоимость торгового портфеля которых превышает 200% капитала.

[23] Размеры процентного и фондового риска расчитываются дл торгового портфеля, т.е. не включая инструменты, приобретенные для целей инвестирования.

[24] Капитал (собственный капитал) банков в РФ должен составлять (на момент написания этой книги) не менее 10% размера рисков для банков с капиталом более 5 млн. евро и 11% для банков с капиталом от 1 до 5 млн. евро. В целом, данный норматив пока не является ограничивающим, - его фактическое значение для российских банков на середину 2002 г. в среднем превышает 20%. Однако логика развития финансовой системы в целом и банковского сектора в частности, приводит к постепенному снижению фактических значений номативов Н1.

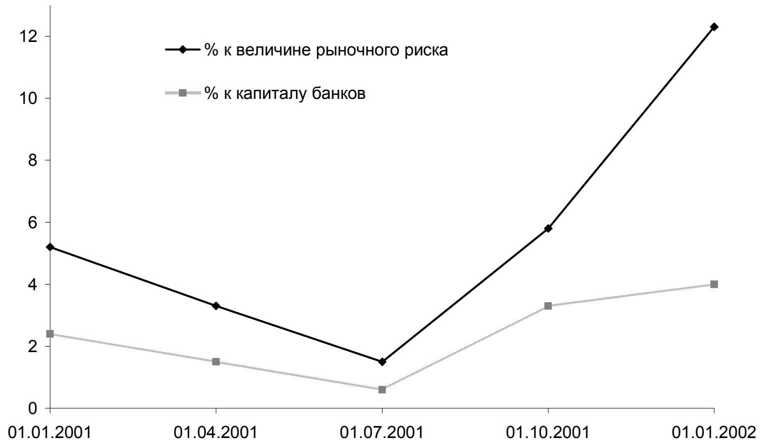


Рис. 2.3. Размер процентного риска по отношению к общей величине рыночных рисков и размеру капитала банков в РФ (2001 г.) *Источник: Банк России.*

Процентный риск расчитывается как сумма специфического риска (в Положении - *специальный процентный риск*) и общего рыночного риска (*общий процентный риск*). Методика расчета специфического риска по сути идентична подходу *BIS 1998*. Алгоритм расчета общего риска также разработан на основании рекомендаций Базельского комитета и аналогичен *методу сроков погашения* (*maturity method*).

Принципы управления риском процентной ставки и Новое Базельское Соглашение

В 1997 г. Банком международных расчетов опубликован документ под названием «Принципы управления риском процентной ставки» (1997) [ ]. Изначально являясь консультативным и предназначенным для дальнейшего обсуждения, документ фиксировал двенадцать «принципов, согласованных со всеми членами Базельского комитета и содержащих стандарты, которые должны использоваться всеми национальными надзорными органами в отношении оценки адекватности и эффективности управления риском процентной ставки в банке». Базельский комитет отмечал, что «все банки должны иметь достаточный капитал, соответствующий рискам, которым они подвержены, в том числе - риску процентной ставки». В документе указывается, что риск процентной ставки - нормальная составная банковской деятельности и важный источник прибыльности банка. Однако неблагопрятные изменения процентных ставок могут отрицательно повлиять на размеры процентных доходов и затрат, а также стоимость банковских активов, обязательств и внебалансовых позиций.

Переработанная и дополненная версия документа 1997 года (в частности, количество Принципов увеличено до пятнадцати) вошла в *проект Нового Базельского Соглашения* о стандартах достаточности капитала (*The New Basel Capital Accord*), который опубликован Банком международных расчетов в начале 2001 года. Принципы по управлению риском процентной ставки, которые по мнению членов Базельского комитета «должны использоваться для оценки адекватности и действенности системы управления риском процентной стави в банке, определения уровня риска процентной ставки, с которым сталкивается банк, и разработки стандартов надзора в отношении данного риска» (см. *BIS* (2001) [ ]), сводятся к следующему[25]:

1) *Совет директоров банка должен утвердить стратегию и политику в отношении управления риском процентной ставки, обеспечить выполнение высшим менеджментом банка мер, необходимых для мониторинга и контроля данного риска, получать регулярную информацию о размерах уязвимости[26] банка к риску процентной ставки.* Ключевая обязанность совета директоров - понимание природы и размеров процентного риска, который берет на себя банк. Разработка политики в данном случае означает в первую очередь определение целей и стратегии банка в отношении процентного риска, определение ответственности органов управления в области идентификации, измерения, мониторинга и контроля данного риска. Для этого, в частности, со стороны совета директоров должны действовать процедуры периодичного мониторинга и контроля за выполнением этих функций.

2) *Обеспечение эффективного управления структурой операций банка и тем уровнем процентного риска, который данная структура предполагает, определение политики и процедур по контролю и ограничению данного риска, выделение достаточных ресурсов для решения задач оценки и контроля процентного риска, является ответственностью высшего менеджмента банка.* Ответственность высшего руководства банка состоит в обеспечении того, что банк использует адекватные меры и процедуры по управлению процентным риском. Высшие органы управления должны быть ответственны за (а) опеделение лимитов процентного риска для организации, (б) создание адекватной системы измерения процентного риска, (в) определение стандартов оценки стоимости позиций, (г) систему отчетности и контроля процентного риска, (д) эффективный внутренний контроль.

[25] Как и в случае со стандартами достаточности капитала, здесь приводится лишь сжатое и неполное изложение принципов с кратким комментарием. Подробно с данным документом, как и другими документами по банковскому надзору, можно познакомиться на сайте Банка международных расчетов (*www.bis.org*).

[26] *Exposure*.

Высшее руководство должно получать регулярные отчеты по уязвимости банка к процентному риску и обеспечить достаточный уровень квалификации сотрудников, ответственных за вопросы управления и контроля процентного риска.

3) *Банк должен точно определить людей и/или подразделения, ответственные за управление риском процентной ставки и обеспечить адекватное разделение обязанностей в процессе управления риском для избежания потенциальных конфликтов интересов. Банк должен иметь функции измерения риска, мониторинга и контроля с четко обозначенными обязанностями, подчиненное непосредственно высшему менеджменту и совету директоров и независимое от бизнес-подразделений. Большие банки или банки со сложной структурой операций должны иметь специальное подразделение, ответственное за систему управения риском процентной ставки.* В банке должна быть учреждена специальная служба контроля за риском процентной ставки, обеспечивающая согласование всех операций банка с задачами контроля процентного риска. Данная служба должна быть отделена и независима от других подразделений и отчитываться об уровне процентного риска непосредственно высшему руководству и совету директоров.

4) *Политика и процедуры в отношении риска процентной ставки должны быть ясно определены, должны соответствовать природе и уровню сложности деятельности банка, регулировать риски как по отношению ко всему банку (на консолидированном уровне), так и, если необходимо, - на уровне отдельных подразделений.* Ясно определенная политика и процедуры в отношении риска процентной ставки важны не только на уровне банка в целом, но и на уровне отдельных подразделений. Инструменты управления риском и границы их возможного использования на уровне отдельных подразделений - важная составная часть политики банка по управлению процентным риском, которая должна периодически пересматриваться и совершенствоваться. Набор возможных инструментов и действий, которые могут использоваться банком в целом и его подразделениями, равно как и пределы их использования, должны быть определены в специальном документе.

5) *Банк должен идентифицировать риски, связанные с новыми продуктами или видами деятельности, и установить процедуры по их регулированию до того, как эти продукты или виды деятельности реализуются на практике. Основные направления по управлению риском и способы хеджирования должны утверждаться советом директоров банка или уполномоченным им органом.* Любые новые для банка продукты и инструменты должны быть предметом тщательного предварительного исследования с точки зрения их влияния на общий уровень уязвимости банка по отношению к риску процентной ставки. Перед тем как предложить к исполь-

зованию новый продукт, стратегию хеджирования или направление для инвестиций, менеджмент банка должен обеспечить наличие адекватных процедур по контролю за рисками, связанными с данной новой деятельностью. Любые предложения по новым продуктам или стратегиям должны содержать: (а) описание данного продукта или стратегии, (б) идентификацию ресурсов, необходимых для обеспечения эффективного управления риском, связнным с новым направлением, (в) анализ приемлемости данного продукта или стратегии с точки зрения общего финансового состояния банка и уровня его капитализации, (г) описание процедур и методов для измерения и контроля рисков, связанных с данным направлением деятельности.

6) *Важно, чтобы банк обладал системой измерения риска процентной ставки, учитывающей все возможные источники процентного риска и оценивающей их влияние на результаты деятельности банка в соответствии со структурой его деятельности. Предположения, лежащие в основе такой системы должны быть ясно понимаемы риск-менеджерами и менеджментом банка в целом.* Система управления должна (а) оценивать процентный риск, связанный со всеми банковскими активами, обязательствами и внебалансовыми позициями по всем возможным источникам риска - риску переоценки, риску кривой доходности, базисному и опционному риску, (б) использовать общепринятые концепции и методы измерения риска, (в) включать хорошо документированные предположения и параметры.

Простейшей методикой оцеки уязвимости банка по отношению к процентному риску, называемой *анализом разрывов*, является разбиение активов, обязательств и внебалансовых позиций на «временные зоны» в зависимости от сроков погашения (для инструментов с фиксированной ставкой) или сроков переоценки (для инструментов с плавающей ставкой). Для каждой временной зоны расчитываются *разрывы* (активы минус обязательства плюс чистая величина внебалансовых позиций). Величина разрыва может рассматриваться как размер риска переоценки для данной временной зоны. Влияние изменений процентных ставок на стоимость позиций в рамках каждой временной зоны, а также на финансовую позицию банка целом, может быть оценена на основании показателей *дюрации*. Банки могут использовать и более сложные методики измерения риска (например, методы имитационного моделирования), но независимо от использумого подхода, особое внимание должно уделяться обоснованности лежащих в его основе предположений и точности расчета величин уязвимости.

7) *Банк должен установить лимиты операций и предпринимать другие меры, направленные на удержание объемов подверженных риску позиций в пределах, соответствующих внутренним нормативам.*

Одной из главных целей управления риском процентной ставки является удержание уязвимости банка к возможным изменениям процентных ставок в определенных, установленных самим банком пределах. Средством достиения этой цели есть определение системы *лимитов* позиций в отношении риска процентной ставки. Данные лимиты должны быть согласованы с используемым в банке подходом по измерению риска. Лимиты по риску процентной ставки для банка в целом должны одобряться советом директоров, периодически пересматриваться и быть согласованными с размерами банка, сложностью его операций и требованиями по достаточности капитала. Высший менеджмент банка должен немедленно информироваться о случаях превышения установленных лимитов, должны быть установлены ясные правила, по которым должен действовать менеджмент при возникновении таких случаев.

8) *Банк обязан оценивать возможные потери на случаи рыночных стрессов - включая случаи нарушения ключевых предположений моделей управления риском, - и принимать во внимание полученные результаты при утверждении политики и лимитов по риску процентной ставки.*

Оценка влияния рыночных стрессов на финансовое состояние банка (стресс-тестинг) должна быть неотъемлемой частью системы измерения риска процентной ставки. Сценарии, используемые дл стресс-тестинга могут (и должны) включать внезапные изменения уровня процентных ставок, изменение соотношений между основными рыночными ставками (базисный риск), изменения наклона и формы кривой доходности, изменения ликвидности основных финансовых рынков и изменчивости (волатильности) рыночных ставок. Данные сценарии также должны предусматривать возможности прекращения действия основных предположний о функционировании рынков и включать не только наиболее вероятные но и нахудшие варианты развития событий.

9) *Банк должен иметь адекватную информационную систему для мониторинга и отчетности, предоставляющую высшему менеджменту и совету директоров регулярную информацию по зависящим от процентных ставок позициям.*

Точная, информативная и регулярно предоставляющая необходимые данные информационная система предельно важна как для информационнй поддержки правленческих решений в отношении рика процентной ставки, так и для оценки соответствия менеджмента установенной политике в области управления риском. Отчеты по уязвимости банка к риску процентной ставки должны, как минимум, содержать (а) обобщенную информацию по уровням риска для банка в целом, (б) информацию о соответствии фактического положения вещей утвержденной политике, (в) результаты стресс-тестинга, (г) результаты оценивания процедур и политики управления рисками, адекватности системы измерения рисков, как внутренние, так и осуществленные внешними аудиторами и консультантами.

10) *Банк должен иметь адекватную сстему внутреннего контроля за процессом управления риском процентной ставки и должен периодически производить оценку эффективности данной системы. Фундаментальной компонентой системы внутреннего контроля является реулярная независимая оценка эффективности системы. Результаты такой оценки должны быть доступны надзорным органам.*

Процесс контроля за риском процентной ставки должен бать составной частью общей структуры внутреннего контроля банка. Соответствующим образом структурированная, система внутреннего контроля должна обеспечивать эффективность и действенность операций, адекватную отчетность, соответствие управленческих решений нормативым документам и внутренней политике.

Оценивание системы управления риском процентной ставки должно включать анализ используеых предположений, параметров и методов. Результаты такого оценивания должны документироваться и регулярно докладываться совету директоров. Банкам, в особенности обладающим сложной структурой уязвимости к риску процентной ставки, рекомендуется использовать внешних аудиторов или других независимых специалистов для оценивания свое системы измерения процентного риска. Специалисты, производящие такое оценивание, должны принимать во внимание (а) *количественные параметры* процентного риска (объемы и чувствительность к проценым ставкам различных продуктов, уязвимость доходов и капитала к различным видам изменений процентных ставок), (б) *качество* процесса управления риском процентной ставки (соответствие системы управления риском природе, структуре и сложности операций банка, наличие независимой службы контроля риска, вовлеченность совета директоров и высшего руководства в процесс управления риском, качество и непротиворечивость политики в области управления процентным риском, квалификация персонала, ответственного за вопросы контроля риска, и т.д.).

11) *Надзорные органы должны получать от банков достаточную и регулярную информацию для оценки уровня риска процентной ставки. Эта информация должна включать достаточные данные по срокам погашения и валютам инструментов, входящим в банковские портфели, а также по другим имеющим значение факторам, таким как разделение торговых и неторговых видов деятельности.* Объем и структура информации, получаемой надзорным органом, должен быть достаточным для адекватной оценки уровня риска процентной ставки банка.

12) *Банки должны обладать капиталом, соразмерным с уровнем риска процентной ставки, которому они подвержены.*

13) *Банки должны публиковать информацию о уровне риска процентной ставке, которому они подвержены, и политике по управлению данным риском.*

14) *Надзорные органы должны оценивать - насколько внутренняя система измерения риска процентной ставки адекватно отражает фактический уровень риска. Если система измерения риска неадекватна, банки должны привести ее в соответствие с требуемым стандартом. Для обеспечения мониторинга со стороны надзорного органа, банки должны предоставлять результаты оценок риска в терминах потерь экономической стоимости, используя стандартизованное изменение (шок) процентных ставок.*

15) *Если надзорный орган определит, что банк не обладает капиталом, соразмерным с уровнем риска процентной ставки, он должен предпринять действия, обеспечивающее либо снижение риска, либо увеличение капитала банка до необходимого уровня.*

Управление риском процентной ставки в нефинансовых компаниях

Роль современных моделей и методов в управлении риском процентной ставки

Эффективное управление риском процентной ставки сегодня практически невозможно без применения аналитического аппарата современных финансов. К ключевым задачам, требующим квалифицированного и адекватного применения современных финансовых моделей и методов следует отнести следующие:

1) Оценка финансовых инструментов.
2) Разработка новых финансовых продуктов.
3) Оценка риска.
4) Расчет нормативов достаточности капитала
5) Управление портфелем активов и обязательств компании.

Обзор методов и аппарата моделирования, предназначенных для решения указанных задач, обсуждение возможностей и особенностей их практического применения досталяет основное содержание последующих глав

III. Расчет процентных ставок

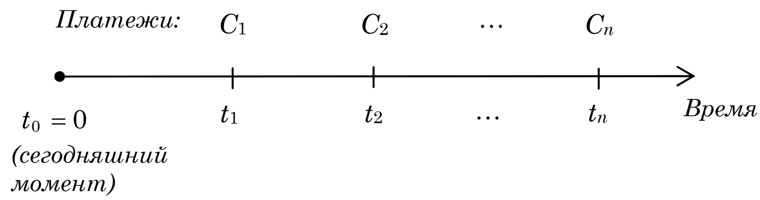
В этой главе вводятся базовые понятия финансовых расчетов по инструментам с фиксированным доходом. Основная практическая задача, рассматриваемая здесь – как, используя доступную рыночную информацию, оценить долговое обязательство, платежи по которому известны с определенностью. Эта задача может иметь различные модификации. Например, из множества доступных для инвестирования инструментов необходимо выбрать наиболее выгодный (наиболее доходный). Либо необходимо определить – по какой цене выгодно купить (продать) данное долговое обязательство. Или необходимо найти существующие на рынке арбитражные возможности – операции, которые могут принести гарантированную положительную прибыль при нулевых затратах.

Для решения перечисленных задач существуют различные методы. Некоторые из них очень просты для применения, но именно в силу этого дают недостаточно точные результаты. Другие гораздо более точны, но требуют более сложных расчетов. В финансовых расчетах, как и в финансах вообще, «не бывает бесплатных пирожных», и в реальности часто необходим компромисс между точностью метода и трудоемкостью его применения.

Данная глава призвана помочь, во-первых, верно интерпретировать информацию, поступающую с рынка. Сложность часто состоит в том, что не различных рынках правила представления информации, в частности - правила расчета рыночных цен и показателей доходности, могут существенно различаться. Поэтому корректная интерпретация рыночных котировок является необходимым условием правильных решений. Во-вторых, обладая информацией о рыночных ценах, необходимо уметь оценить произвольный долговой инструмент, платежи по которому известны с определенностью. Мы увидим, что для решения этой задачи с приемлемой точностью необходимо знать сегодняшнюю кривую доходности – значения процентных ставок для различных сроков погашения, т.к. традиционные рыночные методы, например основанные на показателях доходности к погашению, способны дать лишь приближенное, а значит – не вполне верное решение.

Инструменты с фиксированным доходом

Финансовый инструмент с фиксированным доходом может быть представлен как последовательность платежей $C_1, C_2, \dots, C_n$, которые будут осуществлены в моменты времени[1] $t_1, t_2, \dots, t_n$ соответственно:



Цена инструмента с фиксированным доходом P - есть сумма денег, за которую *сегодня* может быть куплено (продано) право собственности на данный поток платежей[2].

[1] Следующее замечание, несмотря на очевидность, является необходимым. Естественно, важно различать понятия *момент времени* и *промежуток времени*. В этой главе все обозначения исходят из того, что *сегодняшний* момент – это момент 0. Тогда *момент* t и *промежуток времени* до момента t – одна и та же величина.

[2] Естественно, на реальном рынке существует определенный спрэд – различие между ценами *покупки* и *продажи*. Чем более ликвидным является рынок – тем меньше величина спрэда.

В настоящей главе рассматривается случай с *детерминированными* платежами, когда инструмент с фиксированным доходом - это долговое обязательство, покупатель которого (кредитор), инвестируя *сегодня* сумму денег P, взамен получает право на получение от заемщика *фиксированных платежей в определенные будущие моменты времени*. Далеко не все долговые обязательства в реальности обладают такими свойствами. В общем случае размеры выплат $C_1, C_2, \ldots, C_n$, равно как и моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, не обязательно являются заранее известными, и могут зависеть от случайных факторов - это относится к обсуждавшимся в Главе 1 инструментам с плавающей ставкой, встроенными опционами, и др. Для оценки инструментов с неопределенными платежами необходим аппарат моделей временной структуры процентных ставок и оценки опционов, обсуждаемый в последующих главах.

Фактор времени

Способ измерения времени играет существенную роль в финансовых расчетах. *Дискретное время* означает, что временной промежуток всегда состоит из *целого* числа элементарных периодов (дней, недель, месяцев). В случае *непрерывного времени* выбирается единица измерения (чаще всего - *один год*), но временным интервалом может быть любое действительное число. Помимо того, *как измеряются* промежутки времени, важно *как выплачивается* (или *начисляется*) доход по долговому обязательству - дискретно или непрерывно. В реальности доход всегда выплачивается дискретно - в определенные *моменты* времени. Однако, непрерывное начисление дохода - удобная абстракция, широко используемая, например, в теориях временной структуры процентных ставок и моделях оценки производных инструментов. Непрерывное начисление дохода означает, что выплаты осуществляются и, что не менее важно, *могут быть реинвестированы* непрерывно. В таблице 3.1 приведены области применения различных способов измерения времени в финансовых расчетах. Подчеркнем – речь здесь идет лишь о *способах расчета*, а не об условиях финансовых соглашений.

Как видно из таблицы, в теоретических моделях и основанных на этих моделях практических приложениях подход к измерению времени всегда последователен - либо дискретный (и для интервалов времени, и для периодичности начисления и реинвестирования доходов), либо непрерывный. На реальных рынках при расчете показателей доходности долговых инструментов, единицей измерения времени практически всегда выступает *один год*, но длительность интервалов времени измеряется с точностью до *одного дня* - т.е. по сути время непрерывно, в то время как выплаты осуществляются и могут быть реинвестированы лишь дискретно.

Таблица 3.1. Способы измерения времени в финансовых расчетах

Промежутки времени:	*Начисление (реинвестирование) дохода:* Дискретное: выплаты осуществляются в определенные моменты времени	Непрерывное: доход начисляется и реинвестируется непрерывно
Дискретные (интервал времени - целое число)	Дискретные модели временной структуры; Численные методы оценки опционов	Не применяется
Непрерывные (интервал времени - любое действительное число)	Рыночные методы расчета процентных ставок (доходности долговых обязательств)	Непрерывные модели временной структуры; Модели оценки опционов (явные решения)

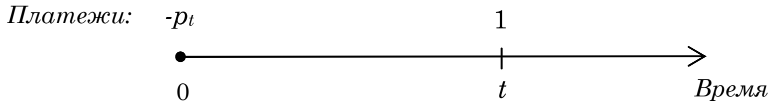
Простые дисконтные облигации

Объект торговли на рынках долговых обязательств - будущие деньги. Удобным базовым понятием для выражения *цен* этой торговли, является *простая дисконтная облигация*. Простая дисконтная облигация - гипотетический финансовый инструмент, владелец которого через время t (момент t назовем *временем погашения* облигации) гарантировано[3] получит одну денежную единицу (например, 1 гривну). Простые дисконтные облигации - универсальное средство для выражения цен межвременной торговли (стоимости денег во времени), представляющее собой своего рода «атомы», из которых состоят другие объекты торговли на рынке заемных средств.

Предположим, что на рынке обращаются безрисковые простые дисконтные облигации со всеми возможными сроками погашения[4]. Рыночную цену простой дисконтной облигации со сроком погашения t обозначим p_t. Тем самым, инвестирование в одну простую дисконтную облигацию сводится к обмену сегодняшних p_t гривен на *одну* гривну, выплачиваемую через t периодов:

[3] До определенного момента наличие кредитного риска (риска неплатежа) игнорируется, т.е. рассматриваются исключительно безрисковые долговые инструменты.

[4] Естественно, в реальности такого рынка не существует. Далее (в этой и последующей главах) будут рассмотрены методы определения цен простых дисконтных облигаций на основании данных о рыночных ценах реальных долговых инструментов.



Цены простых дисконтных облигаций подчиняются следующим простым свойствам:

1) $p_0 = 1$, т.е одна сегодняшняя гривна стоит одну гривну:

2) $p_{t_2} < p_{t_1}$ если $t_2 > t_1$, т.е. сегодняшняя денежная единица всегда дороже денежной единицы, получаемой в будущем. Это условие означает невозможность отрицательных значений рыночных процентных ставок.

Линейность цен, арбитражные возможности и оценка инструментов с детерминированными платежами

Величина p_t, как она была определена выше, - это просто рыночная *цена* одной будущей денежной единицы, получение которой гарантировано. Ценообразование на финансовом рынке является *линейным*, если, при условии, что цена одной будущей гривны составляет p_t, цена *произвольной* суммы денег размером C гривен, гарантированно выплачиваемой через тот же промежуток времени, равна $p_t C$. Величина p_t в данном случае является *коэффициентом дисконтирования*[5].

Линейность цен означает, что любой инструмент с фиксированными платежами может быть представлен как совокупность (портфель) простых дисконтных облигаций. Владеть инструментом, который обеспечивает выплаты C_1, C_2, ..., C_n в моменты времени t_1, t_2, ..., t_n, эквивалентно владению C_1, C_2, ..., C_n *штук* простых дисконтных облигаций со сроками погашения t_1, t_2, ..., t_n соответственно.

Если p_t - рыночные цены, то линейность ценообразования означает, что цена P *любого* безрискового инструмента с детерминированными платежами (поток C_1, C_2, ..., C_n в моменты t_1, t_2, ..., t_n) может быть представлена как:

$$P = \sum_{j=1}^{n} p_{t_j} C_j \,. \tag{3.1}$$

[5] Цена простой дисконтной облигации есть *рыночная стоимость* одной будущей денежной единицы, тогда как коэффициент дисконтирования мы будем понимать как сумму денег, наличие которой сегодня *эквивалентно* наличию одной денежной единицы в будущем. Понятия *стоимости* и *эквивалентной суммы денег* равнозначны только в детерминированном случае. Если процентные ставки колеблются случайным образом (см. Главу 7), то стоимость простой дисконтной облигации есть ожидаемое значение коэффициента дисконтирования (по нейтральной к риску вероятностной мере).

Если фактическая рыночная цена отклоняется от величины определенной в соответствии с (3.1), на рынке существуют *арбитражные возможности* - при нулевых инвестициях может быть получен положительный доход. Этого можно достичь покупая недооцененные рынком инструменты и одновременно продавая переоцененные[6].

Для дискретного времени (когда t_1=1, t_2=2, ..., t_n=n) формула (3.1) запишется как:

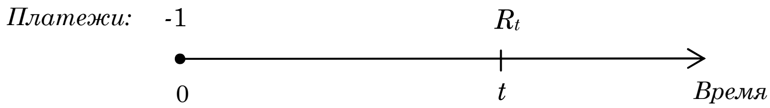
$$P = \sum_{j=1}^{n} p_j C_j \ . \qquad (3.2)$$

Выражение (3.1) (формула (3.2) - его частный случай) имеет фундаментальное значение в финансах: зная цены простых дисконтных облигаций, можно *оценить* (определить не допускающее арбитража значение цены) *любого инструмента с детерминированными платежами*.

Спот-ставки

Ставки доходности (процентные ставки) являются общепринятым способом выражения *цен межвременной торговли*.

Валовой доходностью R_t назовем совокупный доход, получаемый инвестором от вложений в простые дисконтные облигации сроком t периодов, в расчете на одну единицу инвестиций:



Валовая доходность и цена простой дисконтной облигации связаны простой зависимостью:

$$p_t \equiv \frac{1}{R_t} \text{ или } R_t \equiv \frac{1}{p_t} . \qquad (3.4)$$

Чистой доходностью, или *ставкой спот* сроком t периодов назовем величину чистого дохода по простой дисконтной облигации *в среднем за период* с учетом *эффекта сложных процентов*. Другими словами, ставка спот r_t - есть *средний темп прироста* стоимости вложенных средств в расчете на

[6] Строго говоря, для того, чтобы можно было реализовать эти возможности, транзакционные издержки (в данном случае - затраты связанные с выполнением сделок и разница цен покупки и продажи) должны быть пренебрежимо малы.

один период, при условии, что средства инвестированы в простую дисконтную облигацию погашаемую в момент t:

$$(1+r_t)^t \equiv R_t, \quad (1+r_t)^{-t} \equiv p_t. \tag{3.5}$$

Ставки спот являются более удобным, по сравнению с ценами простых дисконтных облигаций, способом выражения цен будущих денег, так как приводят к общему измерению (чистый доход в процентах за период) инвестиции с различным сроком. Спот-ставки в детерминированном случае являются ставками дисконтирования в том смысле, что сегодняшняя стоимость произвольного денежного потока C, выплачиваемого через время t может быть представлена как $C(1+r_t)^{-t}$.

Пример 3.1. Расчет спот-ставок

Пусть рассматривается простая дисконтная облигация сроком погашения 3 периода, которая продается на рынке по цене $p_3 = 0{,}85$ грн., т.е. содержание сделки состоит в обмене сегодняшних 0,85 грн. на 1 грн. через 3 периода. Валовая доходность данной облигации, в соответствии с (3.4), равна:

$$R_3 = 1/p_3 = 1.1756.$$

Смысл величины R_3 - валовый доход, получаемый инвестором через три периода, в расчете на каждую инвестированную гривну.
Ставка спот (чистая доходность простой дисконтной облигации), исходя из (3.5), равна 0,0556672 (5.57% за период):

$$r_3 = (p_3)^{1/3} - 1 = 0.85^{-1/3} - 1 = 0.0556672.$$

Величине r_3 также можно дать ясную интерпретацию: инвестирование в данные облигации эквивалентно размещению средств на депозите сроком три периода, по которому каждый период начисляется 5,57% от суммы вклада на начало периода, причем инвестор не изымает средства с депозита (реинвестируя начисляемые проценты). Другой вариант интерпретации величины 5,57% - это *средний темп прироста* инвестированных средств (процентов за один период).

Определение спот-ставок на основании рыночной информации

На реальном рынке не существует дисконтных инструментов (или других долговых обязательств с единственным платежом) *для всех возможных сроков погашения*. Инструменты со средними и длинными сроками погашения как правило предполагают промежуточные выплаты. Тем не менее, на основании рыночных цен таких обязательств могут быть вычислены спот-ставки. Простейший подход называют *цепным методом расчета ставок спот*. Пример 3.2 иллюстрирует применение метода.

Цепной метод расчета ставок спот служит скорее иллюстративным целям - на реальном рынке, как правило, не существует достаточного количества ликвидных инструментов, сроки выплат по которым совпадают. Практические методы оценки значений коэффициентов дисконтирования и спот-ставок рассматриваются в следующей главе.

Пример 3.2. Цепной метод расчета спот-ставок

Пусть на рынке происходит торговля облигациями сроком погашения 1 (облигация *A*), 2 (облигация *B*) и 3 года (облигация *C*). Первая облигация - дисконтная, остальные - купонные с выплатой купона один раз в году. Номинальная стоимость всех облигаций - 100 гривень. Купон по облигации *B* равен 10 гривень, по облигации *C* - 15 гривень. Рыночные цены равны 90, 85 и 80 грн. соответственно, т.е. денежные потоки при покупке одной облигации каждого вида можно представить следующим образом (по купонным облигациям при погашении выплачивают последний купон и номинальную стоимость):

	сегодня	1	2	3	*годы*
Облигация *A*	-90	100			
Облигация *B*	-85	10	110		
Облигация *C*	-80	15	15	115	

Проще всего рассчитать ставку спот сроком один год (90 грн. - это сегодняшняя цена 100 грн., которые будут выплачены через один год):

$p_1 = 100/90 = 0.9$ грн., откуда $r_1 = 1/p_1 - 1 = 0.1111 \equiv 11.11\%$ годовых.

Для получения ставок спот сроком два и три года, расчитаем вначале цены простых дисконтных облигаций (коэффициенты дисконтирования). Рыночные цены облигаций *B* и *C* равны сегодняшней стоимости выплат, т.е.:

$$85 = p_1 \times 10 + p_2 \times 110\ ,$$

$$80 = p_1 \times 15 + p_2 \times 15 + p_3 \times 115\ .$$

Зная p_1, вначале из первого уравнения получим, что p_2=0.6909 грн., затем, подставляя данное значение во второе уравнение, вычислим p_3=0.4881 грн. Зная коэффициенты дисконтирования, ставки спот вычисляются с использованием формуы (3.5):

$$r_2 = (p_2)^{-1/2} - 1 = 0.6909^{-1/2} - 1 = 20.31\%\ ,$$

$$r_3 = (p_3)^{-1/3} - 1 = 0.4881^{-1/3} - 1 = 27.01\%\ .$$

Простые и эффективные ставки

Для избежания путаницы в финансовых расчетах, важно точно различать понятия *простых* (или *номинальных*) и *эффективных* ставок. Условия финансовых соглашений (процентные ставки по кредитам и депозитам, купонные ставки по облигациям, и т.д.) формулируют в терминах простых ставок (в этом случае говорят еще об *объявленной* ставке). Например, ставка

20% годовых по депозиту означает, что начисляемый процент в годовом измерении составляет 20% от суммы вклада (т.е., например, 20 копеек на каждую вложенную гривну). Но для того чтобы оценить эффективность финансового соглашения, недостаточно знать только лишь значение номинальной ставки - имеют значение сроки и структура платежей во времени. Для оценки и сравнения эффективности различных вариантов долговых соглашений более подходящим показателем является *эффективная ставка*. В отличие от простой, эффективная ставка - это чистый доход на единицу вложенных средств, который будет получен за один период (как правило, один год), если получаемые выплаты будут на протяжении года реинвестированы на тех же условиях. Тем самым, эффективная ставка учитывает сроки и структуру выплат (чем в более ранние сроки и чем чаще осуществляются выплаты - тем больший доход от реинвестирования будет получен) - по сути, приводя *к одному измерению* инструменты с различными сроками и структурой платежей.

Если по упомянутому выше депозиту (объявленная ставка - 20%) доход *выплачивается* только в конце года, простые и эффективные ставки совпадают, т.к доход от реинвестирования отсутствует. Но если начисление процентов происходит чаще, эффективная ставка окажется выше простой за счет дополнительного дохода от реинвестирования промежуточных выплат. Пусть при ставке $i = 20\%$ доход выплачивается ежеквартально, т.е. в конце каждого квартала выплачивают 5% от суммы вклада, существовавшего на начало квартала. Если промежуточные доходы реинвестируются под те же 5% за квартал, чистый доход на 1 инвестированную гривню к концу года составит $(1+0{,}05)^4 - 1 = 0{,}2155$ грн. или 21,55% годовых.

В целом, если объявленная ставка равна i процентов годовых, а доход выплачивается m раз в год равными частями через равные промежутки времени, связь между простой (i) и эффективной (r) ставками можно выразить с помощью соотношений:

$$r = (1 + i/m)^m - 1\,,\; i = m\left[(1+r)^{1/m} - 1\right]. \tag{3.6}$$

Число m здесь характеризует периодичность начисления сложного процента ($m = 1$ означает годовой сложный процент, $m = 2$ - полугодовой, $m = 4$ - квартальный, и т.д.).

Ставки с непрерывным сложным процентом

В непрерывном времени для измерения доходности более естественно использовать ставки *с непрерывным сложным процентом*. Ставкой спот с непрерывным сложным процентом назовем число x_t, удовлетворяющее соотношению $p_t = e^{-x_t \cdot t}$, т.е.:

$$x_t = -\frac{1}{t}\ln p_t\,, \tag{3.7}$$

где p_t - цена простой дисконтной облигации с погашением через t периодов. Ставки с непрерывным (x_t) и дискретным (r_t) сложным процентом связаны простыми соотношениями:

$$r_t = e^{x_t} - 1\,,\ x_t = \ln(1 + r_t)\,. \tag{3.8}$$

Смысл ставки с непрерывным сложным процентом можно объяснить так: x_t - это такое значение *простой* ставки, при которой, если проценты выплачиваются и реинвестируются *непрерывно*, чистый доход на единицу инвестиций к концу года составит $e^{x_t} - 1$. Фактически, (3.8) - это предельный случай формул (3.6) при $m \to \infty$.

Пример 3.3. Эффективная доходность

Рассмотрим приведенный в тексте пример с депозитом, по которому начисляется 20% годовых. Чем чаще начисляются проценты, тем большим будет доход инвестора в течение года. Если проценты начисляются один раз в год, доход на одну гривну составит к концу года 1 грн. 20 коп. Но при начислении процентов раз в полгода (10% каждые шесть месяцев) доход будет уже 1,1×1,1=1,21 грн., что соответствует эффективной ставке 21% годовых. При ежеквартальном начислении процентов (5% в квартал) доход составит 1,054=1,2155 грн. или 21,55% годовых. Эффективная доходность при других вариантах периодичности начисления процентов приведены в таблице:

Период сложного процента (*m*)	Эффективная доходность (% годовых)
1	20,00
2	21,00
4	21,55
12	21,94
52	22,09
365	22,13
непрерывный (∞)	22,14

Ставки с дискретным и непрерывным сложным процентом представляют собой различные способы измерения стоимости денег во времени. Одну и ту же цену простой дисконтной облигации p_t можно выразить в виде простой ставки i_t, эффективной ставки r_t или ставки с непрерывным сложным процентом x_t:

$$p_t = (1 + i_t t)^{-1} = (1 + r_t)^{-t} = e^{-x_t t}\,, \tag{3.}$$

Мгновенная ставка

В моделях структуры процентных ставок во времени важную роль играет ставка с наиболее близким к сегодняшнему дню сроком. Например, именно эту ставку удобно рассматривать как основной случайный фактор, влияющий на все рыночные процентные ставки. В непрерывном времени используют понятие мгновенной ставки – процентной ставки с бесконечно малым сроком погашения ($t \to 0$). Мгновенная ставка здесь и далее обозначается как r или x, иак как значение мгновенной ставки не зависит от способа расчета:

$$\lim_{t\to 0} r_t = \lim_{t\to 0} x_t = \lim_{t\to 0} i_t = r \equiv x .$$

В дискретном времени ставку с наиболее близким к сегодняшнему дню сроком погашения (один период) будем называть коаткосрочной ставкий и обозначать r_1. Так как на реальном рынке не существует инструментов с бесконечно малым сроком погашения, то в практических задачах в качестве мгновенной ставки часто рассматривается именно краткосрочная ставка.

Инфляция: ставки в номинальном и реальном выражении

Процентные ставки на рынке всегда имеют денежное (номинальное) выражение - это *денежный* доход на единицу вложенных средств. Но реальная стоимость (покупательная способность) денег со временем меняется вследствие изменения уровня цен реальных благ. Поэтому инвестора в первую очередь может интересовать не денежный доход, а то количество реальных благ, которое может быть приобретено за эти деньги.

Если рыночные ставки имеют денежное измерение, то *реальная процентная ставка* измеряется в единицах реальных благ. Пусть доходность вложений инвестора на протяжении года составила r процентов годовых (т.е., например, r гривень чистого дохода на одну инвестированную гривню). В то же время, потребительская корзина[7] в начале года стоила Π_0 грн., а к концу года - Π_1 грн. Для удобства примем $\Pi_0 = 1$, тогда $\Pi_1 = 1 + \pi$, где π - прирост уровня цен за период (*темп* инфляции[8]). Реальная процентная ставка (обозначим ее ρ) - есть чистый удельный доход, выраженный в единицах реальных ресурсов (в нашем случае - в количестве потребительских корзин):

---

[7] Индекс потребительских цен (относительная стоимость фиксированной корзины товаров и услуг) - далеко не единственный показатель, измеряющий изменения уровня цен (инфляцию), но в данном контексте - наиболее приемлемый

[8] Величина π может быть как положительной, так и отрицательной, последнее означает снижение уровня цен (дефляцию).

$$\rho = \frac{1+r}{1+\pi} - 1 = \frac{r-\pi}{1+\pi} \tag{3.9}$$

Формула (3.9) справедлива для случая дискретного начисления процентов. Если обозначить через π_x экспоненциальный темп прироста уровня цен: $\pi_x = \ln(1+\pi) = \ln \Pi_1 - \ln \Pi_0$, а через $\rho_x = \ln(1+\rho)$ - реальную ставку с непрерывным начислением процентов, то прологарифмировав выражение (3.9), получим, что в этом случае реальная процентная ставка равна просто разнице между номинальной $x = \ln(1+r)$ и темпом инфляции:

$$\rho_x = x - \pi_x \tag{3.10}$$

Пример 3.4 Расчет реальной процентной ставки

Пусть эффективная доходность вложений в некоторый финансовый инструмент составила $r = 20\%$ годовых. Уровень цен в том же периоде рос в среднем на $\pi = 10\%$ в годовом измерении. Это означает что реальная доходность вложений составила согласно формуле (3.9)

$\rho = (1+0{,}2)/(1+0{,}1) - 1 = 0.0909 \equiv 9{,}09\%$ годовых.

Перейдем к ставкам с непрерывным начислением дохода: $x = \ln(1+0{,}2) = 18{,}23\%$, $\pi_x = \ln(1+0{,}1) = 9{,}53\%$ годовых, т.е. реальная ставка в соответствии с формулой (3.10) равна

$\rho_x = 18{,}23\% - 9{,}53\% = 8{,}57\%$.

Полученные ставки ρ и ρ_x описывают один и тот же, просто измеренный различными способами, уровень реальной доходности, поскольку $\ln(1+0{,}0909) = 0{,}087$.

Доходность к погашению

Доходность к погашению (*yield to maturity*, *YTM*) - общепринятый показатель для измерения удельного дохода по инвестициям в долговые обязательства. Доходность к погашению (или, что то же самое, *внутренняя норма доходности*) - это такое *единственное* значение ставки дисконтирования, при котором сегодняшняя стоимость платежей, обеспечиваемых *данным инструментом*, равняется его рыночной цене. Если инструмент, рыночная цена которого равна *P*, обеспечивает платежи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в моменты времени 1, 2, ..., *n* (дискретное время), то доходность к погашению - это значение *y*, которое является решением уравнения:

$$P = \sum_{t=1}^{n} (1+y)^{-t} C_t \ . \tag{3.11}$$

Велична *y*, полученная как решение уравнения (3.11) - это доходность *за один период*. Если продолжительность периода времени между платежами меньше года, ее необходимо привести к годовому измерению. Это может быть сделано несколькими способами. Годовая доходность может рассчитываться как ставка с определенным периодом начисления сложного процента (обозначим ее $y_{(m)}$, где m - количество периодов в году; как правило, периодичность сложного процента соответствует периодичности платежей): $y_{(m)} = y \times m$. На многих рынках именно такой способ используют для расчета доходности облигаций. Другой способ - годовая доходность может расчитываться как эффективная годовая ставка с годовым сложным процентом:

$$y_e = (1+y)^m - 1. \tag{3.12}$$

Рассмотрим более общий случай, когда время непрерывно, а платежи не обязательно осуществляются через равные промежутки времени. Пусть по долговому обязательству будут выплачены суммы $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Величины $t_j, j = 1, \ldots, n$ - это *количество лет* от сегодняшнего дня ($t_0 = 0$) до *j*-го платежа. Доходность к погошению, как и ранее, может расчитываться как ставка с определенной периодичностью начисления сложного процента, тогда это будет решение относительно $y_{(m)}$ уравнения:

$$P = \sum_{j=1}^{n} (1 + y_{(m)} / m)^{-mt_j} C_j, \tag{3.13}$$

либо как эффективная ставка ($m = 1$) y_e из уравнения:

$$P = \sum_{j=1}^{n} (1 + y_e)^{-t_j} C_j. \tag{3.12}$$

Предельным случаем номинальной ставки (при $m \to \infty$) является доходность с непрерывным сложным процентом y_x:

$$P = \sum_{j=1}^{n} \exp(-y_x t_j) C_j. \tag{3.14}$$

Выбор того или иного способа расчета доходности к погашению определяется задачей, которую необходимо решить. Например, на рынке может быть принят определенный способ расчета, и для правильного взаимопонимания между участниками рынка необходимо использовать именно этот способ. В то же время, доходность к погашению - это показатель, предназначенный прежде всего для того, чтобы привести к одному измерению цены долговых обязательств (например, для сравнения эффективности инвестиций в различные инструменты). Для того, чтобы сравнение разных инструментов было корректным, необходимо использовать один и тот же способ расчета.

Между рыночной ценой и (расчитанной тем или иным способом) доходностью к погашению долгового обязательства существует однозначная взаимосвязь (при неизменности платежей $C_1, C_2, \ldots, C_n$), что позволяет говорить о доходности к погашению как о *способе представления рыночной цены финансового инструмента*. Важно подчеркнуть различие между понятиями доходности к погашению и ставки спот. Спот-ставка есть выражение цены будущей *денежной единицы*, тогда как доходность к погашению характеризует цену *определенного финансового инструмента*. В то же время, если это инструмент *с единственным платежом* (например, дисконтная облигация), его доходность к погашению, расчитанная по текущей рыночной цене, сложившейся на ликвидном рынке, является одновременно спот-ставкой для соответствующего срока.

Пример 3.5 Сравнение доходности инструментов с разной финансовой структурой

Пусть рассматривается две облигации - *X* и *Y*. Облигация *X* - дисконтная, погашаемая ровно через полгода, номинал - 100 грн., цена - 90 грн.. Облигация *Y* - купонная, погашается через один год, номинал также равен 100 грн., цена - 91,50 грн., купонные платежи в размере 6 грн. каждый будут выплачены через полгода и через год (при погашении):

	сегодня	*1/2*	*1*	*годы*
Облигация *X*	-90,0	100		
Облигация *Y*	-91,5	6	106	

Предположим, что для дисконтных облигаций рыночными соглашениями предусмотрен расчет *простой* ставки доходности, тогда как для купонных расчитывается *эффективная* ставка (годовая ставка с годовым сложным процентом). Тогда согласно рыночной информации доходность облигации *X* равняется 22,22% годовых (решение уравнения (3.9), умноженное на 2), а доходность облигации *Y* составляет 23,12% годовых (решение (3.9) приведено к эффективному измерению согласно (3.9); либо, что то же самое, эффективная ставка для *Y* расчитана как решение уравнения (3.12)). Означает ли эта информация, что доходность *Y* выше, чем доходность *X*? Нет, потому что ставки расчитаны разными способами. Для сравнения доходностей необходимо использовать одинаковый метод расчета. Доходность облигаций *X* и *Y* (в процентах годовых), расчитанная тремя разными способами, приведена в таблице:

Способ расчета	*Доходность облигации X*	*Доходность облигации Y*
Доходность с полугодовым сложным процентом ($m = 2$), $y_{(2)}$	22,22	21,92
Эффективная доходность (годовой сложный процент), y_e	23,46	23,12

Доходность с непрерывным сложным процентом ($m \to \infty$), y_x	21,07	20,80

Таким образом, независимо от выбора способа расчета, у облигации *X* по сравнению с *Y* доходность к погашению выше (а относительная цена, соответственно, ниже).

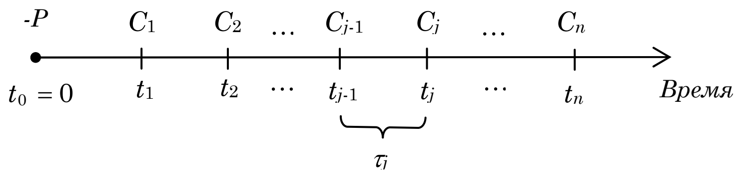
Доходность к погашению измеряет *темп прироста стоимости* инвестиций в данный процентный инструмент (в процентах за период), однако в действительности данная величина не является показателем фактической доходности инструмента - т.е. того, на сколько *на самом деле* будет прирастать стоимость инвестированных средств.. Точнее говоря, доходность к погашению равна *фактической* доходности при двух условиях: (1) промежуточные платежи реинвестируются на таких же условиях и по ставке, равной доходности к погашению, и (2) горизонт инвестора (время на которое он вкладывает деньги и за которое измеряет доходность) равняется времени до погашения данного инструмента.

Доходность купонных облигаций

Способы расчетов по облигациям для целей *торговли* могут на каждом рынке иметь свои особенности, объясняемые сложившимися традициями, правилами торговли, рыночными соглашениями или нормативным регулированием.

Введем следующие обозначения: N - номинальная стоимость облигации (основная сумма долга, выплачиваемая в момент погашения), P – текущая рыночная цена (сумма, фактически выплачиваемая покупателем продавцу), C_j - объем j-го платежа, n - количество платежей до момента погашения m - количество выплат в году, K - *котировка* (*курс*) облигации, которая в силу ряда причин может отличаться от фактической цены, уплачиваемой покупателем продавцу. K - это, как правило, цена за сто денежных единиц номинальной стоимости облигации, независимо от того, чему на самом деле равен ее номинал. В дальнейшем для упрощения записи будем игнорировать это различие, считая, не уменьшая общности, что номинальная стоимость всегда равна 100 денежным единицам.

Инвестирование в облигацию с фиксированным купоном описывается потоком платежей:



Купонная ставка i - это номинальный процент, выплачиваемый в виде купонов на единицу номинальной стоимости в течение года. Объемы платежей C_j как правило определяются как

$$C_j = i \times N \times \tau_j\,, \text{ для } j = 1,\ldots,n-1$$

$$C_n = i \times N \times \tau_n + N\,,$$

где τ_j - количество *лет* между выплатами.

Самым простым (и, по этой причине, очень удобным, хотя и неточным) индикатором доходности купонной облигации является *текущая доходность* (*current yield*), рассчитываемая как объем купонных платежей в годовом измерении, деленный на рыночную цену. Если купонная ставка фиксирована и неизменна, формулу для расчета текущей доходности можно записать как iN/P, данная величина является, по существу *простой* (не учитывающей эффект реинвестирования) доходностью облигации. Показатель доходности к погашению существенно более точен по сравнению с текущей доходностью, т.к. учитывает структуру платежей во времени, и соответственно - возможность получения доходов от реинвестирования купонных выплат.

Если от сегодняшнего дня до следующей купонной выплаты остался *ровно один* купонный период, время (приближенно) можно считать *дискретным* - продолжительность одного временного периода равна промежутку между купонными выплатами, *взаимосвязь доходности к погашению и цены* описывается соотношением (3.11)

$$P = K = \sum_{j=1}^{n} (1+y)^{-j} C_j\,. \tag{3.17}$$

В случае, когда купонные платежи равны между собой, т.е. $C_j = c$ для $j = 1,\ldots,n-1$, $C_n = c + N$, используя формулу аннуитета (суммы геометрической прогрессии) взаимосвязь цены и доходности может быть представлена

$$P = K = c\left(\frac{1-(1+y)^{-n}}{y}\right) + (1+y)^{-n} N\,. \tag{3.17'}$$

Доходность к погашению, полученная из (3.17), является доходностью *за один купонный период*. Годовую ставку как правило получают умножая y на количество купонных периодов в году ($y \times m$).

Накопленный купонный доход

Если до следующей купонной выплаты осталось *менее*, чем один купонный период, между рыночной ценой и курсом облигации возникает разница на величину *накопленного процента*[9] (или *накопленного купонного дохода*). Это различие вызвано, как минимум, двумя причинами: (1) необходимостью избежать резких колебаний котировок в момент выплаты купона (рыночная цена непосредственно перед купонной выплатой и непосредственно после нее будет отличаться ровно на величину купона – см. Рис. 3.1), и (2) бухгалтерской необходимостью учитывать отдельно процентный и капитальный доход, т.к., к примеру, ставки налогообложения по ним могут быть различны.

Связь между рыночной ценой и курсом можно записать как

$$P = K + A \text{, или } K = P - A \text{,} \tag{3.20}$$

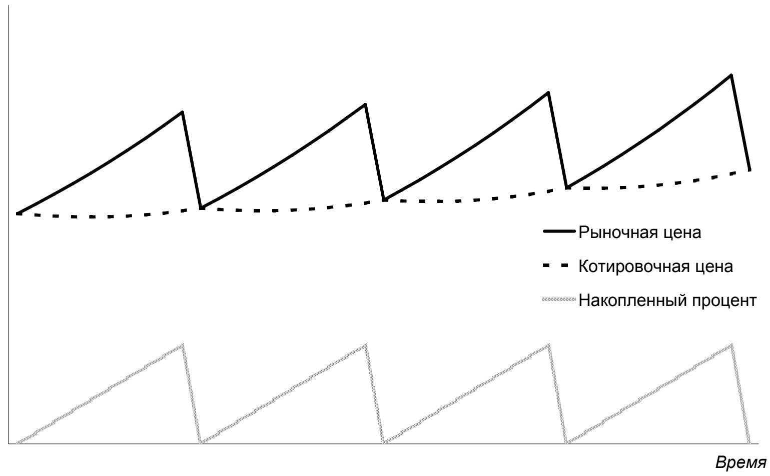


Рис. 3.1. Изменение цены облигации со временем (при условии, что доходность к погашению не меняется)

[9] *Accrued interest.*

где A - накопленный купонный доход, вычисляемый на большинстве рынков[10] по формуле:

$$A = i \times N \times (T_c - T) / T_c, \tag{3.21}$$

где T - количество дней до следующей купонной выплаты, T_c - количество дней в одном купонном периоде, i - купонная ставка. Накопленный процент можно интерпретировать как долю следующей купонной выплаты, которая принадлежит продавцу облигации. Доходность к погашению в данном случае будет решением уравнения

$$P = K + A = C_j \sum_{j=1}^{n} (1+y)^{-(j+\upsilon-1)}, \tag{3.22}$$

где $\upsilon = T / T_c$. На отдельных рынках могут существовать свои особенности расчета доходности к погашению – например, в отношении правил подсчета количества дней (см. ниже). Доходность к погашению может рассчитываться, например, как эффективная ставка y_e (т.е. годовая доходность с годовым периодом сложного процента - см. Пример 3.6):

$$P = \sum_{j=1}^{n} (1+y_e)^{-t_j} C_j, \tag{3.18}$$

Пример 3.6 Расчет доходности к погашению облигаций федерального займа (Россия)

Ниже приведены данные об итогах торгов облигациями Российской Федерации на Московской межбанковской валютной бирже (ММВБ) за 7 сентября 2001 г.

Код	Тип	Погашение	Купон (% год.)	Погашение купона	Цена (% от ном.)	Доходность (% год.)
25023	ОФЗ-ПД	12.09.01	14	12.09.01	100,02	12,46
21150	ГКО	14.11.01	-	-	97,79	12,13
21152	ГКО	28.11.01	-	-	97,35	12,12
27001	ОФЗ-ФК	6.02.02	15	8.11.02	100,58	14.09
27003	ОФЗ-ФК	5.06.02	15	5.12.01	100,77	14,42
27004	ОФЗ-ФК	18.09.02	20	19.09.01	100,89	14,87
27006	ОФЗ-ФК	22.01.03	15	24.10.01	98,38	15,31
27007	ОФЗ-ФК	5.02.03	15	8.11.01	97,91	15,78
27008	ОФЗ-ФК	21.05.03	15	21.11.01	96,59	16,03
27009	ОФЗ-ФК	4.06.03	15	5.12.01	96,93	15,80
27010	ОФЗ-ФК	17.09.03	20	19.09.01	95,84	16,08
27011	ОФЗ-ФК	8.10.03	15	10.10.01	93,00	17,15
28001	ОФЗ-ФК	21.01.04	15	24.10.01	90,50	17,90
27015	ОФЗ-ФК	4.02.04	16	8.11.01	93,06	17,87

[10] Правила расчета накопленного процента в разных странах могут несущественно различаться, например, способом вычисления длительности промежутков времени.

26002	ОФЗ-ПД	15.03.04	10	15.03,02	83,80	18,50
27013	ОФЗ-ФК	2.06.04	16	6.03.02	92,52	17,77
27014	ОФЗ-ФК	15.12.04	16	19.10.01	91,79	17,45
26003	ОФЗ-ПД	15.03.05	10	15.03.02	75,90	20,09

Облигации федерального займа с постоянным купонным доходом (ОФЗ-ПД) являются купонными облигациями с постоянной купонной ставкой, купон выплачивается один раз в год. В отличие от ОФЗ-ПД, купонная ставка по облигациям с фиксированным купонным доходом (ОФЗ-ФК) меняется на протяжении срока обращения облигации, купонные платежи осуществляются ежеквартально. Например, для ОФЗ-ФК 27015 (выделена в таблице жирным шрифтом), выпущенной 8 августа 2001 г. и погашаемой 4 февраля 2004 г., купонная ставка для первого купона составляет 16% годовых, со второго по пятый - 14% годовых, для остальных - 12% годовых. Размер купонного платежа рассчитывается по формуле $i \times N \times T_c / T_y$ и округляется до одной копейки, т.е. по данной облигации 8 ноября 2001 г. будет выплачено 16%×1000×92/365=40,33 руб. (здесь: 16% - ставка купона, 1000 руб. - номинал облигации, 92 дня - длительность купонного периода, 365 - количество дней в году). Фактическая цена (уплачиваемая покупателем продавцу) отличается от котировки на величину накопленного процента, рассчитываемого по формуле $C \times (T_c - T) / T_c$, в нашем случае: 40,33×(92-62)/92 = 13,15 руб. Таким образом, цена облигации 27015 равна 930,60+13,15=943,75 руб. за одну облигацию (или 94,375% номинальной стоимости).

Доходность к погашению купонных облигаций федерального займа рассчитывается как *годовая эффективная ставка* с годовым периодом сложного процента. Доходность к погашению ОФЗ-ПД и ОФЗ-ПК - это такое значение y, которое удовлетворяет уравнению (3.18)

Для ОФЗ-ФК 27015 имеем:

$$943{,}75 = \frac{40{,}33}{(1+y_e)^{62/365}} + \frac{34{,}52}{(1+y_e)^{152/365}} + \sum_{j=1}^{3} \frac{34{,}90}{(1+y_e)^{(152+91\times j)/365}} + \sum_{j=4}^{8} \frac{29{,}92}{(1+y_e)^{(152+91\times j)/365}} + \frac{1000}{(1+y_e)^{880/365}}$$

Решением данного уравнения будет $y_e = 17{,}87\%$ годовых.

Доходность облигаций с возможностью досрочного выкупа

В случае облигаций с возможностью досрочного выкупа (*callable bonds*) эмитент страхует себя от неблагоприятного изменения процентных ставок - если процентные ставки снизятся по сравнению с уровнем, существовавшим на момент выпуска, обслуживать долг с фиксированной ставкой становится невыгодно. При выпуске облигаций с правом досрочного выкупа, эмитент резервирует за собой возможность в определенные условиями эмиссии моменты времени выкупить облигации по заранее оговоренной цене (чаще всего - по номинальной стоимости). Это дает ему возможность, к примеру, рефинансировать долг по более низкой ставке.

Для облигаций с возможностью досрочного выкупа расчет доходности к погашению в обычном понимании невозможен, так как досрочный выкуп фактически аналогичен погашению, но вследствие невозможности точного прогнозирования будущих процентных ставок и соответствующих действий эмитента, невозможно точно знать - состоится ли досрочный выкуп, и если состоится, - то когда.

Широко используемым на многих рынках индикатором доходности облигаций с возможностью досрочного выкупа является показатель *доходности к моменту выкупа* (*yield to call*). Доходность к моменту выкупа расчитывается аналогично доходности к погашению исходя из предположения, что облигация будет выкуплена эмитентом в *первую же возможную дату выкупа*. В случае равных по размеру периодичных купонных платежей размером c, доходность к моменту выкупа будет решением уравнения

$$P = c\sum_{t=1}^{n_c}(1+y_c)^{-(t+v-1)} + P_c(1+y_c)^{-v_c},$$

где y_c - доходность к выкупу (процентов за один купонный период), n_c - количество купонных платежей до первой возможной даты выкупа, v_c - время (количество купонных периодов, в общем случае - дробное число) до первой даты выкупа, v - время до первого купонного платежа, c - размер купонного платежа, P_c - цена выкупа.

Возможность досрочного выкупа – это опцион на покупку, владельцем которого является эмитент облигации. Стоимость такой облигации для инвестора может быть представлена как разница между стоимостью аналогичной облигации без права досрочного выкупа и стоимостью опциона на покупку. Тем самым, для оценки облигации с правом досрочного выкупа требуется оценить соответствующий опцион. Вопрос оценки подобных опционов будет рассмотрен в последующих главах.

Доходность облигаций с плавающей ставкой

В случае облигаций с плавающей ставкой размеры купонных платежей как правило привязываются к определенной *ориентирной* рыночной процентной ставке. В этом случае расчет доходности к погашению также невозможен в силу невозможности точного прогнозирования процентных ставок. Поэтому для обязательств с плавающей ставкой имеет смысл расчет лишь *текущей доходности* - по известному следующему купонному платежу (при необходимости текущая доходность может приводиться к эффективному измерению), либо - обсуждаемой ниже *доходности к горизонту*, которая рассчитывается исходя из явного прогноза будущей динамики процентных ставок.

Пример 3.7 Облигации с плавающей ставкой и офертой погашения

Облигации с плавающей ставкой и офертой погашения появились в России в 2000 г. и на протяжении 2000 - 2002 стали одной из наиболее популярных форм выпуска корпоративных облигаций. Оферта погашения означает, что эмитент берет на себя обязательство по выкупу облигаций (по заранее объявленной цене) в определенные будущие моменты времени (как правило, после объявления размер очередного купона). Если облигации возможностью досрочного выкупа означают наличие у эмитента опциона колл (право покупки), то облигации с офертой погашения - это облигации со встроенным опционом пут (право продажи по фиксированной цене), которым владеет инвестор. Распространенность облигаций с офертой объясняется множеством причин. Это, прежде всего, создание дополнительных стимулов для инвесторов (снижается процентный риск, решается проблема с отсутствием адекватной «ориентирной» ставки, на основании которой определяются купонные выплаты - если инвестора не удовлетворяет величина ставки, он выполняет опцион - продает облигацию эмитенту) и снижение издержек эмитента (один относительно долгосрочный выпуск заменяет серию последовательных краткосрочных выпусков). Вопроосы оценки облигаций со встроенным опционом обсуждаются в Главе 10, здесь же речь идет лишь о расчете возможных показателей доходности - на примере выпуска облигаций ЗАО «АВК» (один из крупнейших в Украине производителей кондитерских изделий), размещенного в июле 2002 г. и ставшего первым выпуском облигаций со встроенной офертой погашения в Украине.

Таблица 3.2 Схема обращения первого выпуска облигаций ЗАО «АВК»

Дата	*Действие*
25.07.2002	Начало размещения
23.10.2002	Выплата 1-го купона (20% годовых)
10.01.2003	Объявление ставки по 3-му и 4-му купонам (ставки по 3-му и 4-му купонам равны между собой и не могут быть меньше 90-дневной ставки *KIBOR* - 5%)
21.01.2003	Выплата 2-го купона (20% годовых); Первый досрочный выкуп (по номинальной стоимости)
21.04.2003	Выплата 3-го купона
09.07.2003	Объявление ставки по 5-му и 6-му купонам (равны между собой, не меньше *KIBOR* - 5%)
20.07.2003	Выплата 4-го купона; 2-й досрочный выкуп (по номиналу)
20.10.2003	Выплата 5-го купона
16.01.2004	Выплата 6-го купона и погашение

...

Доходность дисконтных облигаций

Расчет доходности дисконтных облигаций существенно проще по сравнению с купонными. Однако следует принимать во внимание особенности и правила, существующие на различных рынках. Наиболее распространенными показателями доходности в отношении дисконтных облигаций являются *номинальная* (или *простая*) ставка доходности, *эффективная* доходность и *ставка дисконта*.

Пусть, как и прежде, N - номинал облигации, P - текущая рыночная цена, t - время (количество лет) до погашения, рассчитываемое по формуле $t = T / T_y$, где T - количество дней до погашения, T_y - количество дней в году. Номинальная (простая) доходность y_n есть годовая ставка, рассчитанная без учета эффекта реинвестирования, т.е. из соотношений

$$P = \frac{N}{1 + y_n t}, \; y_n = \left(\frac{N}{P} - 1 \right) \frac{1}{t}. \tag{3.21}$$

По отношению к краткосрочным инструментам (большинство дисконтных облигаций является именно краткосрочными) часто считается нецелесообразным учитывать эффект сложных процентов в расчете доходности и данный метод расчета является в целом наиболее распространенным для представления рыночной информации (в частности, для котировок). Тем не менее, такой подход не дает возможности адекватно сравнивать доходность облигаций с различным сроком. Поэтому более точным показателем для целей анализа следует считать эффективную доходность. Эффективная доходность дисконтной облигации y_e рассчитывается как

$$P = \frac{N}{(1 + y_e)^t}, \; y_e = \left(\frac{N}{P} \right)^{1/t}. \tag{3.22}$$

Величина y_e, полученная из (3.22) является эффективной ставкой с годовым (дискретным) сложным процентом. Напомним, что для сравнения доходности к погашению различных облигаций (например, купонных и дисконтных), расчет должен производиться исходя из одной и той же периодичности начисления процентов.

Ставка дисконта является еще одним популярным методом расчета доходности для дисконтных инструментов. Ставка дисконта y_d есть величина дисконта на единицу номинальной стоимости, приведенная к годовому измерению, т.е.

$$P = N(1 - y_d t), \; y_d = \left(1 - \frac{P}{N} \right) \frac{1}{t}. \tag{3.23}$$

Ставка дисконта очень часто используется по отношению к векселям. На многих рынках это стандартный рыночный метод расчета доходности для краткосрочных долговых ценных бумаг (например, в США так рассчитывают доходность векселей Казначейства).

Длительность промежутков времени

Способ определения длительности промежутков времени играет существенную роль в расчетах. Так как условия долговых соглашений и параметры выпуска долговых ценных бумаг часто выражают в процентах годовых (проценты по кредитам, купонные ставки по облигациям), а размер выплаты зависит от длительности промежутка времени, способ расчета непосредственно влияет на размер дохода, получаемого инвестором. Способ расчета времени также важен при вычислении размера накопленного купонного дохода. Кроме того, для финансового рынка очень важно, чтобы все участники использовали одинаковые подходы в расчетах цен и ставок доходности, т.к. в противном случае неизбежна путаница и, как следствие - неэффективность функционирования рынка.

Общепринятой рыночной практикой можно считать являются следующие правила:

1) стандартный промежуток времени - один год, соответственно, все ставки выражаются в процентах годовых;
2) время считается непрерывным (с точностью до одного дня);
3) сложный процент, если он учитывается, как правило, дискретный;
4) размер платежа по долговому обязательству обычно рассчитывается как $C = i \times \tau \times N$, где i - объявленная номинальная ставка (например, ставка по кредиту или депозиту, купонная ставка по облигации, и т.п.), N - основная сумма долга (номинальная стоимость долгового обязательства) или *условный номинал* - для производных инструментов, τ - рассчитанная в соответствии с принятыми на рынке правилами и выраженная в годовом измерении *длительность промежутка времени*, за который выплачивается процент;
5) количество лет между моментами (датами) D_1 и D_2, определяется обычно как $\tau = T / T_y$, где T - количество *дней* между D_1 и D_2, T_y - количество *дней в году*.

Различия в правилах расчета промежутков времени проявляются в том, как рассчитывается количество дней между двумя датами и каким считается количество дней в году. Наиболее распространенными методами являются следующие:

1) *Действительное/365*. Один из наиболее простых способов расчета:

$$\tau = \frac{D_2 - D_1}{365}.$$

Данный метод используется на абсолютном большинстве рынков стран бывшего Советского Союза.

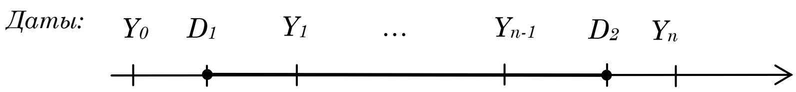
2) *Действительное/360*. Полностью аналогичен предыдущему методу, с единственным исключением - количество дней в году считается равным 360:

$$\tau = \frac{D_2 - D_1}{360}.$$

3) *Действительное/действительное*. Метод учитывает существование високосных лет (включающих 366 дней). Формула для расчета может быть представлена как:

$$\tau = n - 2 + \frac{Y_1 - D_1}{Y_1 - Y_0} + \frac{D_2 - Y_{n-1}}{Y_n - Y_{n-1}},$$

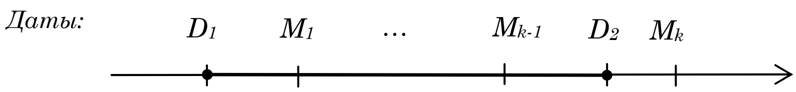
где n - количество календарных лет в рассматриваемом периоде (включая год начала и год конца периода, если даты D_1 и D_2 принадлежат одному году, то $n = 1$), Y_1 - последний день первого года, Y_0 - последний день редыдущего года, Y_{n-1} - последний день предпоследнего года, Y_n - последний день последнего года периода:



4) *30/360*. Количество дней во всех месяцах считается равным 30, количество дней в году, соответственно, - 360. Длительность промежутка времени между датами D_1 и D_2 равна:

$$\tau = \frac{(k-2)}{12} + \frac{M_1 - D_1}{360} + \frac{D_2 - M_{k-1}}{360},$$

где k - количество месяцев, которые охватывает рассматриваемый период времени, M_1 - последний день месяца. в котором находится начало периода (дата D_1), M_{k-1} - последний день месяца, предшествующего месяцу, в котором находится конец периода (дата D_2).



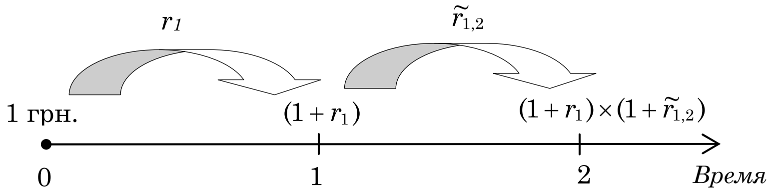
Существуют небольшие различия между европейским (*30E/360*) и американским методом *30/360* в части того - как поступают, если начало или/и конец периода приходится на 31-е число, или если в месяце 28 или 29 дней.

Подчеркнем, что все сказанное относится именно к *принятым рыночным правилам* (т.е. расчетам для целей составления финансовых соглашений, расчета котировок, расчета объема процентных выплат, накопленных процентов, и т.д.)

Реализованная доходность

Доходность к погашению, рассчитанная как эффективная ставка (с учетом доходов от реинвестирования), равна фактической доходности, получаемой инвестором, только при определенных условиях. Во-первых, если процентные ставки со временем меняются - изменяются и условия реинвестирования промежуточных платежей. Во-вторых, горизонт инвестора может не совпадать со сроком погашения инструмента: если горизонт более длинный, чем срок погашения – средства будут реинвестированы по (сегодня неизвестным) будущим процентным ставкам, в противном случае (горизонт меньше срока погашения) – инструмент будет продан по цене, которая также зависит от значений будущих процентных ставок.

Реализованной доходностью (или *доходностью к горизонту*) называют фактическую доходность, получаемую инвестором от вложений в определенный инструмент, рассчитанную исходя из *определенного планового горизонта* и *явного прогноза будущих процентных ставок*. Например, если спот-ставка сроком один период равна r_1, а плановый горизонт инвестора – 2 периода, инвестирование 1 грн. по ставке r_1, принесет через 2 периода совокупный доход $(1+r_1)\times(1+\tilde{r}_{1,2})$ грн., где $\tilde{r}_{1,2}$ - будущая (неизвестная сегодня) ставка спот:



Доходность инвестиций в расчете за один период составит в этом случае:

$$h = \left[(1+r_1)(1+\tilde{r}_{1,2})\right]^{1/2} - 1 .$$

Если $r_1 = 10\%$, а прогнозируемая величина будущей ставки $\tilde{r}_{1,2} = 15\%$, то $h = (1.10 \times 1.15)^{1/2} - 1 = 0.1247$ или 12.47% за период.

В общем случае, расчет реализованной доходности для определенного долгового обязательства предполагает следующие шаги:

1) Определить горизонт инвестирования (T);
2) Определить прогноз будущих значений процентных ставок;
3) Рассчитать *совокупный доход на дату горизонта*, который будет получен по данному инструменту (H_T);
4) Рассчитать доходность к горизонту по формуле

$$h_T = (H_T / P)^{1/T} - 1, \tag{3.24}$$

(P – текущая рыночная цена инструмента). Если требуется рассчитать доходность к горизонту с непрерывным сложным процентом, используется формула

$$\hbar_T = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{H_T}{P}\right). \tag{3.24'}$$

Пример 3.7 Расчет реализованной доходности

Воспользуемся данными из Примера 3.6 и рассчитаем реализованную доходность для облигаций серий 27001 и 27003. Сегодняшний день - 7 сентября 2001 г. Горизонт инвестора - 6 марта 2002 г. ($T = 0{,}4192$ лет). Параметры облигаций приведены в таблице

Даты платежей	*Время (лет)*	*27001*	*27003*
7.11.2001	t_1 = 0.1699	3,70	
5.12.2001	t_2 = 0.2466		3,70
6.02.2002	t_3 = 0.4192	103,70	
6.03.2002	t_4 = 0.4959		3,70
5.06.2002	t_5 = 0.7452		103,70
Валовая цена		101,78	100,87
Доходность к погашению		14,09%	14,42%

Как видно из таблицы, облигация 27003 погашается на 4 месяца позже чем 27001, и имеет небольшое преимущество перед последней по показателю доходности к погашению. Однако вследствие того. что горизонт инвестора не совпадает со сроками погашения облигаций, а промежуточные выплаты необходимо будет реинвестировать (по каким ставкам - неизвестно), фактическая доходность инвестора на дату горизонта может существенно отличаться от величины доходности к погашению.

Для расчета доходности к горизонту используем два варианта прогноза будущих процентных ставок. Первый - стабильность процентных ставок на уроне 15% годовых. Второй - снижение до 10%. Прогнозы такого рода, естественно, являются *упрощением*, т.к. в этом случае считается, что прогнозируемые уровни процентных ставок (15% либо 10%) установятся в ближайшем будущем и останутся неизменными на протяжении всего периода до даты горизонта, кроме того, не принимается по внимание разница в процентных ставках для различных сроков погашения. В отличие от такого подхода, *детализированный* прогноз может описывать динамику процентных ставок по различным срокам погашения на протяжении всего планового периода. Выбор похода к прогнозированию всегда является компромиссом между простотой и более высокой точностью расчетов.

Нами выбран наиболее простой подход к прогнозированию - каждый сценарий характеризуется единственным значением процентной ставки (обозначим ее $\tilde{r}$) - по этой ставке будут реинвестированы доходы и эта же ставка будет использована в качестве ставки дисконтирования при расчете рыночной цены в случае продажи облигаций.

Доход на дату горизонта по облигации 27001 состоит из выплаты при погашении (момент погашения совпадает с датой горизонта), купонного платежа и дохода от реинвестирования этой выплаты

$$103{,}7 + 3{,}7 \times (1+\tilde{r})^{T-t_1}.$$

Доход по облигации 27003 состоит из купонного платежа (5 декабря 2001 г.), дохода от реинвестирования купона и дохода от продажи облигации

$$3{,}7 \times (1+\tilde{r})^{T-t_2} + \frac{3{,}7}{(1+\tilde{r})^{t_4-T}} + \frac{103{,}7}{(1+\tilde{r})^{t_5-T}}.$$

И в одном, и в другом случае не принимались во внимание возможные налоговые платежи - тогда как на практике необходимо учитывать налоговые последствия каждой операции.

Результаты расчетов для двух вариантов сценария приведены в таблице

Сценарии	*27001*	*27003*
Стабильность процентных ставок (15%)		
Доход на дату горизонта	107,53	106,53
Реализованная доходность	14,01%	13,91%
Снижение процентных ставок (10%)		
Доход на дату горизонта	107,49	107,96
Реализованная доходность	13,90%	17,60%

Как видим, в случае стабильности процентных ставок облигации принесут инвестору практически равную доходность (разница всего в 10 базисных пунктов в пользу серии 27001). Но в случае снижения ставок, за счет того, что цена продажи облигации 27003 вырастет, ее реализованная доходность будет существенно выше. Поэтому, если инвестор считает вероятным именно такой сценарий, ему следует предпочесть облигации серии 27003. В то же время, в пользу облигаций серии 27001 говорит то, что доходность по ним почти не реагирует на изменение процентных ставок - они меньше подвержены риску колебаний процентных ставок и, тем самым, более предпочтительны для инвестора, не полагающегося на прогнозы и считающего равно возможным как рост, так и снижение рыночных ставок.

Форвардные ставки

Форвардной ставкой называют такое значение ставки спот в будущем, при которой реализованная доходность краткосрочных и долгосрочных инвестиций одинакова. Пусть r_1 - рыночная спот-ставка сроком 1 период, r_2 - соответственно, 2 периода. Форвардной ставкой $f_{1,2}$ является число, удовлетворяющее условию

$$(1+r_1)(1+f_{1,2}) = (1+r_2)^2,$$

откуда

$$f_{1,2} = \frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} - 1.$$

Обозначение $f_{1,2}$ читается как «форвардная ставка между первым и вторым периодами». В общем случае, если $r_1, r_2, \ldots, r_t, \ldots, r_T$ - текущие спот-ставки, форвардная ставка между моментами t и T вычисляется по формуле

$$f_{t,T} = \left[\frac{(1+r_T)^T}{(1+r_t)^t}\right]^{1/(T-t)} - 1\,, \tag{3.25}$$

или, что то же самое:

$$f_{t,T} = (p_t / p_T)^{1/(T-t)} - 1\,. \tag{3.25'}$$

В дискретном времени, если речь идет о форвардной ставке сроком один период, второй индекс для упрощения записи будем опускать, считая, что $f_{1,2} \equiv f_1$, $f_{2,3} \equiv f_2$ и т.д. Кроме того, по определению можно считать, что $r_1 \equiv f_0$. Используя эти обозначения, приведем еще одно выражение, связывающее форвардные и спот-ставки:

$$R_T \equiv (1+r_T)^T = \prod_{t=0}^{T-1}(1+f_t)\,, \tag{3.26}$$

Последнее выражение означает, что ставка спот является геометрическим средним форвардных ставок.

Форвардные ставки могут служить ориентиром при выборе между краткосрочными и долгосрочными инвестициями. Если прогнозируемое в будущем значение процентной ставки заведомо меньше форвардной ставки, более эффективными для инвестора с точки зрения доходности являются относительно более долгосрочные вложения, и наоборот - если прогнозируемая спот-ставка выше форвардной - более доходными являются краткосрочные вложения. Использование форвардных ставок при анализе вариантов инвестиций иллюстрируется Примером 3.8.

Пример 3.8 Расчет форвардных ставок

Вернемся к примеру 3.1, в котором на основании рыночной информации были рассчитаны спот-ставки сроком один, два и три периода: $r_1 = 11{,}11\%$, $r_2 = 20{,}31\%$, $r_3 = 27{,}01\%$. На основании этой информации рассчитаем форвардные ставки

$$f_{0,1} \equiv r_1 = 11{,}11\%\,,$$

$$f_{1,2} = (1+0{,}2031)^2/(1+0{,}1111) - 1 = 30{,}27\%\,,$$

$$f_{2,3} = (1+0{,}2701)^3/(1+0{,}2031)^2 - 1 = 41{,}55\%\,,$$

$$f_{1,3} = ((1+0.2701)^3/(1+0{,}1111))^{1/2} - 1 = 35{,}79\%\,.$$

Интерпретировать эту информацию можно следующим образом: если необходимо сделать выбор между инвестированием в на срок один или два периода, и если инвестор уверен, что будущая (через один период) спот-ставка сроком один период не превысит форвардной ставки (в нашем случае - 30,27%), то более доходными являются вложения на срок два периода. Аналогичные рассуждения справедливы, если необходимо выбрать между инвестициями сроком два и три периода - последние принесут инвестору больший доход в случае если будущая ставка не превысит значения форвардной (41,55%).

Форвардные ставки с непрерывным сложным процентом

Обозначим как $\varphi_{t,T}$ форвардную ставку с непрерывным сложным процентом. По определению $\varphi_{t,T} \equiv \ln(1 + f_{t,T})$. Подставляя (3.25'), получим:

$$\varphi_{t,T} = -\frac{\ln p_T - \ln p_t}{T - t}. \tag{3.27}$$

Мгновенную форвардную ставку (при $T \to t$) будем обозначать φ_t. В непрерывном времени форвардную ставку φ_t, как и спот-ставки x_t и цены p_t можно трактовать как непрерывные функции времени погашения t, т.е.:

$$x_t = x(t), \ p_t = p(t), \ \varphi_t = \varphi(t).$$

Правая часть выражения (3.27) с обратным знаком при $T \to t$ является производной функции $\ln p(t)$ по времени погашения:

$$\varphi(t) = -\frac{d \ln p(t)}{dt} = -\frac{1}{p(t)} \frac{dp(t)}{dt}. \tag{3.28}$$

Таким образом, форвардную ставку можно интерпретировать как эластичность изменения цены простой дисконтной облигации (коэффициента дисконтирования) по времени. Проинтегрировав последнее выражение на участке от 0 до t, получим:

$$\int_0^t \varphi(s)ds = -\ln p(t), \text{ откуда } p(t) = \exp\left(-\int_0^t \varphi(s)ds\right), \tag{3.29}$$

что, по существу, является аналогом соотношения (3.26) для случая непрерывного сложного процента:

$$x(t) = (1/t)\int_0^t \varphi(s)ds, \tag{3.30}$$

- т.е. ставка спот, как и в выражении (3.26), - это *среднее значение форвардных ставок*.

Наконец, подставляя в (3.28) вместо цены простой дисконтной облигации ее выражение $p(t) = e^{-x_t \cdot t}$, получим еще одну формулу для мгновенной форвардной ставки:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{p(t)}\frac{de^{-x(t)t}}{dt} = x(t) + t\frac{dx(t)}{dt}, \qquad (3.31)$$

т.е. соответствующая моменту t мгновенная форвардная ставка может быть представлена как сумма спот-ставки сроком t и производной спот-ставки по времени погашения, умноженной на время t. Из выражения (3.31) следует, что если спот-ставки растут при увеличении срока погашения (производная $dx(t)/dt$ положительна), форвардные ставки превышают ставки спот ($\varphi(t) > x(t)$), и наоборот - если спот-ставки с более длительным сроком меньше краткосрочных, получим $\varphi(t) < x(t)$.

IV. Структура процентных ставок во времени

Кривые доходности

Кривой доходности называют взаимосвязь между процентными ставками и сроком погашения долговых обязательств. В зависимости от того, какие именно процентные ставки используются при построении кривой доходности различают *кривую спот-ставок*, *форвардную кривую* и собственно *кривую доходности* (*yield curve*). В соответствии с названиями, кривая спот-ставок – это зависимость текущих рыночных ставок спот от времени, форвардная кривая отражает временную структуру краткосрочных форвардных ставок. Кривая доходности – есть зависимость доходности к погашению облигаций одного кредитного класса от срока погашения. Естественно, несмотря на различие отображаемых показателей, все типы кривых связаны между собой и характеризуют *структуру процентных ставок во времени*. Для описания временной структуры стоимости денег во времени часто используют также *кривую цен* простых дисконтных облигаций.

Формы кривых доходности могут быть различными. Если долгосрочные ставки превышают краткосрочные, говорят о *возрастающей* или *нормальной* кривой доходности. Равенство процентных ставок с различным временем погашения означает *плоскую* кривую доходности. Кривую доходности, в которой долгосрочные ставки меньше краткосрочных называют *обратной*. Часто кривые доходности имеют более сложную форму: например когда процентные ставки при увеличении срока вначале возрастают, а затем снижаются.

На Рис. 4.1 изображена *кривая доходности к погашению* рынка государственных обязательств Российской Федерации на 7.09.2001 г. (по данным из примера 3.2). Кривая доходности к погашению имеет ограниченную практическую ценность - она просто отражает временную структуру доходности для конкретного набора инструментов (каждый инструмент - со своей специфической структурой выплат).

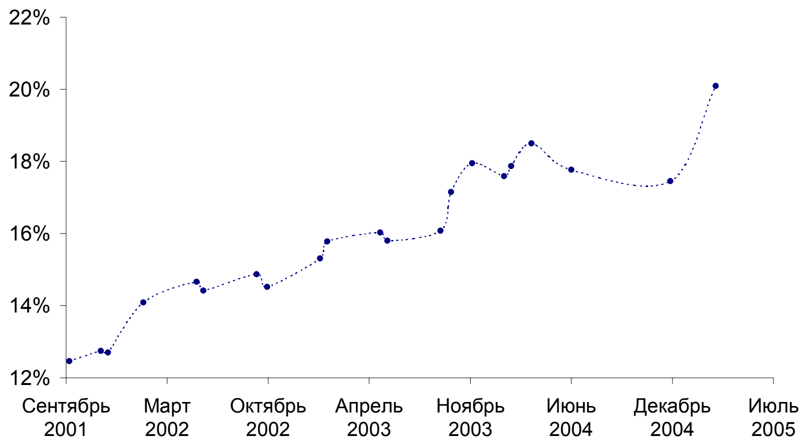


Рис. 4.1 Кривая доходности к погашению обязательств правительства Российской Федерации на 7 сентября 2001 г. (данные - см. Пример 3.2). Годовые эффективные ставки с годовым сложным процентом.

Различные инструменты, даже принадлежа к одному кредитному классу (например – безрисковые государственные обязательства), могут различаться по степени ликвидности. Часто наиболее активна торговля по только что размещенным облигациям (*on-the-run*), в то время как инструменты, выпущенные относительно давно, могут быть менее ликвидны. Это приводит к тому, что доходность более ранних выпусков (*off-the-run*) превышает доходность недавно размещенных бумаг на определенную величину – премию ликвидности[1]. В результате, при использовании информации обо всех торгуемых инструментах, на протяжении кривой доходности будут присутствовать колебания в ту или другую сторону, вызванные не различиями стоимости денег во времени, а разным качеством инструментов в глазах инвесторов. Поэтому одним из основных правил при построении кривых доходности на основании рыночной информации является исполь-

[1] Игра на разнице доходности облигаций *on-the-run* и *off-the-run* лежала в основе стратегии печально известного хедж-фонда Long Term Capital Management (LTCM). Сама по себе, данная стратегия продемонстрировала свою эффективность – основными причинами краха фонда стали, скорее, недооценка риска, чрезвычайно высокая степень ливериджа (соотношение собственных и заемных средств) и кризис на мировых финансовых рынках в 1997 – 98 гг.

зование данных о *наиболее ликвидных* финансовых инструментах и сегментах рынка[2].

Кривые спот-ставок являются ключевым инструментом оценки долговых обязательств. Сами по себе рыночные данные о ценах долговых инструментов не содержат полной информации о временной структуре - тем самым необходима определенная процедура *оценивания кривой доходности*.

Расчет спот ставок по ценам рыночных инструментов

Сложностью при построении кривой доходности является то, что большая часть реальных инструментов характеризуется не единственным (как в случае простой дисконтной облигации), а несколькими денежными потоками. Пусть есть информация о K инструментах с фиксированным доходом, P_k - цена k-го инструмента ($k=1,2,\ldots,K$), C_{ki} - выплата по k-му инструменту в момент времени t_i. Рассматриваются все моменты времени, в которые возникают выплаты хотя бы по одному инструменту, всего $n+1$ моментов времени: $t_0=0,t_1,\ldots,t_n=T$. Задачей является определение оценок значений коэффициентов дисконтирования $\hat{p}(t_i)$ для каждого момента времени, чтобы цены, рассчитанные с использованием этих коэффициентов

$$\hat{P}_k=\sum_{i=1}^{n}\hat{p}(t_i)C_{ik}\,, \tag{4.1}$$

как можно более точно соответствовали фактическим рыночным ценам P_k. Если количество рассматриваемых моментов времени равно количеству инструментов ($n=K$, т.е. отдельные выплаты по различным инструментам происходят в одни и те же моменты времени - как в примере 3.1 предыдущей главы), коэффициенты дисконтирования, соответствующие фактическим рыночным ценам могут быть определены точно. Обозначим: $\hat{\mathbf{p}}=\{\hat{p}(t_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ - вектор искомых коэффициентов дисконтирования, $\boldsymbol{P}=\{P_k\}_{k=1,\ldots,K}$ - вектор фактических рыночных цен, $\boldsymbol{C}=\{C_{ik}\}_{i=1,\ldots n}^{k=1,\ldots,K}$ - матрицу выплат. Тогда вектор $\hat{\mathbf{p}}$ является решением системы линейных уравнений

$$\mathbf{P}=\mathbf{C}\hat{\mathbf{p}}\,, \tag{4.2}$$

т.е. при $n=K$ матрица $\boldsymbol{C}$ является квадратной, и если существует обратная матрица $\boldsymbol{C}^{-1}$, что подразумевает линейную независимость потоков платежей по отдельным инструментам, получим:

[2] По этой причине рассматриваемые ниже примеры построения кривых доходности носят скорее иллюстративный характер - скажем, вторичный рынок ГКО-ОФЗ, данные которого использованы в нескольких примерах, нельзя считать достачтоно ликвидным (по крайней мере на тот момент, который рассматривается - вторая половина 2001 г.).

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{P} .$$

Естественно, что случай $n = K$ является скорее теоретическим. Если $n < K$ решение системы (4.2) может не существовать и возможна лишь приблизительная оценка вектора $\hat{\mathbf{p}}$. Возможное решение - выбрать $\hat{\mathbf{p}}$ методом наименьших квадратов: таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений оценочных («теоретических») значений цен инструментов от фактических рыночных цен была бы минимальной, т.е необходимо найти решение задачи

$$\min_{\hat{\mathbf{p}}} \sum_{k=1}^{K} (P_k - \hat{P}_k)^2 \tag{4.3}$$

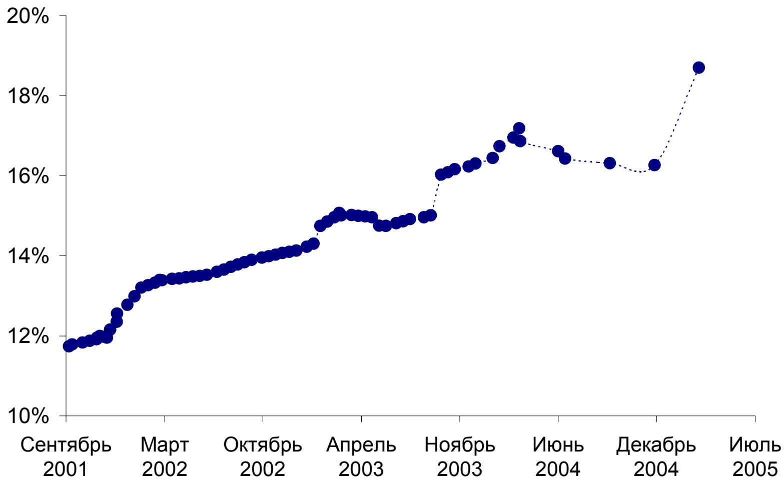


Рис. 4.2. Кривая спот-ставок (с непрерывным сложным процентом), рассчитанных как решение задачи (4.4), (4.2) по ценам обязательств правительства Российской Федерации на 7 сентября 2001 г. (данные Примера 3.7).

Если $n < K$, т.е количество моментов времени, в которые возникают выплаты, превышает количество рассматриваемых инструментов, система (4.2) может иметь множество решений. Из этого множества естественно выбрать такие значения $\hat{p}(t_i)$, которые обеспечивают наибольшую степень гладкости кривой спот-ставок, т.е., например, выбирать $\hat{p}(t_i)$ из условия

$$\min_{\hat{\mathbf{p}}} \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{x}(t_{i+1}) - \hat{x}(t_i))^2 , \tag{4.4}$$

где $\hat{x}(t_i) = -(1/t_i)\ln \hat{p}(t_i)$. Значения спот ставок, определенные как решение задачи (4.4), (4.2) по данным рынка государственных обязательств Российской Федерации (пример 3.7 предыдущей главы), приведены на рис. 4.2. Коэффициенты дисконтирования $\hat{p}(t_i)$ в данном случае *точно* соответствуют фактическим ценам, т.е. для всех k выполняется $P_k = \hat{P}_k$.

Рассмотренный способ расчета коэффициентов дисконтирования обладает рядом недостатков. Во-первых, в качестве результата получены только отдельные значения, соответствующие датам выплат по присутствующим на рынке инструментам. Вопрос о значениях ставок *между* этими датами - т.е. о *кривой* коэффициентов дисконтирования (и кривой спот-ставок) *в целом*, остается открытым. Во-вторых, полученные оценки являются *неустойчивыми*: изменения в наборе рыночных инструментов, использующихся в расчете, существенно меняют их значения. В-третьих, отклонения рыночных цен, вызванные наличием спредов и различной ликвидностью инструментов, приводит к негладкой форме кривой: вдоль кривой возможны резкие отклонения ставок в одну или другую сторону, что в целом противоречит рациональным представлениям о временной структуре процентных ставок. Избежать этих недостатков если не полностью, то в значительной степени, позволяют процедуры *сглаживания кривой доходности*.

Сглаживание кривой доходности

Процедура сглаживания в общем случае сводится к следующему. В первую очередь, необходимо определить аналитический вид функции коэффициентов дисконтирования $p(t) = \delta(t, \boldsymbol{\lambda})$ (*или* функции спот-ставок $x(t) = \chi(t, \boldsymbol{\lambda})$), с помощью которой будет моделироваться временная структура. Аналитический вид определяется исходя из требуемых свойств кривой доходности и/или определенных теоретических соображений. Вектор $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_j\}_{j=1,\dots,m}$ - это *параметры*, от которых зависит функция и которые необходимо оценить. Оценки параметров (вектор $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$) должны быть такими, чтобы «теоретические» цены инструментов максимально точно соответствовали наблюдаемым. Простейший способ в данном случае - метод наименьших квадратов, т.е. решение задачи

$$\min_{\hat{\lambda}} \sum_{k=1}^{K} (P_k - \hat{P}_k)^2 , \tag{4.5}$$

где

$$\hat{P}_k = \sum_{i=1}^{n} \delta(t_i, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) C_{ik} \text{ или } \hat{P}_k = \sum_{i=1}^{n} e^{-\chi(t_i, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) t_i} C_{ik} . \tag{4.6}$$

Вид функций и параметры $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ должны быть такими, чтобы $\hat{p}(0)=1$ (коэффициент дисконтирования для *сегодняшнего* денежного потока равен единице, т.е. одна сегодняшняя гривна должна стоить одну гривну). На вектор параметров $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ могут накладываться и другие ограничения, связанные, например, с требованием непрерывности и дифференцируемости функции $\delta(t,\hat{\boldsymbol{\lambda}})$ (или $\chi(t,\hat{\boldsymbol{\lambda}})$). Пусть *все* ограничения на параметры могут быть представлены в линейном виде с помощью соответствующим образом определенных матрицы $\boldsymbol{U}=\{u_{lj}\}_{l=1,\dots,L}^{j=1,\dots,m}$ и вектора $\boldsymbol{q}=\{q_l\}_{l=1,\dots,L}$ (L - общее количество ограничений, накладываемых на параметры)

$$\mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{q}.$$

Кроме того, пусть возможно определить матрицу $\boldsymbol{V}=\{v_{kj}\}_{k=1,\dots,K}^{j=1,\dots,m}$ размерности $K\times m$ таким образом, что $\mathbf{V}\hat{\boldsymbol{\lambda}}\equiv\hat{\mathbf{P}}$. В результате получим, что вектор $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ определяется из обычной модели множественной линейной регрессии с ограничениями, т.е. как решение задачи

$$\min_{\hat{\lambda}}(\mathbf{P}-\mathbf{V}\hat{\boldsymbol{\lambda}})'(\mathbf{P}-\mathbf{V}\hat{\boldsymbol{\lambda}}),\ \text{при условии}\ \mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{q}. \tag{4.7}$$

Явное решение задачи (4.7), полученное методом множителей Лагранжа, - известная формула, приводимая большинством учебников по Эконометрике

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}=\hat{\boldsymbol{\lambda}}_u-(\mathbf{V}'\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}'[\mathbf{U}(\mathbf{V}'\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}']^{-1}(\mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\lambda}}_u-\mathbf{q}), \tag{4.8}$$

где $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_u$ - оценки метода наименьших квадратов без ограничений

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_u=(\mathbf{V}'\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{P}. \tag{4.9}$$

Сглаживание с помощью обобщенного метода наименьших квадратов

Применение обычного метода наименьших квадратов для оценивания параметров функций $\delta(t,\hat{\boldsymbol{\lambda}})$ и $\chi(t,\hat{\boldsymbol{\lambda}})$, как правило, неэффективно вследствие предположения об одинаковой величине дисперсии остатков $(P_k-\hat{P}_k)$, в то время как колебания цен для инструментов с более длинными сроками погашения будут большими по сравнению с краткосрочными. Другими словами - краткосрочные ставки (коэффициенты дисконтирования) оказывают влияние на стоимость как краткосрочных, так и долгосрочных инструментов, поэтому оценка краткосрочных ставок нуждается в большей степени точности. Тем самым требуется применение *обобщенного метода наименьших квадратов*, допускающего различные значения дисперсии остатков (гетероскедастичность), т.е

$$Var[P_k - \hat{P}_k] = \sigma^2 \omega_k^2 .$$

Естественным выбором в отношении весов ω_k является увязывание их с *чувствительностью* цены k-го инструмента к изменению процентных ставок. Например (ср. Фонг и Васичек (1982) [ ]), веса могут определяться как $\omega_k = dP_k / dy_k$, где P_k и y_k - соответственно цена и доходность к погашению k-го инструмента.

Обозначим через $\boldsymbol{W}$ диагональную матрицу, диагональ которой содержит квадраты весовых коэффициентов

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_1^2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & w_K^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда оценки обобщенного метода наименьших квадратов с ограничениями на параметры могут быть записаны как

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_u - (\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}'[\mathbf{U}(\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{U}']^{-1}(\mathbf{U}\hat{\boldsymbol{\lambda}}_u - \mathbf{q}), \tag{4.10}$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_u = (\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{P}. \tag{4.11}$$

Кубические сплайны

Использование *кубических сплайнов* - один из наиболее распространенных методов сглаживания кривой доходности, т.к. он обеспечивает достаточную точность и одновременно непрерывность производных первого и второго порядка. Использование полиномов более высокого порядка дает лучшую точность, но получаемые кривые доходности могут иметь чрезмерно сложную форму и быть слишком чувствительными к изменениям исходных данных.

В случае использования сплайнов, оцениваемая функция определяется кусочно. Во-первых, необходимо определить количество и продолжительность интервалов времени, для каждого из которых будут оцениваться свои значения параметров. Однозначных правил здесь не существует. Количество так называемых *узловых точек* (точек на оси времени, где одна функция сменяется другой) должно быть достаточным, чтобы обеспечить необходимый уровень точности оценки (в качестве критериев могут выступать, например, максимальное абсолютное отклонение «теоретической» цены от фактической или сумма квадратов отклонений), но, в то же время не должно быть *слишком* большим, обеспечивая гладкость кривой доходности.

Пусть выбрано $S+1$ узловых точек, соответствующих моментам времени $\tau_0 = 0, \tau_1, \ldots, \tau_S$. Кривая коэффициентов дисконтирования $\delta(t, \boldsymbol{\lambda})$ определяется как

$$\delta(t, \boldsymbol{\lambda}) = \delta_s(t, \boldsymbol{\lambda}),\ t \in \left[\tau_{i-1}, \tau_i\right),\ s = 1,2,\ldots,S \tag{4.12}$$

Функции[3] $\delta_s(t)$ (и $\delta(t)$ в целом) должны быть непрерывными и, как минимум, дважды дифференцируемы, для чего, в частности, в узловых точках должны выполняться условия

$$\delta_s(\tau_s) = \delta_{s+1}(\tau_s),\ s = 1,2,\ldots,S-1, \tag{4.13}$$

$$\frac{d\delta_s(\tau_s)}{dt} = \frac{d\delta_{s+1}(\tau_s)}{dt},\ s = 1,2,\ldots,S-1, \tag{4.14}$$

$$\frac{d^2\delta_s(\tau_s)}{dt^2} = \frac{d^2\delta_{s+1}(\tau_s)}{dt^2},\ s = 1,2,\ldots,S-1. \tag{4.15}$$

Кроме того, коэффициент дисконтирования для сегодняшнего дня ($\tau = 0$) должен равняться единице

$$\delta_1(\tau_0) \equiv \delta_1(0) = 1. \tag{4.16}$$

Если в качестве функций $\delta_s(t)$ используются полиномы третьей степени

$$\delta_s(t) = a_s + b_s t + c_s t^2 + d_s t^3,\ s = 1,2,\ldots,S, \tag{4.17}$$

ограничения (4.13) - (4.15) запишутся

$$a_s + b_s\tau_s + c_s\tau_s^2 + d_s\tau_s^3 = a_{s+1} + b_{s+1}\tau_s + c_{s+1}\tau_s^2 + d_{s+1}\tau_s^3,\ s = 1,2,\ldots,S-1, \tag{4.13'}$$

$$b_s + 2c_s\tau_s + 3d_s\tau_s^2 = b_{s+1} + 2c_{s+1}\tau_s + 3d_{s+1}\tau_s^2,\ s = 1,2,\ldots,S-1, \tag{4.14'}$$

$$2c_s + 6d_s\tau_s = 2c_{s+1} + 6d_{s+1}\tau_s,\ s = 1,2,\ldots,S-1, \tag{4.15'}$$

Условие (4.16) в данном случае означает $a_1 = 1$. Кроме того, если известна краткосрочная ставка x_0, естественно потребовать, чтобы оценка краткосрочной ставки равнялась ее фактическому значению. Принимая во внимание, что $x_0 = \varphi(0)$, где $\varphi(t)$ - мгновенная форвардная ставка, а также тот факт, что $\varphi(t) = -(1/p(t))(dp(t)/dt)$ (см. выражение (3.20) в предыдущей главе), для функции $\delta_1(t)$ при $t = 0$ и $p(0) = 1$ получим

---

[3] Зависимость оцениваемых функций от вектора параметров λ в дальнейшем, для сокращения записи, будем опускать.

$$x_0 = \varphi(0) = -\frac{1}{p(0)}(b_1 + 2c_1 t + 3d_1 t^2) = -b_1 .$$

Тем самым, если известна краткосрочная ставка - известно и значение параметра $b_1 = -x_0$. В целом, вектор оцениваемых параметров может быть представлен как

$$\boldsymbol{\lambda} = (c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots, a_S, b_S, c_S, d_S)' ,$$

т.е. всего оценивается $4S-2$ параметров, при этом общее количество ограничений, накладываемых на параметры (условия (4.13') - (4.15')) равно $3(S-1)$.

Сократить количество параметров, и одновременно - избавиться от накладываемых на параметры ограничений, можно используя обобщенную формулу для кубического сплайна (см. напр. Джеймс и Уэббер (2001) [ ]):

$$\delta(t) = \sum_{i=0}^{3} \widetilde{a}_i t^i + \sum_{s=1}^{S-1} \widetilde{b}_s (t-\tau_s)_+^3 , \tag{4.18}$$

где $(t-\tau_s)_+ = \max(0, t-\tau_s)$. Если представить $\delta(t)$ в виде (4.12), то функции $\delta_s(t)$ запишутся:

$$\begin{aligned} &\delta_1(t) = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 t + \widetilde{a}_2 t^3 + \widetilde{a}_3 t^3, \qquad t \in [0, \tau_1), \\ &\delta_{s+1}(t) = \sum_{i=0}^{3} \widetilde{a}_i t^i + \sum_{j=s}^{S-1} \widetilde{b}_j (t-\tau_j)^3, \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1}), \quad s = 1, \ldots, S-1. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Несложно заметить, что ограничения (4.13) - (4.15) (равенство значений $\delta_s(t)$, а также их первых и вторых производных в узловых точках) для данных функций выполняются независимо от значений параметров: фактически, (4.19) получено простой подстановкой ограничений (4.13') - (4.15') в выражение (4.17). Если, как и ранее, считать $\delta(0) = \widetilde{a}_0 = 1$ и $\widetilde{a}_1 = -x_0$, количество оцениваемых параметров сокращается до $S+1$, вектор параметров можно представить как:

$$\boldsymbol{\lambda} = (\widetilde{a}_2, \widetilde{a}_3, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{S-1})' ,$$

причем дополнительные ограничения на $\boldsymbol{\lambda}$ не накладываются. Оценки вектора $\boldsymbol{\lambda}$ определяются как решение задачи безусловной оптимизации:

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} (\widetilde{\mathbf{P}} - \mathbf{V}\hat{\boldsymbol{\lambda}})'(\widetilde{\mathbf{P}} - \mathbf{V}\hat{\boldsymbol{\lambda}}) , \tag{4.20}$$

где:

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \{\widetilde{P}_k\}_{k=1,\ldots,K} ,\ \widetilde{P}_k = P_k - \widetilde{a}_0 \sum_{i=1}^{n} C_{ik} - \widetilde{a}_1 \sum_{i=1}^{n} t_i C_{ik} = P_k - \sum_{i=1}^{n} C_{ik} + x(0) \sum_{i=1}^{n} t_i C_{ik} ,$$

(P_k как и прежде - фактические цены инструментов, C_{ik} - платежи по k-му инструменту в моменты t_i). Матрицу $\boldsymbol{V}$, используя (4.6) и (4.18) можно представить как:

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_{i1} t_i^2 & \sum_{i=1}^{n} C_{i1} t_i^3 & \sum_{i=1}^{n} C_{i1} (t_i - \tau_1)_+^3 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} C_{i1} (t_i - \tau_{S-1})_+^3 \\ \ldots & & & \ddots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} C_{iK} t_i^2 & \sum_{i=1}^{n} C_{iK} t_i^3 & \sum_{i=1}^{n} C_{iK} (t_i - \tau_1)_+^3 & \ldots & \sum_{i=1}^{n} C_{iK} (t_i - \tau_{S-1})_+^3 \end{bmatrix}.$$

Решением (4.20) является вектор:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{V}'\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}'\widetilde{\mathbf{P}} . \tag{4.21}$$

Если используются весовые коэффициенты w_k, оценки метода наименьших квадратов будут равны соответственно:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}'\mathbf{W}^{-1}\widetilde{\mathbf{P}} . \tag{4.22}$$

Пример 4.1 Сглаживание кривой доходности с помощью кубических сплайнов

Рассмотрим сглаживание кривой доходности на примере данных по рынку государственных облигаций РФ за 7.09.2001. Прежде всего необходимо определить матрицу платежей $\boldsymbol{C}$, *фрагмент* которой приведен в таблице 4.1:

Таблица 4.1 Матрица платежей по ОФЗ-ПД и ОФЗ-ФК на 7.09.2001 (фрагмент)

Время t (лет), всего 80 моментов времени (строк)	Инструменты, всего 18 облигаций (столбцов)							
	21150	21152	25023	26002	26003	27015	27014	27001
0.014			114					
0.033							3.068	
0.090								
0.129								
0.167								3.7
0.170						4.033		
0.186	100							
0.205								
0.225		100						
0.244								
0.279								
0.282							3.989	

0.340			
0.378			
0.416		3.452	103.7

Выберем 6 узловых точек ($S = 5$) $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 0{,}25$, $\tau_2 = 0{,}5$, $\tau_3 = 1$, $\tau_4 = 2$, $\tau_5 = 3{,}521$ (время в годах, 3,521 лет - это срок погашение наиболее динной облигации в рассматриваемой выборке). Данные по цене, доходности, продолжительности, а также некоторые другие необходимые расчетные показатели, приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 Сглаживание кубическими сплайнами (промежуточные расчеты)

Инструмент (код облигации)	Цена, P_k	Доходность (годовой сложный процент)	Доходность (непрерывный сложный процент)	Дюрация Маколея (лет)	ΣC_{ik}	$\Sigma C_{ik} t_i$	$\Sigma C_{ik} t_i^2$	$\Sigma C_{ik} t_i^3$
21150	97.79	12.74%	12.00%	0.1863	100.0	18.6	3.5	0.6
21152	97.35	12.70%	11.95%	0.2247	100.0	22.5	5.0	1.1
25023	113.82	12.46%	11.74%	0.0137	114.0	1.6	0.0	0.0
26002	88.62	18.49%	16.96%	2.2261	130.0	297.6	724.6	1797.8
26003	80.72	20.09%	18.30%	2.9162	140.0	432.8	1452.6	4996.3
27015	94.38	17.87%	16.44%	2.0460	132.9	281.4	647.8	1526.2
27014	94.33	17.45%	16.09%	2.5831	145.0	398.7	1230.6	3910.5
27001	101.78	14.09%	13.18%	0.4076	107.4	43.8	18.1	7.5
27003	100.87	14.42%	13.47%	0.7162	111.1	79.7	58.3	42.9
27004	105.19	14.87%	13.87%	0.9335	119.8	112.9	113.6	115.8
27006	100.18	15.31%	14.25%	1.2484	119.8	151.2	201.9	273.8
27007	99.11	15.78%	14.66%	1.2864	119.8	155.8	213.7	297.8
27008	97.29	16.03%	14.87%	1.5272	122.3	189.6	311.7	521.7
27009	97.03	15.80%	14.67%	1.5658	122.3	194.3	326.4	558.4
27010	100.14	16.08%	14.91%	1.7126	129.8	229.1	446.7	888.8
27013	92.61	17.77%	16.36%	2.2975	135.9	324.7	844.4	2252.4
27011	95.40	17.15%	15.83%	1.7964	127.3	235.2	472.0	966.7
28001	93.06	17.59%	16.21%	2.0169	129.8	270.9	616.4	1433.8

В качестве оценки краткосрочной ставки возьмем доходность инструмента с наиболее близким сроком погашения (облигация 25023, погашаемая 12.09.2001 г.): $x_0 = 11{,}74\%$.

Оценки параметров кубических сплайнов, полученные с помощью обычного метода наименьших квадратов (формула (4.21)), приведены в таблице:

$\widetilde{a}_2$	$\widetilde{a}_3$	$\widetilde{b}_1$	$\widetilde{b}_2$	$\widetilde{b}_3$	$\widetilde{b}_4$
-0.3528	0.0925	0.7582	-0.5394	0.1714	-0.0616

Оценки обобщенного метода наименьших квадратов (формула (4.22)), в качестве весов использованы показатели дюрации Маколея) составляют:

$\widetilde{a}_2$	$\widetilde{a}_3$	$\widetilde{b}_1$	$\widetilde{b}_2$	$\widetilde{b}_3$	$\widetilde{b}_4$
-0.1319	0.0222	0.2991	-0.2177	0.0640	-0.0180

Кривые доходности, полученные в результате сглаживания, приведены на Рис. 4.3. Очевидно, что применение обычного метода наименьших квадратов дает неудовлетворительные результаты с точки зрения гладкости полученной кривой - изменчивость ставок, в особенности для сроков менее одного года является слишком большой. В то же время, обобщенный метод наименьших квадратов дает существенно более гладкую кривую доходности при незначительном снижении точности оценок фактических рыночных цен (сумма квадратов отклонений равна 13,31 против 12,05 для обычного МНК)

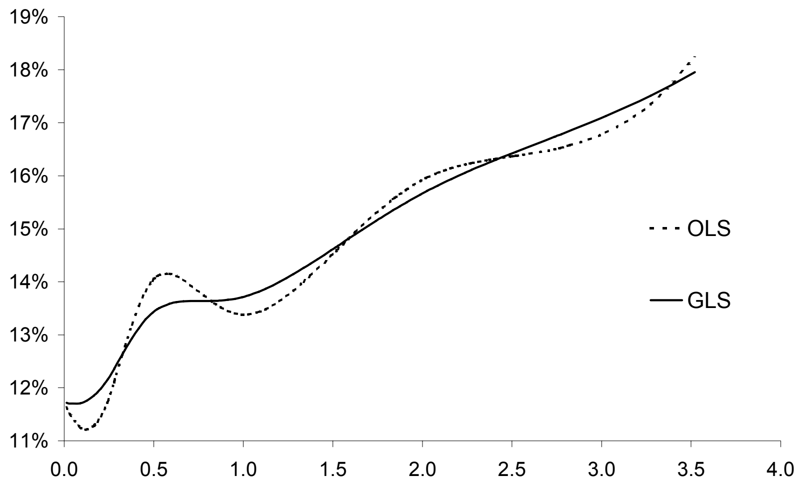


Рис. 4.3 Кривые доходности по данным рынка ГКО-ОФЗ на 7 сентября 2001 г. (спот-ставки с непрерывным сложным процентом), аппроксимированные с помощью *кубических сплайнов*. Приведены варианты, полученные с помощью обычного (OLS) и обобщенного (GLS) метода наименьших квадратов (в качестве весовых коэффициентов использованы показатели дюрации Маколея). Очевидно, что оценки OLS не обеспечивают достаточной гладкости кривой и неприемлемы по сравнению с оценками GLS.

B-сплайны

Методом, свободным от недостатков кубических сплайнов (в частности, неограниченности функций $\delta_s(t)$), является сглаживание *B-сплайнами*. Функция $\delta(t)$ представляется как линейная комбинация *B*-сплайнов $\delta_s(t)$:

$$\delta(t) = \sum_{s=-2}^{S} \lambda_s \delta_s(t) \,, \tag{4.23}$$

где λ_s ($s = -2,-1,0,1,\ldots,S$) - параметры, которые необходимо оценить (всего $S+3$ параметров),

$$\delta_s(t) = \sum_{i=s-1}^{s+3} b_{si}(t-\tau_i)_+^3 \,, \; s = -2,-1,0,1,\ldots,S \,, \tag{4.24}$$

$$b_{si} = \prod_{\substack{j=s-1 \\ j\neq i}}^{s+3} \frac{1}{\tau_j - \tau_i}.$$

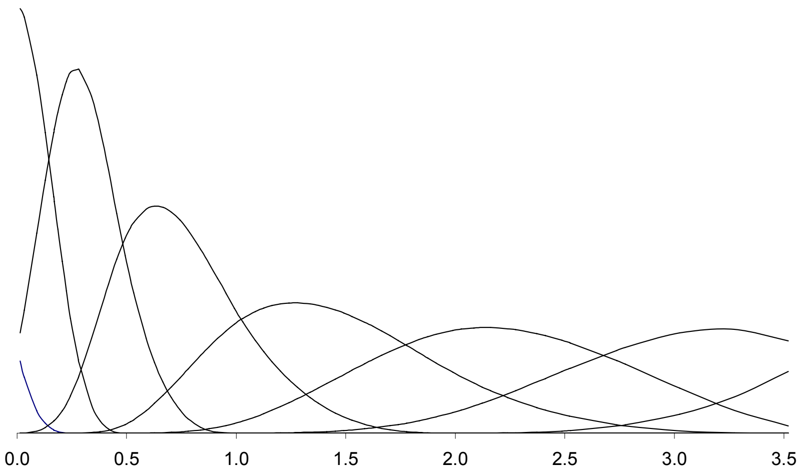
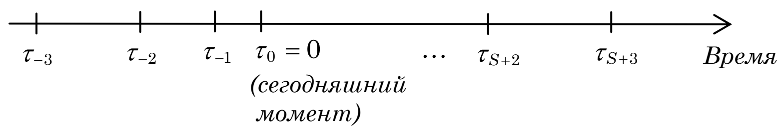


Рис. 4.4 B-сплайны (формула (4.24)) для узловых точек –1, –0,5, –0,25, 0, 0,25, 1, 2, 3,521, 4, 5, 6.

Для расчета *B*-сплайнов, помимо выбранных узловых точек $\tau_0 = 0, \tau_1, \ldots, \tau_S$, необходимо определить 6 «фиктивных» узлов: отрицательные $\tau_{-3}, \tau_{-2}, \tau_{-1}$ (*слева* от оцениваемого интервала времени) и $\tau_{S+1}, \tau_{S+2}, \tau_{S+3}$ - за границей горизонта τ_S



Как и в случае кубических сплайнов, потребуем, чтобы коэффициент дисконтирования для сегодняшнего момента времени ($t = 0$) равнялся единице

$$\begin{aligned}\delta(0) &= \lambda_{-2}\delta_{-2}(0) + \lambda_{-1}\delta_{-1}(0) + \lambda_0\delta_0(0)\\ &= \lambda_{-2}\left(b_{-2,-3}(-\tau_{-3})^3 + b_{-2,-2}(-\tau_{-2})^3 + b_{-2,-1}(-\tau_{-1})^3\right)+\\ &\quad + \lambda_{-1}\left(b_{-1,-2}(-\tau_{-2})^3 + b_{-1,-1}(-\tau_{-1})^3\right)+\\ &\quad + \lambda_0 b_{0,-1}(-\tau_{-1})^3\\ &= 1.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Кроме того, мгновенная ставка в модели должна равняться фактической краткосрочной ставке x_0

$$-\frac{1}{\delta(t)}\frac{d\delta(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = x_0\,,$$

т.е.

$$\begin{aligned}-x_0 &= \lambda_{-2}\frac{d\delta_{-2}}{dt}\bigg|_{t=0} + \lambda_{-1}\frac{d\delta_{-1}}{dt}\bigg|_{t=0} + \lambda_0\frac{d\delta_0}{dt}\bigg|_{t=0}\\ &= 3\Big[\lambda_{-2}\left(b_{-2,-3}(-\tau_{-3})^2 + b_{-2,-2}(-\tau_{-2})^2 + b_{-2,-1}(-\tau_{-1})^2\right)+\\ &\quad + \lambda_{-1}\left(b_{-1,-2}(-\tau_{-2})^2 + b_{-1,-1}(-\tau_{-1})^2\right)+\\ &\quad + \lambda_0 b_{0,-1}(-\tau_{-1})^2\Big].\end{aligned} \tag{4.26}$$

Оценка параметров B-сплайна может, как и ранее, осуществляться методом наименьших квадратов. Определим матрицу $\boldsymbol{V}$ размерности $K \times (S+3)$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} C_{i1}\delta_{-2}(t_i) & \sum_{i=1}^{n} C_{i1}\delta_{-1}(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^{n} C_{i1}\delta_{S}(t_i)\\ \dots & & \ddots & \dots\\ \sum_{i=1}^{n} C_{iK}\delta_{-2}(t_i) & \sum_{i=1}^{n} C_{iK}\delta_{-1}(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^{n} C_{iK}\delta_{S}(t_i)\end{bmatrix},$$

или

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}',$$

где $\boldsymbol{B} = \{\delta_s(t_i)\}_{i=1,\dots,n}^{s=-2,\dots,S}$. Для введения в модель ограничений (4.25), (4.26) определим матрицу $\boldsymbol{U}$ размерности $2 \times (S+3)$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \delta_{-2}(0) & \delta_{-1}(0) & \delta_0(0) & 0 & \dots & 0\\ \frac{d\delta_{-2}}{dt}\Big|_{t=0} & \frac{d\delta_{-1}}{dt}\Big|_{t=0} & \frac{d\delta_0}{dt}\Big|_{t=0} & 0 & \dots & 0\end{bmatrix},$$

и вектор $\boldsymbol{q} = (1, \quad -x(0))'$. Оценки

$$\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_{-2}, \hat{\lambda}_{-1}, \ldots, \hat{\lambda}_S)' ,$$

рассчитываются в соответствии с формулой (4.8) для обычного метода наименьших квадратов, или (4.10) - в случае использования весов, причем еще раз подчеркнем, что последний подход более оправдан.

Пример 4.2 Сглаживание кривых доходности с помощью *B*-сплайнов

Для иллюстрации использования *B*-сплайнов, используем те же данные, что и в примере 4.1 (цены на рынке ГКО-ОФЗ на 7 сентября 2001 г.) В качестве узловых точек выберем
$\tau_{-3} = -1$, $\tau_{-2} = -0{,}5$, $\tau_{-1} = -0{,}25$ $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 0{,}25$, $\tau_2 = 0{,}5$, $\tau_3 = 1$, $\tau_4 = 2$, $\tau_5 = 3{,}521$, $\tau_6 = 4$, $\tau_7 = 5$, $\tau_8 = 6$. *B*-сплайны для данного множества узловых точек изображены на Рис. 4.4. Оценки параметров λ_s приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 Параметры *B*-сплайнов (рынок ГКО-ОФЗ на 7.09.2001)

s	Обобщенный МНК с ограничениями (4.25), (4.26)	Обобщенный МНК без ограничений	Обычный МНК
-2	1.2880	1.2927	1.3599
-1	0.9995	0.9986	0.9863
0	1.2146	1.2150	1.2231
1	1.8427	1.8423	1.8254
2	2.7972	2.7978	2.8382
3	2.4486	2.4479	2.3804
4	2.3175	2.3184	2.4220
5	1.7728	1.7711	1.5703

Соответствующие кривые доходности приведены на Рис. 4.5. Рисунок, в частности, иллюстрирует принципиальную важность использования весовых коэффициентов (обобщенного МНК) и включения в модель ограничений - в противном случае форма кривой доходности является неудовлетворительной из-за слишком больших колебаний ставок для коротких сроков погашения. Отметим также, что кривая доходности, построенная с использованием оценок обобщенного МНК с ограничениями, для моделей обычных кубических сплайнов и *B*-сплайнов, практически идентична.

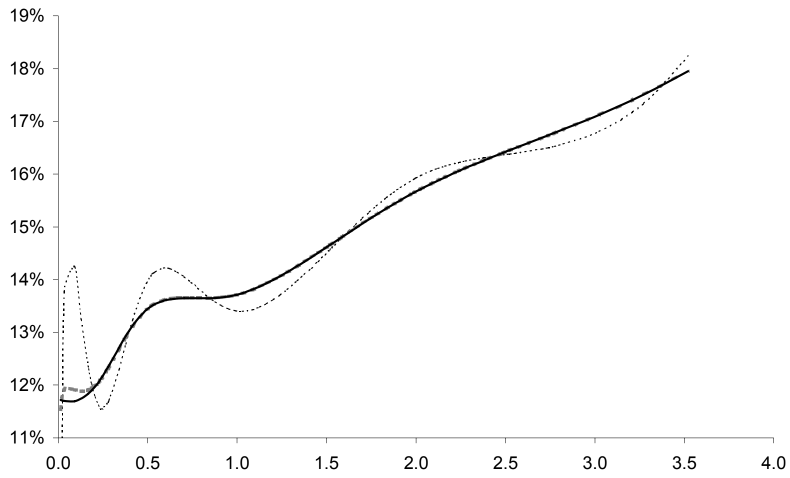


Рис. 4.5 Кривая спот-ставок рынка ГКО-ОФЗ на 7.09.2001 г., построенная с использованием B-сплайнов (сплошная линия). Штриховыми линиями показаны кривые, соответствующие моделям без ограничений и весовых коэффициентов.

Экспоненциальные сплайны

Экспоненциальный сплайн, предложенный Фонгом и Васичеком (1982) [ ], может быть представлен как

$$\delta(t) = \delta_s(t)\,,\ t \in \left[\tau_{i-1}, \tau_i\right),\ s = 1,2,\ldots,S\,,\ \delta_s(t) = a_s + b_s e^{-t\xi} + c_s e^{-2t\xi} + d_s e^{-3t\xi}\,. \quad (4.27)$$

Количество параметров равно $4S+1$

$$\boldsymbol{\lambda} = (a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots, a_S, b_S, c_S, d_S, \xi)'\,.$$

Как и прежде, должны выполняться ограничения (4.13) - (4.16). Подстановка данных ограничений в формулу сплайна сокращает количество оцениваемых параметров. Отличием от полиномиальных сплайнов является необходимость использования процедур нелинейной оптимизации при оценке параметров, в то время как точность оценки и форма кривой доходносии существенно не улучшаются.

Альтернативные критерии

Ключевым недостатком метода наименьших квадратов при сглаживании кривой доходности является то, что он, обеспечивая максимально возможную точность оценки выбранного набора инструментов, не гарантирует достаточной *гладкости* кривой. Поэтому более целесообразным может быть выбор параметров функции $\delta(t,\boldsymbol{\lambda})$, обеспечивающий *максимальную* гладкость, например, используя критерий:

$$\max_{\hat{\lambda}} \int_0^T \left(\frac{d^2\delta(t,\hat{\boldsymbol{\lambda}})}{dt^2} \right)^2 dt . \tag{4.28}$$

При этом должна обеспечиваться точность оценок, т.е. требуется, чтобы сумма квадратов отклонений не превышала определенного значения:

$$(\mathbf{P}-\hat{\mathbf{P}})'(\mathbf{P}-\hat{\mathbf{P}}) < \varepsilon . \tag{4.29}$$

Обсуждение других критериев гладкости см., например, в работах Адамса и Девентера (1994) [ ], Диркса (1995) [ ], Андерсона и др. (1996) [ ], Джеймс и Веббера (2001) [ ].

Сглаживание кривых спот-ставок и форвардных кривых

Выше обсуждалось, в основном, сглаживание кривой цен дисконтных облигаций $\delta(t)$. Совершенно аналогично могут сглаживаться кривая спот-ставок $\chi(t)$ и форвардная кривая $\varphi(t)$. Отличием, при использовании метода наименьших квадратов, будет нелинейность зависимости цен инструментов от оцениваемых параметров, и соответственно, - необходимость использования методов нелинейной регрессии.

Кривые $\chi(t)$ или $\varphi(t)$ (вместо $\delta(t)$) необходимо оценивать в случае, когда требуется, чтобы кривые доходности обладали определенными свойствами. Например (см. Девентер и Имаи (1997) [ ]), кубический сплайн кривой $\delta(t)$ гарантирует что она будет дважды дифференцируемой, но форвардная кривая:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\delta(t)}\frac{d\delta(t)}{dt},$$

будет иметь разрывную вторую производную:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{\delta}\frac{d^3\delta}{dt^3} + \frac{3}{\delta^2}\frac{d\delta}{dt}\frac{d^2\delta}{dt^2} - \frac{2}{\delta^3}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^3,$$

что, в частности, может не отвечать предположениям моделей процентных ставок (см. Главу 7).

Сглаживание форвардной кривой с использованием полиномиальных сплайнов четвертого порядка

Форвардная кривая с непрерывной второй производной, обеспечивающая одновременно максимальную гладкость, т.е. удовлетворяющая критерию:

$$\min\int_0^T\left(\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}\right)^2 dt\,,$$

является полиномиальным сплайном четвертого порядка (см. Адамс и Девентер (1994) [ ])

$$\varphi(t)=\varphi_s(t)\,,\ t\in\left[\tau_{i-1},\tau_i\right),\ s=1,2,\ldots,S\,,\ \varphi_s(t)=\sum_{j=0}^{4}a_{js}t^j\,, \tag{4.30}$$

причем должны выполняться условия равенства функций $\varphi_s(t)$ и их производных (до третьего порядка включительно) в узловых точках

$$\varphi_s(\tau_s)=\varphi_{s+1}(\tau_s)\,,\ s=1,2,\ldots,S-1\,, \tag{4.31}$$

$$\frac{d\varphi_s(\tau_s)}{dt}=\frac{d\varphi_{s+1}(\tau_s)}{dt}\,,\ s=1,2,\ldots,S-1\,, \tag{4.32}$$

$$\frac{d^2\varphi_s(\tau_s)}{dt^2}=\frac{d^2\varphi_{s+1}(\tau_s)}{dt^2}\,,\ s=1,2,\ldots,S-1\,, \tag{4.33}$$

$$\frac{d^3\varphi_s(\tau_s)}{dt^3}=\frac{d^3\varphi_{s+1}(\tau_s)}{dt^3}\,,\ s=1,2,\ldots,S-1\,. \tag{4.34}$$

Подставляя ограничения (4.31) - (4.34) в выражение (4.30) получим обобщенную формулу полиномиального сплайна четвертого порядка, сократив тем самым количество оцениваемых параметров с $5S$ до $S+4$

$$\varphi(t)=\sum_{j=0}^{4}\widetilde{a}_j t^j+\sum_{s=1}^{S-1}\widetilde{b}_s(t-\tau_s)_+^4\,. \tag{4.35}$$

Выразим кривую коэффициентов дисконтирования через форвардную кривую

$$\begin{aligned}\delta(t)&=\exp\left(-\int_0^t\varphi(z)dz\right)=\\&=\exp\left(-\sum_{j=0}^{4}\frac{\widetilde{a}_j}{j+1}t^{j+1}-\sum_{s=1}^{S-1}\frac{\widetilde{b}_s}{5}(t-\tau_s)_+^5\right).\end{aligned}$$

Условие $\delta(0)=1$ в данном случае выполняется автоматически. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы текущая краткосрочная ставка равнялась фактическому значению x_0

$$\varphi(0)=\tilde{a}_0=x_0\,.$$

Таким образом, необходимо оценить вектор из $S+3$ параметров

$$\lambda=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\tilde{a}_3,\tilde{a}_4,\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_{S-1})'\,,$$

для которого «теоретические» цены инструментов

$$\hat{P}_k=\sum_{i=1}^{n}\delta(t_i)C_{ki}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\exp\left(-\sum_{j=0}^{4}\frac{\tilde{a}_j}{j+1}(t_i)^{j+1}-\sum_{s=1}^{S-1}\frac{\tilde{b}_s}{5}(t_i-\tau_s)_+^5\right)C_{ki}\,,$$
$$k=1,\ldots,K,$$

наиболее точно сответствуют фактическим ценам P_k. Вследствие нелинейного характера взаимосвязей, решение данной задачи предполагает использование моделей нелинейной регрессии и, соответственно, - методов нелинейной оптимизации.

Рассмотрим *частный случай*, когда сглаживание форвардной кривой может быть сведено к *линейной* модели. Пусть рассматриваемый набор рыночных инструментов состоит исключительно из обязательств с *единственной* выплатой. Т.е. по каждому k-му инструменту ($k=1,\ldots,K$) с текущей рыночной ценой P_k, есть лишь одна выплата C_k, которая будет сделана через t_k лет. Тогда $p(t_k)=P_k/C_k$ - это *фактические* значения коэффициентов дисконтирования на срок t_k лет. *Оценки* коэффициентов дисконтирования $\hat{p}(t_k)$ определяются как

$$\ln\hat{p}(t_k)=-\sum_{j=0}^{4}\frac{\tilde{a}_j}{j+1}(t_k)^{j+1}-\sum_{s=1}^{S-1}\frac{\tilde{b}_s}{5}(t_k-\tau_s)_+^5\,,\ k=1,\ldots,K\,.$$

В качестве узловых точек выберем сроки погашения рассматриваемого набора инструментов, т.е. $S=K$, и $t_k=\tau_s$ при $s=k$. Параметры в этом случае можно выбрать таким образом, чтобы оценки коэффициентов дисконтирования в узловых точках *равнялись* фактическим значениям

$$\ln p(t_k)=\ln\hat{p}(t_k)\,,\ k=1,\ldots,K\,. \tag{4.36}$$

Чтобы свести оценку параметров к решению системы линейных уравнений, необходимо определить три дополнительных ограничения. Воспользуемся рекомендациями Девентера и Имаи (1997) [ ], введя ограничения обеспечивающие нулевой наклон форвардной кривой в крайней правой точке рассматриваемого интервала времени

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_K} = 0\,.$$

и линейный характер кривой в крайних точках интервала

$$\left.\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right|_{t=t_K} = 0\,.$$

В нашем случае данные условия означают соответственно

$$\sum_{j=1}^{4} \widetilde{a}_j j (t_K)^{j-1} + \sum_{s=1}^{S-1} 4\widetilde{b}_s (t_K - \tau_s)^3 = 0\,, \tag{4.37}$$

$$\sum_{j=2}^{4} \widetilde{a}_j j (j-1)(t_0)^{j-2} = 0\,, \text{ или, если } t_0 = 0\,,\ \widetilde{a}_2 = 0\,, \tag{4.38}$$

$$\sum_{j=2}^{4} \widetilde{a}_j j (j-1)(t_K)^{j-2} + \sum_{s=1}^{S-1} 12\widetilde{b}_s (t_K - \tau_s)^2 = 0\,. \tag{4.39}$$

Уравнения (4.36) вместе с (4.37) - (4.39) образуют систему из $K+3$ линейных уравнений с $K+3$ неизвестными (т.к. $S = K$), однозначно определяющую искомый вектор параметров. В Примере 4.3 данный подход использован для построения форвардной кривой по данным украинского рынка межбанковских кредитов. Данные рынка межбанковских кредитов используются здесь и далее (Примеры в этой главе и в главе 7) *исключительно в иллюстративных целях*, т.к. не являются достаточными для построения полноценной кривой доходности - фактически, речь идет лишь о сверхкраткосрочном (до трех месяцев) участке кривой.

Пример 4.3 Сглаживание форвардной кривой полиномиальным сплайном четвертого порядка (по данным киевского рынка межбанковских кредитов)

Для сглаживания кривой доходности используем данные по средним гривневым ставкам межбанковского кредитования (KIBOR) на 8 ноября 2001 г. Межбанковские кредиты будем считать инструментами с единственной выплатой (возврат суммы долга с процентами), что дает возможность непосредственного расчета спот-ставок и коэффициентов дисконтирования - таблица 4.4.

Таблица 4.4 Значения KIBOR на 8.11.2001

Срок (дней)	Значение KIBOR (номинальная ставка, процентов годовых)	Спот-ставка с непрерывным сложным процентом, процентов годовых	Коэффициент дисконтирования
1	18,0	18,00	0,9995
7	21,7	21,65	0,9959
14	24,7	24,58	0,9906
30	28,3	27,98	0,9773
60	28,5	27,85	0,9552
90	32,5	31,26	0,9258

Источник: газета «Бизнес»

В качестве краткосрочной ставки используем значение ставки по однодневному кредиту: $x_0 = 18{,}00\%$ годовых[4], определяя тем самым значение параметра $a_0 = x_0 = 18{,}00\%$. Решая систему (4.36) - (4.39), получим остальные параметры (таблица 4.5).

Таблица 4.5 Параметры полиномиального сплайна четвертого порядка для ставок KIBOR гна 8.11.2001

Параметр	Значение
$\widetilde{a}_1$	-0,59801
$\widetilde{a}_2$	$-4{,}71639\times10^{-12}$
$\widetilde{a}_3$	$2{,}10499\times10^{5}$
$\widetilde{a}_4$	$-2{,}33411\times10^{7}$
$\widetilde{b}_1$	$2{,}41765\times10^{7}$
$\widetilde{b}_2$	$-9{,}83693\times10^{5}$
$\widetilde{b}_3$	$1{,}6331\times10^{5}$
$\widetilde{b}_4$	$-1{,}93685\times10^{4}$
$\widetilde{b}_5$	$7{,}37748\times10^{3}$

Форвардная кривая, рассчитанная по формуле (4.35) и соответствующая ей кривая спот-ставок приведены на Рис. 4.6.

[4] В действительности использование ставки по кредитам овернайт для сглаживания кривой доходности, как правило, неоправданно и не рекомендуется специалистами, т.к. данная ставка формируется под действием большого числа *специфических* факторов (потребности в поддержании ликвидности, выполнение резервных требований, и т.п.) и поэтому необъективно отражает стоимость денег во времени. В данном примере мы используем ставку овернайт только в иллюстративных целях.

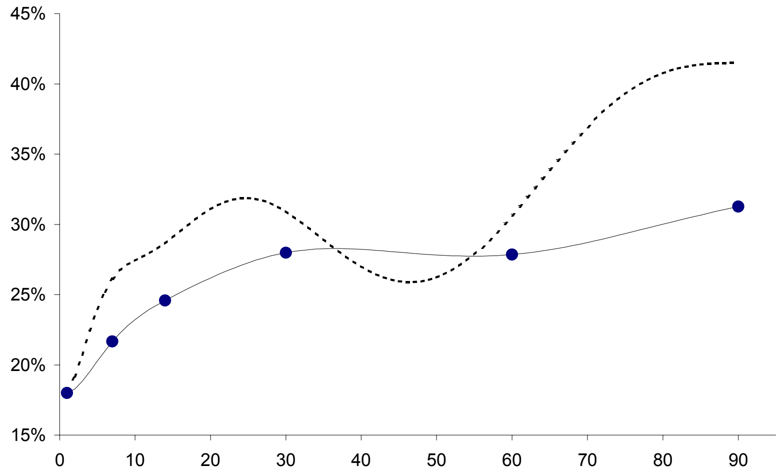


Рис. 4.6 Кривая спот-ставок (сплошная линия) и форвардная кривая (прерывистая линия) киевского рынка МБК на 8 ноября 2001 г. Сглаживание осуществлено с использованием полиномиального сплайна четвертого порядка, обеспечивающего наибольшую гладкость форвардной кривой. По горизонтали - время в днях. Точками обозначены фактические значения ставок.

Аппроксимация кривой доходности функциями Нельсона-Сигеля

Во многих случаях, при решении как теоретических, так и практических задач, сглаживание с использованием сплайнов оказывается слишком громоздким методом, перегруженным большим количеством параметров, не имеющих ясной экономической интерпретации. Другими словами, часто возникает задача аппроксимировать временную структуру процентных ставок с помощью одной, *простой по форме* функции, параметры которой имели бы определенный экономический смысл. Наиболее простой функцией такого типа можно считать форвардную кривую, предложенную Нельсоном и Сигелем (1985) [ ]

$$\varphi(t) = a_0 + (a_1 + a_2 t)e^{-bt}, \qquad (4.40)$$

где a_0, a_1, a_2, b - параметры. Кривая спот-ставок, соответствующая (4.40) может быть записана как

$$x(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)ds = a_0 + \left(a_1 + \frac{a_2}{b}\right)\frac{1-e^{-bt}}{bt} - \frac{a_2}{b}e^{-bt} \,. \qquad (4.41)$$

Параметры a_0 и a_1 имеют ясную экономическую интерпретацию. Исходя из того, что

$$a_0 + a_1 = \lim_{t\to 0} x(t), \;\; a_0 = \lim_{t\to\infty} x(t) \,,$$

величины $(a_0 + a_1)$ и a_0 представляют собой соответственно мгновенную ($t = 0$) и долгосрочную ($t \to \infty$) спот-ставки.

Кривая коэффициентов дисконтирования для модели Нельсона-Сигеля запишется как

$$\delta(t) = \exp\left(-a_0 t - \left(a_1 + \frac{a_2}{b}\right)\frac{1-e^{-bt}}{b} + \frac{a_2}{b}e^{-bt}t\right). \qquad (4.42)$$

Параметры, как и ранее, выбираются таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений «теоретических» цен, расчитанных с использованием коэффициентов (4.42), и фактических рыночных цен. Построение кривой Нельсона-Сигеля для киевского рынка МБК рассматривается в Примере 4.4.

Пример 4.4 Сглаживание с использованием кривой Нельсона-Сигеля

Воспользуемся данными по киевскому рынку МБК из примера 4.3. Параметры a_0, a_1, a_2, b выберем таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений фактических ставок спот от теоретических (формула (4.41)) была минимальной. Кроме того, необходимо, чтобы выполнялось ограничение $a_0 + a_1 = x_0$, где x_0 - фактическая краткосрочная спот-ставка (в нашем случае - 18,00% годовых). Методом наименьших квадратов получены следующие значения параметров:

Параметр	Значение
a_0	0,317519
a_1	-0,13756
a_2	-0,00022
b	36,48359

Графики кривой спот-ставок и форвардной кривой, соответствующие данным параметрам, приведены на Рис. 4.7. Отметим существенно *меньшую точность* аппроксимации по сравнению с использованием полиномиальных сплайнов (ср. Рис. 4.7 и 4.6). Это связано с тем, что кривая Нельсона-Сигеля лучше всего подходит для отображения «изгиба» в короткой части кривой, тогда как в рассматриваемом примере изгиб присутствует в правой части. Тем не менее, нельзя полностью отбрасывать данный метод прежде всего потому, что он дает более простую и интуитивно понятную форму форвардной кривой. Погоня за «абсолютной точностью» может быть не всегда оправданной. Более того, в данном примере «неточность» кривой Нельсона-Сигеля можно рассматривать как своего рода «сглаживание» неточностей рыночных данных. Еще одним достоинством данного подхода является оценка для «долгосрочной» спот-ставки ($a_0 = 31{,}75\%$ годовых, ставка с непрерывным сложным процентом), что может оказаться полезным для ряда практических задач.

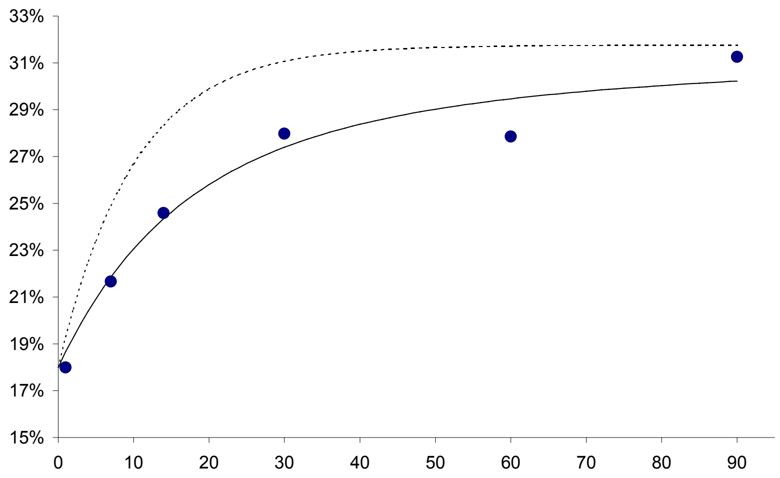


Рис. 4.7 Сглаживание кривой спот-ставок (сплошная линия) и форвардной кривой (прерывистая линия) киевского рынка МБК на 8 ноября 2001 г. с помощью функций Нельсона-Сигеля. Точками обозначены фактические значения спот-ставок.

Недостатком кривой Нельсона-Сигеля, является недостаточная точность, в частности, невозможность отобразить более чем один «изгиб» (локальный максимум или минимум) кривой доходности. Для более точной аппроксимации, можно использовать обобщения кривой Нельсона-Сигеля, простейшей из которых является *кривая Свенсона*, получаемая добавлением одного экспоненциального слагаемого

$$\varphi(t) = a_0 + (a_1 + a_2 t)\exp(-b_0 t) + a_3 t \exp(-b_1 t) .$$

Максимальной гибкостью (и тем самым - максимальной точностью аппроксимации) обладают форвардные *кривые Бъйорка и Кристенсена*, представляющие собой сумму $n+1$ слагаемых вида $a_i(t)\exp(-b_i t)$, где $a_i(t)$ - полином определенного порядка (как правило 0, 1, 2 или 3-го). Обратной стороной гибкости является большое количество оцениваемых параметров и громоздкость задачи нелинейной оптимизации, которую необходимо решать для оценки параметров методом наименьших квадратов.

Еще одним возможным подходом является выбор формы кривой доходности, в точности соответствующий определенной теоретической модели динамики процентных ставок. Например, в соответствии с классической моделью Васичека кривая спот-ставок определяется формулой

$$x(t) = x_\infty + (x_0 - x_\infty)\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha t} + \frac{\sigma^2}{4\alpha t}\left(\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right)^2, \tag{4.43}$$

где

$$x_\infty = \mu - \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2},$$

- представляет собой долгосрочную ставку (здесь μ - долгосрочное равновесное значение ставки x_0, σ - волатильность краткосрочной ставки, α - скорость возвратной тенденции к равновесному значению, λ - рыночная премия за риск; подробнее о параметрах модели Васичека см. Главу 7). Таким образом, чтобы построить спот-кривую, соответствующую модели Васичека, необходимо оценить три параметра (a_0, a_1, b) функции

$$x(t) = a_0 + (x_0 - a_0)\frac{1-e^{-bt}}{bt} + \frac{a_1}{4bt}\left(\frac{1-e^{-bt}}{b}\right)^2. \tag{4.44}$$

Преимуществом такого подхода является то, что все параметры имеют ясную экономическую интерпретацию: a_0 - долгосрочная ставка, a_1 - волатильность краткосрочной ставки - параметр, одновременно характеризующий кривизну спот-кривой, b - параметр, определяющий скорость «возвратной тенденции» краткосрочной ставки к равновесному значению.

Спред между краткосрочной и долгосрочной ставками можно рассматривать как дополнительный параметр и оценивать параметры (a_0, a_1, a_2, b) функции

$$x(t) = a_0 + a_2\frac{1-e^{-bt}}{bt} + \frac{a_1}{4bt}\left(\frac{1-e^{-bt}}{b}\right)^2, \tag{4.44'}$$

но такой подход несколько расходиться с моделью Васичека.

Выбор метода сглаживания в практических задачах

Ряд вопросов относительно сглаживания кривой доходности не имеет однозначно верных ответов - решение зависит от характера решаемой задачи и особенностей исходных рыночных данных.

Какую именно кривую необходимо сглаживать - кривую коэффициентов дисконтирования, спот-ставок или форвардную? Сглаживание *кривой коэффициентов дисконтирования* - наиболее простой с точки зрения практической реализации подход, т.к. решение сводится к линейной модели. В то же время, с точки зрения теории, более правильно сглаживать кривые *ставок доходности*, которые в теоретических моделях должны обладать определенными свойствами.

Какие формы кривых использовать? Если важна точность сглаживания - предпочтительней всего использовать кубические *B*-сплайны. Если, помимо точности, необходимо обеспечить гладкость форвардной кривой - используют полиномиальные сплайны четвертого порядка. В случае, когда требуется ясная содержательная интерпретация параметров, либо необходимо, чтобы оцениваемая кривая соответствовала определенной теории временной структуры процентных ставок, - оправданным выбором является кривая из семейства функций Бйорка-Кристенсена.

Какие методы оценки параметров наиболее предпочтительны? Так как точность аппроксимации в «краткосрочной» части кривых доходности предельно важны в абсолютном большинстве приложений, выбор обобщенного метода наименьших квадратов (когда весами выступают показатели дюрации) имеет существенные преимущества перед обычным МНК. В отдельных случаях оправданным может быть использование дополнительного критерия, обеспечивающего гладкость (подобного (4.28)).

Анализ главных компонент динамики временной структуры

Выше речь шла о *состоянии* структуры процентных ставок во времени, т.е. о *статике*. Но не менее, если не более важны закономерности *динамики* временной структуры. Анализ главных компонент - статистический метод, позволяющий выявить *общие факторы* в колебаниях процентных ставок с различным сроком.

Пусть рассматривается набор спот-ставок $x(t_i)$ для фиксированного набора сроков погашения $t_1, t_2, \dots, t_n$. Через Δx_i обозначим случайную величину - изменение ставки сроком t_i за единицу времени (например, день или неделю), $\boldsymbol{\Delta x} = \{\Delta x_i\}_{i=1,\dots n}$ - соответствующий случайный вектор, $\overline{\boldsymbol{\Delta x}} = \{\overline{\Delta x_i}\}_{i=1,\dots n}$ вектор средних значений (оцененных на основании массива наблюдений за случайными величинами Δx_i). Определим вектор $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\Delta x} - \overline{\boldsymbol{\Delta x}}$, средние значения элементов которого по построению равны нулю ($\overline{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{0}$). $\boldsymbol{V} = \{\sigma_{ij}\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$ - ковариационная матрица[5] вектора $\boldsymbol{\chi}$, $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(\chi_i, \chi_j)$.

Главные компоненты случайного вектора $\boldsymbol{\chi}$ - это набор взаимонезависимых (некоррелированных между собой) случайных величин y_i

[5] Естественно, как и в случае средних значений, речь идет не о действительных (неизвестных) значениях коэффициентов ковариации, а о статистических оценках, полученных из того же массива исторических наблюдений.

($i=1,\ldots,n$), являющиеся нормированными линейными комбинациями вектора $\boldsymbol{\chi}$

$$y_i = \boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\chi}\,, \tag{4.45}$$

причем векторы $\boldsymbol{c}_i$ выбраны таким образом, чтобы каждая последующая величина y_i (начиная с первой) имела максимальную возможную дисперсию. Нормирование означает, что векторы $\boldsymbol{c}_i$ удовлетворяют условию

$$\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{c}_i = 1\,. \tag{4.46}$$

Если считать (по построению), что $\mathbb{E}[\boldsymbol{\chi}]=0$, то из (4.45) следует, что $\mathbb{E}[y_i]=0$ для всех $i=1,\ldots,n$. Отсюда дисперсии величин y_i можно представить как

$$\mathrm{Var}(y_i) = \mathbb{E}[y_i^2] = \boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{V}\boldsymbol{c}_i \tag{4.47}$$

Поиск первой главной компоненты сводится к нахождению вектора $\boldsymbol{c}_1 \neq \boldsymbol{0}$, максимизирующего (4.47) при условии (4.46) ($i=1$). Необходимым условием оптимальности для данной задачи является

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{c}_1 = \lambda_1\boldsymbol{c}_1\,, \tag{4.48}$$

где λ_1 - множитель Лагранжа. Согласно выражению (4.48) λ_1 является собственным числом матрицы $\boldsymbol{V}$ (причем, *наибольшим* собственным числом), а $\boldsymbol{c}_1$ - соответствующий ему собственный вектор. Кроме того, из (4.48) следует, что $\lambda_1 = \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{V}\boldsymbol{c}_1$, т.е. λ_1 - это дисперсия первой главной компоненты.

Последующие главные компоненты выбираются аналогично[6], с добавлением условия ортогональности, обеспечивающего некоррелированность главных компонент. Так, при поиске *i*-й главной компоненты, дополнительными ограничениями будут

$$\boldsymbol{c}_{j-1}'\boldsymbol{c}_i = 0\,,\ \ j=1,\ldots,i-1\,. \tag{4.49}$$

Сумма собственных чисел λ_i, согласно известному свойству собственных чисел матрицы, равняется сумме чисел на главной диагонали матрицы $\boldsymbol{V}$, т.е. сумме дисперсий (полной дисперсии) случайного вектора $\boldsymbol{\chi}$. Тем самым, можно утверждать, что первая главная компонента объясняет долю полной дисперсии равную

$$\lambda_1 \Big/ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,,$$

а первые *k* компонент отвечают за

[6] Если матрица $\boldsymbol{V}$ является матрицей полного ранга, все собственные числа будут ненулевыми.

$$\sum_{j}^{k}\lambda_j \Big/ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j$$

процентов полной дисперсии.

Обозначим через $\boldsymbol{C} = \{c_{ij}\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$ матрицу, составленную из собственных векторов матрицы $\boldsymbol{V}$ (векторов-столбцов $\boldsymbol{c}_j$)

$\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{c}_n]$.

Так как собственные векторы взаимоортогональны ($\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{c}_j = 0, i \neq j$) и $\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{c}_i = 1$, имеем $\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}'$, т.е. вектор $\boldsymbol{\chi}$ можно представить как

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \tag{4.50}$$

где $\boldsymbol{y} = \{y_i\}_{i=1,\ldots,n}$ - вектор, состоящий из главных компонент, упорядоченных по величине дисперсии. Каждый элемент матрицы $\boldsymbol{C}$, c_{ij} - можно интерпретировать как *чувствительность* i-го элемента вектора $\boldsymbol{\chi}$ к j-й главной компоненте. Если элементы вектора $\boldsymbol{\chi}$ находятся под существенным влиянием небольшого числа общих факторов, т.е. первые k компонент ($k << n$) могут объяснять большую (скажем, 90% или более) долю полной дисперсии, и каждый элемент вектора $\boldsymbol{\chi}$ может быть представлен как

$$\chi_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} y_j + \varepsilon_i, \tag{4.51}$$

где ε_i - случайная ошибка (влияние остальных компонент), которой в определенных случаях можно пренебречь.

Использование ковариационной матрицы при поиске главных компонент обладает существенным недостатком - результат зависит от масштаба и единиц измерения исходных данных. Избавиться от такого влияния (что на практике предпочтительно) можно перейдя от ковариационной к корреляционной матрице. Для этого определим вектор $\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \{\tilde{\chi}_i\}_{i=1,\ldots,n}$, элементы которого равны $\tilde{\chi}_i = \chi_i / \sigma_i$ (здесь σ_i, как и ранее, - стандартное отклонение χ_i), и, тем самым, имеют единичные дисперсии. Ковариационная матрица вектора $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ - это одновременно корреляционная матрица вектора $\boldsymbol{\chi}$. Обозначим ее через $\boldsymbol{R} = \{\rho_{ij}\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$, где $\rho_{ij} = \mathrm{Corr}(\chi_i, \chi_j)$ - коэффициенты корреляции. Пусть $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n$ - собственные числа матрицы $\boldsymbol{R}$, расположенные в порядке убывания, $\tilde{\boldsymbol{c}}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) - соответствующие им собственные векторы, $\tilde{\boldsymbol{C}} = \{\tilde{c}_{ij}\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$ -матрица, состоящая из собственных векторов, $\tilde{\boldsymbol{y}} = \{\tilde{y}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ - главные компоненты вектора $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$. Так как элементы главной диагонали матрицы $\boldsymbol{R}$ равны единице, то

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = n,$$

соответственно, доля полной дисперсии случайного вектора $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$, объясняемая i-й главной компонентой, равна λ_i / n. Используя главные компоненты, элементы исходного вектора $\Delta \boldsymbol{x}$ (приросты спот-ставок в единицу времени) могут быть представлены как

$$\Delta x_i \cong \overline{\Delta x}_i + \sigma_i \sum_{j=1}^{k} \widetilde{c}_{ij} \widetilde{y}_j \ , \ i = 1, \ldots, n \ , \tag{4.52}$$

где $k < n$ выбрано таким образом, чтобы первые k главных компонент объясняли значительную (скажем, не менее 90%) долю полной дисперсии. Тем самым, достигается цель сокращения количество факторов, описывающих динамику кривой доходности (факторов риска).

Пример 4.5 иллюстрирует поиск главных компонент по данным киевского рынка межбанковских кредитов.

Пример 4.5 Анализ главных компонент динамики процентных ставок киевского рынка МБК

Для расчетов используем данные о ставках KIBOR за период с июня 1997 по ноябрь 2001 г. (см. Рис. 2.5 в Главе 2). Исходной информацией (наблюдения за вектором $\Delta \boldsymbol{x}$ в используемых выше обозначениях) являются недельные изменения ставок (в пересчете на непрерывный сложный процент) сроком 1 день, 1 неделя, 2 недели, 1, 2 и 3 месяца. Оценки коэффициентов корреляции (корреляционная матрица) по данным за весь период содержится в таблице 4.6.

Таблица 4.6 Коэффициенты корреляции ставок KIBOR

Срок	1 день	1 нед.	2 нед.	1 мес.	2 мес.	3 мес.
1 день	1					
1 нед.	0,978	1				
2 нед.	0,949	0,980	1			
1 мес.	0,866	0,919	0,958	1		
2 мес.	0,641	0,720	0,769	0,824	1	
3 мес.	0,560	0,642	0,698	0,765	0,958	1

Высокие значения коэффициентов корреляции неудивительны, т.к. использованы доступные данные по ставкам с очень близкими сроками. Это является признаком того, что первые 1-2 главные компоненты будут объяснять существенную долю колебаний. Результаты анализа главных компонент приведены в таблице 4.7.

Таблица 4.7 Анализ главных компонент киевского рынка МБК, 1997 - 2001

Компоненты	1	2	3	4	5	6
Собственное число	5,0904	0,7538	0,0916	0,0362	0,0181	0,0097
Доля полной дисперсии	84,84%	12,56%	1,53%	0,60%	0,30%	0,16%
Кумулятивная доля	84,84%	97,40%	98,93%	99,53%	99,84%	100%
Собственные векторы:						
1 день	0.9107	-0.3768	0.1477	0.0095	0.0764	0.0290
1 нед.	0.9540	-0.2804	0.0612	-0.0038	-0.0448	-0.0746

2 нед.	0.9740	-0.1957	-0.0502	0.0057	-0.0854	0.0572
1 мес.	0.9680	-0.0429	-0.2405	0.0123	0.0540	-0.0130
2 мес.	0.8828	0.4458	0.0410	-0.1425	0.0061	0.0035
3 мес.	0.8283	0.5426	0.0634	0.1248	-0.0016	-0.0018

Как видим, первая главная компонента объясняет около 85% колебаний процентных ставок, две первые - 97%. Значения элементов собственных векторов, определяющих чувствительность соответствующих процентных ставок к изменениям компонент, позволяют дать первым двум компонентам традиционную содержательную интерпретацию. Первая (относительно стабильные чувствительности) отвечает за общий *уровень* процентных ставок, вторая - за *наклон* кривой доходности. Значение третьей (традиционно интерпретируемой как *кривизна* кривой доходности) ничтожно мало по причине небольшого количества и коротких сроков анализируемых ставок. Собственно показатели чувствительности равны, в соответствии с (4.52) произведению элементов собственных векторов на стандартные отклонения приростов ставок (см. табл. 4.8 и Рис. 4.8).

Таблица 4.8 Чувствительность процентных ставок к главным компонентам

	Станд. отклон.	1	2	3
1 день	24.17%	0.2201	-0.0911	0.0357
1 нед.	18.72%	0.1786	-0.0525	0.0115
2 нед.	15.47%	0.1507	-0.0303	-0.0078
1 мес.	12.14%	0.1175	-0.0052	-0.0292
2 мес.	12.48%	0.1102	0.0556	0.0051
3 мес.	12.45%	0.1031	0.0675	0.0079

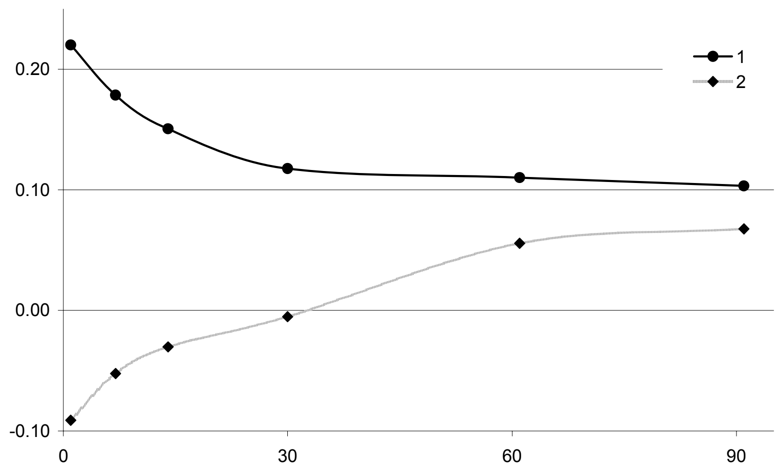


Рис. 4.8 Чувствительность процентных ставок киевского рынка МБК к первым двум главным компонентам.

V. Дюрация

Дюрация (*продолжительность*) является важнейшим показателем подверженности долгового инструмента влиянию риска процентной ставки. Дюрация широко используется в методах ограничения (хеджирования) данного риска. Существует несколько показателей дюрации, особенности которых рассматриваются в настоящей главе.

Дюрация как функция доходности к погашению

Пусть рассматривается инструмент с платежами $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в моменты времени 1,2, ..., n. Рыночная цена инструмента равна P. Цена может быть представлена как функция доходности к погашению y:

$$P(y) = \sum_{t=1}^{n} (1+y)^{-t} C_t$$

Дюрация в денежном выражении - это просто производная цены по доходности к погашению:

$$\frac{dP(y)}{dy} = -\sum_{t=1}^{n} t(1+y)^{-(t+1)} C_t \,, \tag{5.1}$$

она измеряет абсолютное изменение цены в ответ на изменение величины доходности к погашению. Данная зависимость является нелинейной. Соответственно, производная dP/dy, являясь тангенсом угла наклона касательной к функции $P(y)$ в данной точке, является *линейной аппроксимацией* зависимости цены P от доходности к погашению y (см. рис. 5.1). Дюрация в денежном выражении является отрицательной вследствие обратной зависимости цены от доходности.

Вариант формулы (5.1) для непрерывного времени аналогичен. Если платежи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ поступают в произвольные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, дюрация в денежном выражении рассчитывается как:

$$\frac{dP(y)}{dy} = \sum_{j=1}^{n} t_j (1+y)^{-(t_j+1)} C_j \,. \tag{5.1'}$$

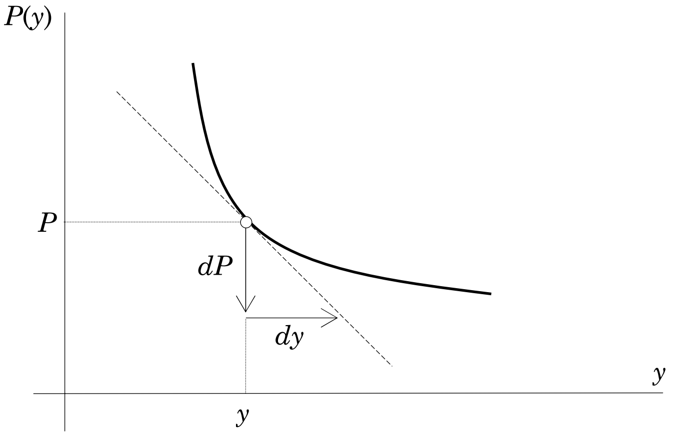


Рис. 5.1. Зависимость цены долгового обязательства от доходности к погашению. Дюрация в денежном выражении является тангенсом угла наклона касательной к кривой $P(y)$, т.е., другими словами, - линейной аппроксимацией изменения цены в ответ на изменение доходности.

Дюрацией Маколея (по имени Фредерика Маколея, впервые исследовавшего взаимосвязи цены и доходности и предложившено показатель дюрации) принято называть величину dP/dy с обратным знаком, умноженную на $(1+y)$ и деленную на цену P:

$$D = -\frac{dP}{dy}\frac{(1+y)}{P} = \sum_{j=1}^{n} t_j (1+y)^{-t_j} \frac{C_j}{P} \tag{5.2}$$

Величина D, определенная по формуле (5.2), имеет ясную содержательную интерпретацию: это взвешенный по дисконтированным объемам выплат *средний срок потока платежей* по данному инструменту (отсюда и название - продолжительность или дюрация). Одновременно, D - это взятая с обратным знаком *эластичность* цены по величине $(1+y)$.

Дюрация может использоваться для приближенной оценки относительного изменения цены в ответ на небольшие изменения доходности. Действительно, из соотношения (5.2) может быть получена приближенная формула:

$$\frac{\Delta P}{P} \cong \frac{D}{1+y}\Delta y\ . \tag{5.3}$$

Величину $\overline{D} = D/(1+y)$ - относительное изменение цены при изменении доходности к погашению на единицу, называют *модифицированной продолжительностью*.

Дюрация Фишера-Вайля

Показатели дюрации, рассчитываемые как функции доходности к погашению, имеют существенный недостаток. Доходность к погашению y - это характеристика определенного инструмента, тогда как с практической точки зрения более важно знать - как изменится цена при изменении *рыночных процентных ставок*.

Пусть известна функция цен простых дисконтных облигаций $p(t)$, где t - время погашения. Рыночная цена произвольного инструмента с фиксированным доходом может быть представлена как:

$$P = \sum_{j=1}^{n} p(t_j)C_j\ .$$

Через $x(t)$ обозначим кривую спот-ставок (с непрерывным сложным процентом), т.е. $p(t) = e^{x(t)t}$. Предположим, что любая спот-ставка может быть представлена как сумма краткосрочной ставки x и спреда $s(t)$, зависящего от времени t:

$$x(t) = x + s(t)\ ,$$

причем величины спрэдов *постоянны*. Последнее означает, что возможны исключительно *параллельные* сдвиги кривой спот-ставок - когда ставки для всех сроков меняются на одинаковую величину. Величина:

$$\frac{dP}{dx} = -\sum_{j=1}^{n} t_j e^{-x(t)t} C_j$$

является аналогом дюрации в денежном выражении и измеряет *абсолютное* изменение цены инструмента в ответ на параллельный сдвиг кривой спот-ставок. *Дюрацией Фишера-Вайля* называют величину *относительного* изменения цены в ответ на параллельное изменение структуры процентных ставок:

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dx} = \sum_{j=1}^{n} t_j p(t_j)C_j \Bigg/ \sum_{j=1}^{n} p(t_j)C_j\ . \tag{5.4}$$

Дюрация Фишера-Вайля, как и дюрация Маколея (5.2), измерят *средний срок потока платежей*[1], но, в отличие от последней, в качестве ставок дисконтирования используются спот-ставки $x(t_j)$.

Дюрация портфеля

Показатель продолжительности может рассчитываться как для отдельного инструмента, так и для *портфеля* долговых обязательств. Пусть в портфель входит K различных долговых инструментов, $k = 1,2,\ldots,K$ - номер инструмента, Z_k - количество k-х инструментов в портфеле (штук), P_k - рыночная цена, C_{kt} - размер выплаты по k-му инструменту в период времени t ($t = 1,2,\ldots,n$, т.е. время считаем *дискретным*). Дюрацией портфеля по определению (формула (5.4)) будет величина:

$$\mathfrak{D}_\Pi = \sum_{t=1}^{n} t p_t \sum_{k=1}^{K} Z_k C_{kt} \Bigg/ \sum_{t=1}^{n} p_t \sum_{k=1}^{K} Z_k C_{kt} .$$

Обозначив через z_k долю k-го инструмента в общей стоимости портфеля:

$$z_k = Z_k P_k \Bigg/ \sum_{j=1}^{K} Z_j P_j ,$$

и принимая во внимание, что:

$$\mathfrak{D}_k = \sum_{t=1}^{n} t p_t C_{kt} \Bigg/ P_k ,$$

получим следующее выражение для продолжительности портфеля:

$$\mathfrak{D}_\Pi = \sum_{k=1}^{K} z_k \mathfrak{D}_k , \qquad (5.5)$$

т.е. *дюрация портфеля есть взвешенная по объемам инвестиций дюрация входящих в данный портфель инструментов*. Как и для отдельного инструмента, продолжительность портфеля является показателем, характеризующим изменение стоимости (в нашем случае, одновременно, - и рыночной

[1] Согласно Девентеру и Имаи [ ], именно дюрация как *изменение цены при параллельном сдвиге кривой доходности* (т.е. определенная в соответствии с формулой (5.4)) и должна называться дюрацией Маколея, т.к. в точности соответствует предложенному им показателю для измерения среднего времени погашения (и одновременно - процентного риска) долгового инструмента. Дюрацию как функцию доходности к погашению (формула (5.2)) авторы называют *рыночной*, в том смысле, что данный подход расчета является более простым (не нужна информация о структуре процентных ставок) и, как следствие - наиболее распространенным на финансовых рынках, хотя и не вполне подходящим для задач хеджирования процентного риска. Тем не менее, чтобы не вносить путаницу, мы в соотвествии со сложившейся традицией (хотя, возможно, в ущерб исторической правоте) дюрацией Маколея будем называть величину, рассчитываемую по формуле (5.2), а дюрацией Фишера-Вайля - показатель (5.4).

цены) портфеля в ответ на небольшой *параллельный* сдвиг кривой рыночных спот-ставок.

Дюрация как инструмент хеджирования

Рассмотрим следующую задачу. Инвестор владеет Z_A единиц долгового инструмента A, сегодняшняя рыночная цена которого равна P_A. Кредитный риск *полностью* отсутствует, - это означает, что снижение стоимости инвестиций может быть вызвано исключительно колебаниями рыночных процентных ставок. Необходимо выбрать объем инвестиций в инструмент B (который также не подвержен кредитному риску) таким образом, чтобы стоимость суммарных инвестиций оставалась постоянной в случае неожиданного изменения рыночных процентных ставок. Если Z_B - количество единиц актива B в портфеле, совокупная стоимость портфеля будет равна $P_П = Z_A P_A + Z_B P_B$.

Предположим, что возможны исключительно параллельные сдвиги кривой спот-ставок. При относительно небольшом изменении краткосрочной ставки x, цена портфеля изменится на величину:

$$\frac{dP_П}{dx} = Z_A \frac{dP_A}{dx} + Z_B \frac{dP_B}{dx}.$$

Хеджирование процентного риска означает, что нужно подобрать величину Z_B таким образом, чтобы стоимость портфеля при небольших изменениях процентных ставок не менялась, т.е $dP_П / dx = 0$. Последнее означает, что искомая величина Z_B должна удовлетворять условию:

$$\frac{Z_B}{Z_A} = -\frac{dP_A}{dx} \bigg/ \frac{dP_B}{dx}.$$

Величину $h = Z_B P_B / Z_A P_A$ - отношение стоимости инвестиций в инструмент хеджирования к стоимости страхуемого актива, - назовем *коэффициентом хеджирования*. В случае, когда возможны исключительно небольшие параллельные сдвиги кривой доходности, оптимальный коэффициент хеджирования (используем соотношение (5.4)) равен отношению показателей дюрации с обратным знаком:

$$h = Z_B P_B / Z_A P_A = -\mathfrak{D}_A / \mathfrak{D}_B. \quad (5.6)$$

Коэффициент хеджирования в формуле (5.6) показывает - сколько гривен должно быть вложено в инструмент B в расчете на каждую гривну вложений в инструмент A чтобы полностью обезопасить стоимость совокупных инвестиций от относительно *небольших параллельных* изменений структуры процентных ставок.

Как уже отмечалось, для расчета дюрации Фишера-Вайля необходимы данные о кривой доходности, в то время как при использовании т.н. рыночном подхода (формула (5.2)) никакой дополнительной информации не требуется - достаточно знать потоки платежей и рыночную цену инструмента. Поэтому на практике в качестве коэффициента хеджирования часто предлагают использовать отношение показателей модифицированной продолжительности:

$$h_y = -\overline{D}_A \big/ \overline{D}_B = -\left(\frac{1}{P_A} \cdot \frac{dP_A}{dy_A}\right) \Big/ \left(\frac{1}{P_B} \cdot \frac{dP_B}{dy_B}\right). \tag{5.7}$$

Данная формула для коэффициента хеджирования даст точно такой же как и выражение (5.6) результат в случае *плоской* кривой доходности - когда процентные ставки для всех сроков равны (и, в частности, $y_A = y_B$). В остальных случаях последний подход не вполне точен. Иллюстрация различных способов расчета дюрации и коэффициентов хеджирования приведена в примере 5.1.

Пример 5.1. Расчет дюрации и коэффициентов хеджирования

Проиллюстрируем расчет показателей дюрации на примере облигации федерального займа с фиксированным купонным доходом (ОФЗ-ФК) серии 27004 с погашением 18.09.2002 г. (см. пример 3.2. на стр.). Обозначим данную облигацию индексом *I*. Сегодняшним днем как и прежде считаем 7 сентября 2001 г. Рыночная цена облигации равна 105,19 руб. за 100 руб. номинальной стоимости. Платежи по данной облигации приведены в таблице:

Дата	*Дней* от сегодняшнего момента	*Лет* от сегодняшнего момента (t)	Объем выплаты, руб. в расчете на 100 руб. номинала	Коэффициент дисконтирования, $p(t)$	Спот-ставка, $x(t)$, % годовых
19.09.2001	12	0,033	5,00	0,9962	11,70
19.12.2001	103	0,282	3,70	0,9652	12,55
20.03.2002	194	0,532	3,70	0,9309	13,48
19.06.2002	285	0,781	3,70	0,8984	13,72
18.09.2002	376	1,030	103,70	0,8666	13,90

Коэффициенты дисконтирования и ставки спот в последних двух колонках - результат сглаживания кривой коэффициентов дисконтирования с помощью кубических сплайнов (см. Пример 4.? в предыдущей главе).
Доходность к погашению рассматриваемой облигации является решением уравнения:

$$105.19=\frac{5,0}{(1+y)^{0,033}}+\frac{3,7}{(1+y)^{0,282}}+\frac{3,7}{(1+y)^{0,532}}+\frac{3,7}{(1+y)^{0,781}}+\frac{103,7}{(1+y)^{1,030}}$$

и равна 14,87% годовых - в данном случае это ставка с годовым (дискретным) сложным процентом. Дюрация Маколея данной облигации в соответствии с формулой (5.2) равняется:

$$D_I=\frac{1}{105,19}\cdot\left[\frac{0,033\cdot 5,0}{1,1487^{0,033}}+\frac{0,282\cdot 3,7}{1,1487^{0,282}}+\frac{0,532\cdot 3,7}{1,1487^{0,532}}+\frac{0,781\cdot 3,7}{1,1487^{0,781}}+\frac{1,030\cdot 103,7}{1,1487^{1,030}}\right]$$
$$=0,9335 \quad \text{года},$$

- как видим, дюрация несколько меньше срока погашения облигации - что всегда характерно для инструментов с более чем одной выплатой. Модифицированная продолжительность равняется:

$$\overline{D}_I=0,933/1.1487=0.8122,$$

- т.е. если доходность к погашению изменится на 1%, цена облигации изменится *приблизительно* (т.к. это лишь линейная аппроксимация) на 0,8122%.
Более точным показателем средней продолжительности облигации является, как уже отмечалось, дюрация Фишера-Вайля, равная в данном случае (формула (9.4)):

$$\mathfrak{D}_I=\frac{1}{105,19}\left(0,9962\cdot 5,0+0,9652\cdot 3,7+0,9309\cdot 3,7+0,8984\cdot 3,7+0,8666\cdot 103,7\right)$$
$$=0.9333 \quad \text{года}$$

Таким образом, в нашем примере значения показателей дюрации Маколея и Фишера-Вайля оказались очень близки между собой. В том числе и по этой причине практики часто отдают предпочтение дюрации Маколея, которую проще посчитать (как минимум, не требуется дополнительная информация о временной структуре процентных ставок). Тем не менее, чем большим является наклон кривой доходности, и чем выше размеры промежуточных выплат, - тем большими могут быть отличия значений дюрации при разных методах расчета. Кроме того, если дюрация Фишера-Вайля отражает процентное изменение цены при небольшом параллельном сдвиге спот-ставок, то дюрация Маколея не является показателем изменения цены при небольшом изменении доходности к погашению - этой цели служит модифицированная дюрация.
В качестве инструмента хеджирования возьмем облигацию ОФЗ-ФК серии 27011 с погашением 8 октября 2003 г. Используем для данного инструмента индекс *II*. Рыночная цена равна $P_{II}=95,40$, платежи приведены в таблице:

Дата	*Дней* от сегодняшнего момента	*Лет* от сегодняшнего момента (t)	Объем выплаты, руб. в расчете на 100 руб. номинала	Коэффициент дисконтирования, $p(t)$	Спот-ставка, $x(t)$, % годовых
10.10.2001	33	0,090	3,70	0,9895	11,70
09.01.2002	124	0,340	3,70	0,9572	12,87
10.04.2002	215	0,589	3,70	0,9232	13,56
10.07.2002	306	0,838	3,70	0,8911	13,76
09.10.2002	397	1,088	2,50	0,8592	13,95

08.01.2003	488	1,337	2,50	0,8264	14,26
09.04.2003	579	1,586	2,50	0,7919	14,71
09.07.2003	670	1,836	2,50	0,7550	15,31
08.10.2003	761	2,085	102,50	0,7161	16,01

Доходность к погашению облигации *II* равняется 17,15% годовых, дюрация Маколея, модифицированная дюрация и дюрация Фишера-Вайля равны соответственно:

$$D_{II} = 1{,}7964 \ , \ \overline{D}_{II} = 1{,}5334 \ , \ \mathfrak{D}_{II} = 1{,}7930 \ .$$

Используя полученные показатели дюрации, рассчитаем коэффициент хеджирования, основанный на показателе Фишера-Вайля (формула (5.6)):

$$h = -0.9333/1.7930 = -0{,}5205 \ .$$

Полученный результат означает, что для страхования процентного риска (т.е. неожиданных колебаний стоимости инвестиций, связанных с изменениями рыночных процентных ставок) необходимо на каждый рубль, инвестированный в облигации *I*, *коротко продать* облигаций *II* на сумму 0,5205 руб. Если, например, инвестор владеет 10 тыс шт. облигаций *I* на общую сумму 10000×105,19=1051900 руб., для хеджирования необходимо *коротко продать* 0,5205×1051900/95,4 ≈ 5739 шт. облигаций *II*. Подчеркнем, что данный хедж будет эффективным *только* для небольших и *только* параллельных сдвигов кривой доходности. Если процентные ставки изменятся значительно, либо изменение будет непараллельным (например краткосрочные ставки снизятся, а долгосрочные - возрастут) - хеджирование не обеспечит страхование от потерь. Кроме того, напомним, что короткие продажи облигаций на реальном рынке могут быть недоступны - тогда для страхования процентного риска нужно использовать специальные инструменты - например, форвардные либо фьючерсные контракты (см. Главу 9), тем не менее, принципы расчета коэффициентов хеджирования останутся неизменными.

Коэффициент хеджирования, основанный на модифицированной дюрации (формула (5.7)) будет равен:

$$h_y = -0{,}8122/1.5334 = -0.5297 \ .$$

Отличие h_y от h не очень существенно. Тем не менее в случаях, когда кривая доходности имеет значительный наклон (сильно отличается от плоской), хеджирование, основанное на последнем коэффициенте, может не обезопасить от потерь даже при небольших и параллельных изменениях рыночных процентных ставок.

Выпуклость

Одним из недостатков показателей продолжительности как меры подверженности инструмента процентному риску является то, что дюрация - лишь *линейная* аппроксимация зависимости цены от процентной ставки, в то время как данная функция является нелинейной.

Рассмотрим цену долгового инструмента как функцию доходности к погашению: $P(y)$. Относительный прирост цены при небольшом изменении y может быть представлен с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$\frac{P(y+\Delta y)-P(y)}{P(y)}=\left[\frac{1}{P(y)}\frac{dP(y)}{dy}\right]\Delta y+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{P(y)}\frac{d^2P(y)}{dy^2}\right](\Delta y)^2+o\left((\Delta y)^2\right),$$

или:

$$\frac{P(y+\Delta y)-P(y)}{P(y)}=-\overline{D}\Delta y+\frac{1}{2}\overline{C}(\Delta y)^2+o\left((\Delta y)^2\right) \tag{5.8}$$

где: $\overline{D}$ - модифицированная продолжительность, $\overline{C}$ - *выпуклость*, которая для инструмента с платежами $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, если доходность к погашению y рассчитывается как ставка с дискретным сложным процентом, равна:

$$\overline{C}=\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2}=\frac{1}{P}\sum_{j=1}^{n}t_j^2(1+y)^{-(t_j+2)}C_j\,. \tag{5.9}$$

Первые два слагаемых правой части выражения (5.8) являются квадратичной аппроксимацией функции $P(y)$. Соответствующая графическая иллюстрация приведена на рис. 5.2.

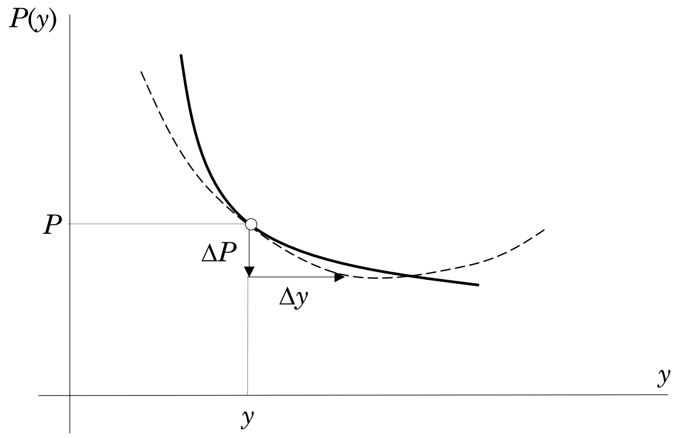


Рис. 5.2. Квадратичная аппроксимация зависимости цены от доходности.

Выпуклость, как и дюрацию, можно представить в форме Фишера-Вайля. Для этого цену долгового инструмента будем считать функцией краткосрочной ставки x и предполагать, как и ранее, что возможны лишь параллельные сдвиги структуры процентных ставок. Квадратичная аппроксимация относительного изменения цены при параллельном сдвиге процентных ставок запишется как:

$$\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{P(x)} \cong -\left[\frac{1}{P(x)}\sum_{j=1}^{n} t_j p(t_j) C_j\right]\Delta x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{P(x)}\sum_{j=1}^{n} t_j^2 p(t_j) C_j\right](\Delta x)^2,$$

где: C_j - платежи в моменты времени t_j ($j = 1,2,\ldots,n$), $p(t_j) = \exp(-x(t_j)t_j)$ - функция дисконтирования, спот-ставки могут быть выражены как $x(t_j) = x + s(t_j)$, причем размеры спредов $s(t_j)$ - константы. Выражение в квадратных скобках во втором слагаемом - это выпуклость в форме Фишера-Вайля:

$$\mathcal{C} = \sum_{j=1}^{n} t_j^2 p(t_j) C_j \Bigg/ \sum_{j=1}^{n} p(t_j) C_j\,, \tag{5.10}$$

т.е. пророст цены при сдвиге процентных ставок можно записать:

$$\frac{\Delta P}{P} \cong -\mathcal{D}\cdot\Delta x + \frac{1}{2}\mathcal{C}\cdot(\Delta x)^2\,. \tag{5.11}$$

Выпуклость и хеджирование

Использование показателя выпуклости позволяет более точно хеджировать процентный риск, - в том смысле, что хедж оказывается эффективным для более значительных изменений процентных ставок. Тем самым, не возникает необходимости постоянных корректировок позиций при изменениях процентных ставок.

Пусть, как и прежде, инвестор владеет Z_A единиц актива *A*. Необходимо выбрать хедж таким образом, чтобы стоимость совокупного портфеля P_Π была застрахована от параллельных сдвигов процентных ставок, т.е.:

$$\frac{\Delta P_\Pi}{P_\Pi} \cong -\mathcal{D}_\Pi\cdot\Delta x + \frac{1}{2}\mathcal{C}_\Pi\cdot(\Delta x)^2 = 0\,, \tag{5.12}$$

($\mathcal{D}_\Pi$ и $\mathcal{C}_\Pi$ - соответственно дюрация и выпуклость портфеля). Для хеджирования в данном случае необходимо использовать как минимум *два* дополнительных инструмента - чтобы одновременно выполнялись условия $\mathcal{D}_\Pi = 0$ и $\mathcal{C}_\Pi = 0$. Пусть для хеджирования выбраны инструменты *B* и *C*, Z_B и Z_C - искомое количество единиц каждого из них в портфеле. Стоимость портфеля таким образом может быть представлена как суммарная стоимость его компонент:

$$P_\Pi = Z_A P_A + Z_B P_B + Z_C P_C = P_\Pi(z_A + z_B + z_c)\,,$$

здесь z_A, z_B и z_C - *доли* инвестиций в каждый из инструментов в общей стоимости портфеля (очевидно, что $z_A + z_B + z_C = 1$). Продолжительность портфеля, как было показано выше, есть взвешенная по пропорциям инвестиций в каждый инструмент сумма дюраций компонентов портфеля:

$$\mathcal{D}_П = z_A\mathcal{D}_A + z_B\mathcal{D}_B + z_C\mathcal{D}_C\,.$$

Нетрудно убедиться, что выпуклость портфеля может быть рассчитана аналогично:

$$\mathcal{C}_П = z_A\mathcal{C}_A + z_B\mathcal{C}_B + z_C\mathcal{C}_C\,.$$

Приравняв два последних выражения к нулю, получим систему уравнений, решение которой (значения z_B и z_C) обеспечит выполнение условия (5.12). Перепишем данную систему, введя обозначения для *коэффициентов хеджирования* $h_B = z_B / z_A$ и $h_C = z_C / z_A$ (h_B и h_C представляют собой отношение инвестиций в инструменты хеджирования к инвестициям в хеджируемый актив A):

$$\mathcal{D}_A = -h_B\mathcal{D}_B - h_C\mathcal{D}_C,$$
$$\mathcal{C}_A = -h_B\mathcal{C}_B - h_C\mathcal{C}_C.$$

Решением задачи будет:

$$h_B = -\frac{\mathcal{D}_C\mathcal{C}_A - \mathcal{D}_A\mathcal{C}_C}{\mathcal{D}_B\mathcal{C}_C - \mathcal{D}_C\mathcal{C}_B}\,,\ h_C = -\frac{\mathcal{D}_B\mathcal{C}_A - \mathcal{D}_A\mathcal{C}_B}{\mathcal{D}_B\mathcal{C}_C - \mathcal{D}_C\mathcal{C}_B}\,.$$

Ниже приведен пример расчета коэффициентов хеджирования с использованием показателей выпуклости.

Пример 5.2. Расчет коэффициентов хеджирования с использованием показателей продолжительности и выпуклости

Используем следующую информацию об облигациях федерального займа РФ из примера 3.2 (данные на 7 сентября 2001 г.):

Инструмент	ОФЗ-ПД 26003	ОФЗ-ФК 27004	ОФЗ-ФК 27011
Индекс инструмента, i	1	2	3
Дата погашения	15.03.2005	18.09.2002	8.10.2003
Срок погашения, лет	3,521	1,030	2,085
Цена, P_i	80,72	105,19	95,40
Доходность к погашению, %	20,09	14,87	17,15
Продолжительность Маколея	2,9162	0,9335	1,7964
Модифицированная продолжительность	2,4283	0,8126	1,5335
Выпуклость	8,6852	1,4183	3,9176
Продолжительность Фишера-Вайля	2,8944	0,9333	1,7930
Выпуклость Фишера-Вайля	9,5062	0,9379	3,5702

Пусть необходимо составить портфель, состоящий исключительно из облигаций данных трех типов. Общий объем инвестиций равняется 10 млн. руб. Портфель должен быть хеджирован от параллельных сдвигов кривой доходности. Выберем (произвольно) в качестве хеджируемого инструмента облигацию 1 (ОФЗ-ПД 26003) и рассчитаем коэффициенты хеджирования[2]:

$$h_2 = -\frac{1{,}7930 \cdot 9{,}5062 - 2{,}8944 \cdot 3{,}5702}{0{,}9333 \cdot 3{,}5702 - 1{,}7930 \cdot 0{,}9379} = 4{,}0663\,,\ h_3 = -3{,}7309\,.$$

Доля от общего объема инвестиций в первый вид облигаций (ОФЗ-ПД 26003) будет равна:

$$z_1 = 1/(1 + h_2 + h_3) = 0{,}7488\,,$$

откуда получим доли вложений во второй и третий вид облигаций (ОФЗ-ФК 27004 и 27011 соответственно):

$$z_2 = h_2 z_1 = 3{,}0450\,,\ z_3 = h_3 z_1 = -2{,}7938\,.$$

Таким образом, если общий объем инвестиций составляет 10 млн. руб., для того, чтобы хеджировать процентный риск, необходимо инвестировать 7,488 млн. руб в облигации 1, 30,450 млн. руб. - в облигации 2, и коротко продать облигации 3 на сумму 27,938 млн. руб. Если такой портфель *действительно* удастся создать, и если на следующий день произойдет даже достаточно существенное параллельное изменение процентных ставок (в ту или иную сторону) стоимость портфеля не отклонится существенно от вложенных инвестором 10 млн. руб. Сравним эффективность данной стратегии хеджирования с подходом, основанном только на показателе дюрации (Пример 5.1), а также с вариантами, когда хеджирование не применяется и все средства инвестируются только в один вид облигаций. Результаты сравнения приводятся в таблице::

Изменение (параллельное) процентных ставок	Изменение стоимости портфеля в % к первоначальной стоимости				
	Портфель, хеджированный по показателю дюрации	Портфель, хеджированный по показателям дюрации и выпуклости Фишера-Вайля	Портфель, хеджированный по *дискретным* показателям дюрации и выпуклости $\overline{D}$ и $\overline{C}$	Все средства инвестированы в ОФЗ-ПД 26003	Все средства инвестированы в ОФЗ-ФК 27011
+5%	-0,2285	-0,0132	+0,0450	-13,3487	-8,5336
+3%	-0,0841	-0,0030	+0,0267	-8,2698	-5,2216
+1%	-0,0096	-0,0001	+0,0078	-2,8475	-1,7753
-1%	-0,0096	+0,0001	-0,0057	+2,9425	+1,8110
-3%	-0,0888	+0,0033	-0,0072	+9,1261	+5,5431
-5%	-0,2581	+0,0156	+0,0108	+15,7311	+9,4270

[2] Для расчета коэффициентов хеджирования использованы продолжительность и выпуклость Фишера-Вайля. Однако для этой же цели можно использовать *дискретные* варианты данных показателей - модифицированную продолжительность и выпуклость (формула (5.9)), рассчитанные как *функции доходности к погашению*. Коэффициенты хеджирования будут иметь значения: h_2=3,7737 и h_3=–3,5832. Данные значения существенно отличаются от коэффициентов, полученных на основании показателей Фишера-Вайля - совпадать они будут только в случае плоской кривой доходности.

Пример 5.2 свидетельствует, что хеджирование на основании квадратичной аппроксимации зависимости цены от доходности (т.е. одновременно по показателям продолжительности и выпуклости) является существенно более эффективным, чем хеджирование только лишь по величине дюрации (колебания стоимости инвестиций в последнем случае являются значительно большими).

Данные последней таблицы в примере 5.2 свидетельствуют о еще одном негативном свойстве хеджирования, основанного *исключительно* на продолжительности: приросты стоимости хеджированного портфеля (пусть относительно небольшие) являются *отрицательными независимо от направления изменения процентных ставок*. Как бы не менялись процентные ставки, хеджированный портфель *теряет* небольшую часть стоимости, т.к. зависимость стоимости от процентных ставок является в данном случае *вогнутой функцией*. Действительно, для инвестора нежелательными являются *потери стоимости*, связанные с колебаниями процентных ставок, тогда как при изменении доходности возможен и выигрыш. При равенстве нулю первой производной цены по доходности (дюрации) выполнение условия:

$$\mathcal{C} \geq 0 \tag{5.13}$$

обеспечивает выпуклость функции цены, т.е. в каком бы направлении не изменились процентные ставки, стоимость инвестиций увеличится. Поэтому именно выполнение (5.13) часто рассматривается как необходимое дополнительное условие хеджирования риска процентной ставки. Подробнее о методах хеджирования *портфеля* долговых инструментов - в следующей главе.

VI. Иммунизация

Иммунизацией принято называть основанную на показателе дюрации *стратегию управления потоками платежей*, целью которой является минимизация риска процентной ставки. Метод иммунизации достаточно прост и хорошо известен. Вследствие простоты (а именно - упрощающих действительность предположений, лежащих в основе метода), использование его на практике может быть недостаточно эффективно. Тем не менее, сфера применения иммунизации очень широка - существенно шире круга задач, связанных с инвестированием в портфель долговых обязательств.

Идея метода и сам термин «иммунизация» введены Ф. Редингтоном (1952) [ ], рассматривавшим задачу управления активами и обязательствами страховой компании. Метод и практические аспекты его применения были развиты в работах Дж. Бирвага, Дж.Кауфмана и А. Тоевса (1979) [ ], (1983) [ ], Х.Фонга и О.Васичека (1980) [ ], и др. Метод условной иммунизации разработан. М. Лейбовицем и А. Вейнбергером (1981) [ ] [ ], (1982) [ ], (1983) [ ]. Известными обобщающими работами по вопросам управления процентным риском на основании показателей дюрации, являются книги Дж. Бирвага (1987) [ ] и Ф. Фабоцци (напр. (1989) [ ]). Оптимизационные задачи управления портфелем, использующие принцип иммунизации, рассмотривались в работах С.Зениоса (см. напр. собрание работ под ред. С. Зениоса и Дж. Данцига (1993) [ ]).

Принцип иммунизации

В предыдущей главе хеджирование рассматривалось как страхование *сегодняшней* стоимости активов от неожиданного изменения процентных ставок. В то же время инвестор может быть гораздо более заинтересован в защите стоимости инвестиций на определенный *будущий момент времени*, который называют *плановым горизонтом*.

Пусть объем средств, инвестированных в портфель инструментов с фиксированным доходом, равен $P_П$. Плановый горизонт инвестора равен τ периодам. Предположим, что *кривая доходности является плоской* - это означает, что величины доходности к погашению всех инструментов, как и спот-ставки, равны между собой. Обозначим текущее значение процентных ставок через y. Это означает, что и доходность любого портфеля $y_П$ будет равна текущему уровню процентных ставок: $y_П = y$. Стоимость портфеля через время τ будет равна

$$V_П(\tau) = P_П(1+y)^{\tau}.$$

Однако, если уровень процентных ставок изменится *после* того, как портфель сформирован, то изменится и величина $V_П$ - *во-первых*, за счет того, что промежуточные платежи будут реинвестированы по изменившейся ставке, *во-вторых*, потому что стоимость активов, находящихся в портфеле на конец планового горизонта будет зависеть от уровня процентных ставок на этот момент. Причем, если процентные ставки вырастут - инвестор получит больший доход от реинвестирования промежуточных выплат, но стоимость активов в будущем снизится. Снижение процентных ставок будет означать обратный эффект - потери доходов от реинвестирования, но выигрыш в стоимости инструментов на конец периода. Идея метода иммунизации состоит в том, чтобы сбалансировать влияние этих двух факторов таким образом, чтобы суммарная стоимость инвестиций на конец планового горизонта не зависела бы от колебаний процентных ставок.

Изменение будущей стоимости портфеля в случае, если процентные ставки сразу же после формирования портфеля параллельно изменились на небольшую величину и в дальнейшем оставались неизменными, можно записать с помощью производной

$$\frac{dV_П}{dy} = \frac{d}{dy}\left(P_П(1+y)^{\tau}\right).$$

Иммунизация портфеля в условиях принятых предположений означает, что данная производная должна равняться нулю, т.е.

$$\frac{dP_П}{dy}\cdot(1+y)^{\tau} + P_П \cdot T \cdot (1+y)^{\tau-1} = 0,$$

откуда получим

$$P_П(1+y)^{\tau-1}\left[\frac{dP_П}{dy}\cdot\frac{(1+y)}{P_П} + \tau\right] = 0,$$

или окончательно

$$-\frac{dP_П}{dy}\frac{(1+y)}{P_П}=\tau\,. \tag{6.1}$$

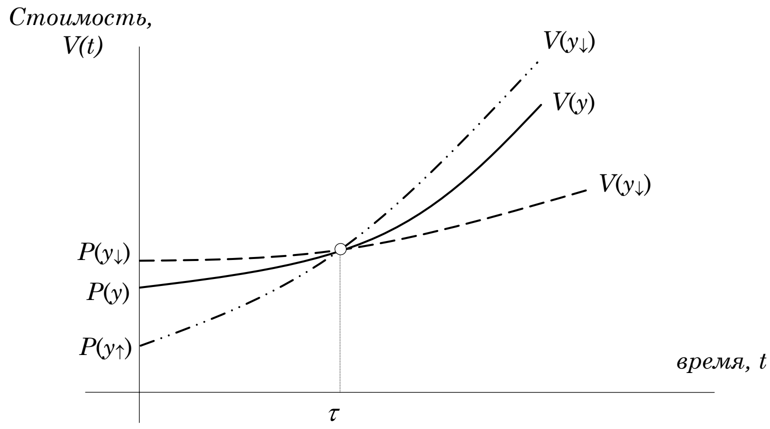


Рис. 6.1 Окно дюрации. Сплошной линией показана динамика стоимости портфеля в случае неизменности процентной ставки. Прерывистые линии - динамика стоимости в случае снижения и роста процентных ставок сразу же после формирования портфеля. Иммунизированный портфель должен иметь одинаковую стоимость к моменту τ (плановый горизонт), независимо от того - в каком направлении изменились процентные ставки.

Левая часть последнего выражения есть не что иное, как продолжительность Маколея ($D_П$). Тем самым, принцип иммунизации может быть сформулирован так: *чтобы обезопасить портфель от параллельных сдвигов кривой доходности, нужно сформировать его таким образом, чтобы дюрация портфеля равнялась плановому горизонту* $D_П=\tau$.

Если инвестору доступно K инструментов, z_k - доля k-го инструмента в портфеле, D_k - его продолжительность, условие (6.1) можно записать как

$$\sum_{k=1}^{K} D_k z_k=\tau\,, \tag{6.1'}$$

причем должно выполняться бюджетное ограничение

$$\sum_{k=1}^{K} z_k=1\,. \tag{6.2}$$

Если короткие позиции не допускаются ($z_k\ge 0$ для всех k), то среди доступных инструментов должен быть хотя бы один, продолжительность которого больше или равна плановому горизонту: $D_k \geq \tau$, *и* хотя бы один, для которого $D_k \leq \tau$.

Графическую иллюстрацию стратегии иммунизации принято называть *окном дюрации* (Рис. 6.1 - см. Бирваг (1987) [ ]). Действительно, если сразу после формирования портфеля произошло увеличение процентных ставок (тем самым, - доходности портфеля), текущая стоимость портфеля снизится, но *возрастет темп прироста стоимости инвестиций* (доходность). В случае падения доходности сегодняшняя стоимость возрастет, но темп прироста будет ниже. Задача иммунизации - подобрать портфель, для которого влияние этих двух факторов к концу планового горизонта полностью компенсируется.

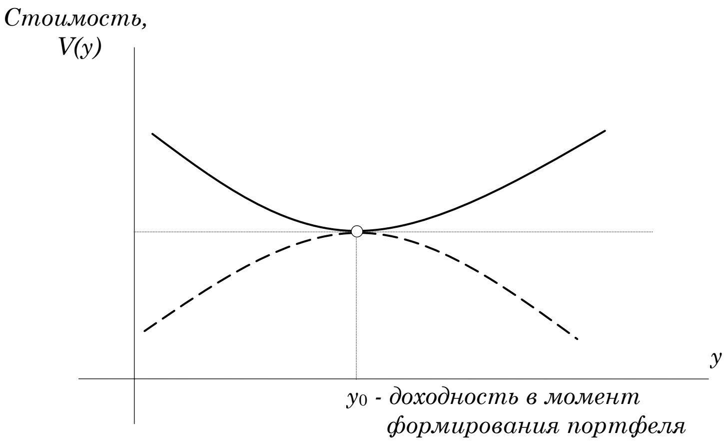


Рис. 6.2 Вогнутость иммунизированного портфеля. На рисунке изображены возможные варианты зависимости стоимости иммунизированного портфеля на момент T от доходности. Иммунизация гарантирует равенство нулю производной dV/dy, т.е. V не меняется при бесконечно малых изменениях y, но колеблется, если изменение процентных ставок существенно. Если в портфеле - только длинные позиции (z_k>0) и денежные потоки по входящим в портфель инструментам положительны, функция $V(y)$ будет выпуклой (d^2V/dy^2>0), и все изменения y - благоприятными (сплошная линия на рисунке). Однако при невыполнении указанных условий, *возможна* ситуация вогнутости функции $V(y)$, когда любое существенное изменение доходности будет означать потери для инвестора (прерывистая линия на рисунке).

Недостатки иммунизации

Оборотной стороной простоты рассмотренного подхода иммунизации явлется ряд недостатков, существенно снижающих его практическую эффективность. *Во-первых*, иммунизация страхует только от очень небольших и параллельных изменений процентных ставок, более того, иммунизация, основанная на дискретных показателях продолжительности, эффективна *лишь в случае плоской кривой доходности*.

Во-вторых, при равенстве нулю производной $dV_П / dy$, нелинейная функция $V(y)$ может быть как выпуклой, так и вогнутой. Последнее возможно, если существуют короткие позиции. (для некоторых k, $z_k < 0$), или в портфеле помимо активов, присутствуют обязательства - инструменты с отрицательными выплатами. В этом случае при изменении процентной ставки, независимо от направления (снижение или возрастание), портфель будет терять стоимость (см. рис. 6.2). Такой эффект присутствовал в примере 5.2 предыдущей главы. Чтобы его избежать, необходимо накладывать дополнительное условие $d^2V_П / dy^2 \geq 0$.

В-третьих, когда количество доступных активов больше двух, система (6.1) - (6.2) имеет *не единственное* решение - поэтому необходимо либо вводить дополнительные ограничения, либо - использовать критерий, оптимизирующий решение по определенному показателю. Наконец, *в-четвертых*, иммунизация эффективна, если изменение процентных ставок произошло *сразу же* после формирования портфеля и в дальнейшем процентные ставки не менялись. Постоянные колебания процентных ставок требуют *динамических корректировок* структуры портфеля после каждого изменения доходности, что обычно связано с дополнительными транзакционными издержками.

Классическая задача согласования активов и обязательств

Задача согласования денежных потоков по активам и обязательствам является типичной в финансовом менеджменте, в особенности для деятельности финансовых институтов. В классической постановке, носящей название *задачи Редингтона* (1952) [ ], она формулируется следующим образом. Существует определенный поток платежей по обязательствам $L_t \geq 0$ в моменты времени $t = 1, 2, \ldots, T$ (время дискретное, что не снижает общности постановки задачи). Необходимо подобрать портфель активов, обеспечивающий поток доходов $A_1, A_2, \ldots, A_T$ (для всех t $A_t \geq 0$), таким образом, чтобы в момент формирования портфеля текущая стоимость активов равнялась текущей стоимости обязательств, и, в случае *изменения* процентных ставок *после* того, как портфель сформирован, независимо от направления такого сдвига, *стоимость активов оставалась бы большей или равной стоимости обязательств*. Кривая доходности в рассматриваемой постановке задачи считается плоской, возможны только параллельные ее сдвиги, доходность активов равна доходности обязательств. В этих условиях, если y

- текущий уровень процентной ставки, то стоимость активов и обязательств равна соответственно:

$$P_A = \sum_{t=1}^{T} (1+y)^{-t} A_t \ , \ P_L = \sum_{t=1}^{T} (1+y)^{-t} L_t \ .$$

Обозначив через P_E разницу текущей стоимости активов и обязательств: $P_E = P_A - P_L$, условия поставленнной выше задачи можно записать как:

$$P_E = 0 \ , \ \frac{dP_E}{dy} = 0 \ , \ \frac{d^2 P_E}{dy^2} \geq 0 \ , \tag{6.3}$$

т.е. как сама функция $P_E(y)$, так и ее первая производная, должна равняться нулю при текущем значении процентной ставки и, кроме того, $P_E(y)$ должна быть выпуклой функцией.

Обозначим через a_t долю поступлений в период t в общей текущей стоимости активов: $a_t = (1+y)^{-t} A_t / P_A$. Соответственно, l_t - доля выплат t-го периода в совокупной стоимости обязательств: $l_t = (1+y)^{-t} L_t / P_L$. Очевидно, что и в первом, и во втором случае сумма долей равняется единице:

$$\sum_{t=1}^{T} a_t = 1 \ , \ \sum_{t=1}^{T} l_t = 1 \ .$$

Используя введенные обозначения, дюрация активов и обязательств может быть представлена как:

$$D_A = \sum_{t=1}^{T} a_t t \ , \ D_L = \sum_{t=1}^{T} l_t t \ .$$

Тем самым, производная dP_E / dy может быть записана через показатели дюрации:

$$\frac{dP_E}{dy} = \frac{dP_A}{dy} - \frac{dP_L}{dy} = -(1+y)^{-1} P_A D_A + (1+y)^{-1} P_L D_L \ .$$

Так как доходность y по условию одинакова для активов и обязательств, и $P_A = P_L$, то для того, чтобы данная производная равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы дюрация активов равнялась дюрации обязательств:

$$D_A = D_L \ . \tag{6.4}$$

Данное соотношение называют *первым условием иммунизации* Редингтона. *Второе условие* касается выпуклости (неотрицательности второй производной) функции $P_E(y)$. Нетрудно убедиться, что:

$$\frac{dD_A}{dy} = -(1+y)^{-1} I_A \text{, где } I_A = \sum_{t=1}^{T} a_t t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} a_t t\right)^2 = \sum_{t=1}^{T} a_t (t - D_A)^2 .$$

Если дюрация D_A измеряет *средний срок* потока платежей, то величина I_A является мерой *рассеивания* платежей во времени[1]. Аналогичный показатель может быть рассчитан для потока обязательств:

$$I_L = \sum_{t=1}^{T} l_t (t - D_L)^2 \text{, причем } \frac{dD_L}{dy} = -(1+y)^{-1} I_L .$$

Используя выражения для dD_A / dy и dD_L / dy, вторая производная функции $P_E(y)$ может быть представлена как:

$$\frac{d^2 P_E}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(-(1+y)^{-1} P_A D_A + (1+y)^{-1} P_L D_L\right) =$$
$$= (1+y)^{-2}\left(P_A D_A + P_A D_A^2 + P_A I_A - P_L D_L - P_L D_L^2 - P_L I_L\right).$$

Так как $P_A = P_L$ и, при выполнении первого условия иммунизации, $D_A = D_L$, функция $P_E(y)$ будет выпуклой ($d^2 P_E / dy^2 \ge 0$) если:

$$I_A \ge I_L , \qquad (6.5)$$

т.е. *рассеивание потока активов будет большим или равным рассеиванию потока обязательств*. Последнее соотношение называют *вторым условием иммунизации* Редингтона.

Выбор инструментов в задаче иммунизации

Более реалистичной постановкой рассмотренной задачи иммунизации является выбор не непосредственно потока доходов от активов $A_1, A_2, \ldots, A_T$, а *портфеля финансовых инструментов*, обеспечивающего поток доходов, который удовлетворял бы условиям иммунизации (6.4), (6.5). Если для инвестирования доступно K инструментов, C_{kt} - доход на одну единицу k-го инструмента в период t ($k = 1,2,\ldots,K$), то задачей является выбор количества k-х инструментов в портфеле Z_k. Объем доходов от портфеля активов в каждый период t определяется как:

$$A_t = \sum_{k=1}^{K} Z_k C_{kt} .$$

[1] Показатели D и I внешне аналогичны понятиям математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины (если бы, например, a_t были вероятностями, а промежутки времени t - реализациями случайной величины). Поэтому I также называют *дисперсией* потока платежей. Бирваг (1987) [ ] использует термин *инерция*, по аналогии с соответствующим физическим понятием.

Возможна также обратная постановка задачи иммунизации - когда для заданного потока доходов нужно подобрать источники финансирования - портфель обязательств с выплатами $L_1, L_2, \ldots, L_T$, такими, чтобы привлеченных источников было достаточно для финансирования имеющихся активов, и выполнялись условия иммунизации. Аналогично, если доступно M инструментов долгового финансирования, G_{mt} - выплата на одну единицу инструмента m в момент t, Q_m - количество инструментов m, то поток обязаельств определяется как:

$$L_t = \sum_{m=1}^{M} Q_m G_{mt} \ .$$

Наконец, для финансового института актуальной может быть задача формирования портфеля, когда определенная свобода существует как в выборе активов, так и обязательств.

Иммунизация стоимости собственного капитала

Разница между текущей стоимостью активов и обязательств P_E является стоимостью *собственного капитала*. Более естественно рассматривать ситуацию, когда P_E положительна, а задача иммунизации - застраховать стоимость собственного капитала от непредвиденных изменений процентных ставок. Условия иммунизации в этом случае несколько изменятся. Действительно, первое условие должно обеспечивать $dP_E / dy = 0$, т.е.:

$$(1+y)^{-1}\left(-P_A D_A + P_L D_L\right) = 0 \ .$$

Доходность активов и обязательств по прежнему считаем одинаковой и равной y, однако их стоимость теперь различна ($P_A \neq P_L$). Первое условие иммунизации будет выглядеть как:

$$D_A = (P_L / P_A) D_L \ , \tag{6.6}$$

второе, соответственно:

$$I_A + D_A^2 \geq (P_L / P_A)(I_L + D_L^2) \ . \tag{6.7}$$

Если равенство (6.6) не выполняется, собственный капитал будет подвержен влиянию колебаний процентной ставки. Разницу между левой и правой частью условия (6.6) называют *разрывом продолжительности*. В случае *положительного* разрыва, активы более чувствительны к процентной ставке по сравнению с обязательствами. Это означает, что в случае роста процентной ставки, стоимость собственного капитала будет снижаться, и наоборот - снижение процентных ставок будет означать рост стоимости собственного капитала. Если разрыв продолжительности отрицателен, рост процентных ставок будет благоприятен, тогда как при снижении величины y часть стоимости собственного капитала будет потеряна.

Иммунизация при различии доходности активов и обязательств

Условия иммунизации несколько видоизменятся, если доходность активов и обязательств различна. Пусть $y_L = y$ - доходность обязательств, $y_A = y + s$ - доходность активов, где $s > 0$ - размер спреда, который пока будем считать постоянным. Условия иммунизации запишутся несколько более громоздко:

$$D_A = \left[P_L(1+y_A)/P_A(1+y_L)\right]D_L\,, \tag{6.8}$$

$$D_A + D_A^2 + I_A = \left(P_L(1+y_A)^2/P_A(1+y_L)^2\right)\cdot\left(D_L + D_L^2 + I_L\right) \tag{6.9}$$

Иммунизация прибыли на собственный капитал

В расмотренных моделях иммунизации задачей было застраховать *текущую* стоимость собственного капитала от непредвиденных колебаний процентной ставки. Однако задачей может быть хеджирование стоимости собственного капитала на определеннй *будущий* момент (плановый горизонт), тем самым целью является страхование размера *прибыли* на собственный капитал, получаемой в течение определенного интервала времени. Пусть τ - плановый горизонт, тогда стоимость собственного капитала через время τ равна $P_E(\tau) = P_A(1+y_A)^\tau - P_L(1+y_L)^\tau$. Размер спреда между доходностью активов и обязательств $(y_A - y_L)$ будем считать фиксированным. Первое условие иммунизации, обеспечивающее отсутствие чувствительности $P_E(\tau)$ к небольшим изменениям процентной ставки ($dP_E(\tau)/dy = 0$) может быть записано как:

$$D_A = \frac{P_L}{P_A}\left(\frac{1+y_L}{1+y_A}\right)^{\tau-1}\left(D_L - \tau\right) + \tau\,. \tag{6.10}$$

Если доходность активов и обязательств совпадает ($y_A = y_L$) условие (6.10) упростится:

$$D_A = (P_L/P_A)(D_L - \tau) + \tau\,. \tag{6.10'}$$

Последнее условие можно представить как:

$$\pi_A D_A + \pi_L D_L = \tau\,, \tag{6.10''}$$

где $\pi_A = P_A/(P_A - P_L)$ - отношение стоимости активов к собственному капиталу, т.е. *доля стоимости активов в совокупном портфеле*, состоящем из активов и обязательств, $\pi_L = -P_L / (P_A - P_L)$ - доля стоимости обязательств. Правая часть выражения (6.10”) является, таким образом, дюрацией *совокупного портфеля*, а само условие (6.10”) - вариантом основного принципа иммунизации, сформулированного в 1-м параграфе настоящей главы: *дюрация иммунизированного портфеля должна равняться длительности планового горизонта*.

Заметим, что при $\tau = 0$ условие (6.10’) превращается в (6.6), равно как из (6.10) получим (6.8). Кроме того, при равенстве текущей стоимости активов и обязательств ($P_A = P_L$), независимо от длительности планового горизонта, условием иммунизации будет равенство показателей дюрации: $D_A = D_L$.

Иммунизация в случае неплоской кривой доходности

Естественно, что предположение о плоской кривой доходности является слишком упрощенным. Если ставки доходности для различных сроков не одинаковы (что значительно более соответствует реальности), денежные потоки по активам и обязательствам должны дисконтироваться по рыночным ставким, зависящим от длительности промежутка времени до соответствующего платежа. Переход к ставкам с непрерывным сложным процентом позволяет отказаться от предположения о плоской кривой доходности, сделав иммунизацию более универсальной и существенно упростив формулы. Пусть $x(t)$ - кривая рыночных спот-ставок, $p(t) = e^{-x(t)t}$ - соответствующая ей кривая коэффициентов дисконтирования (цен простых дисконтных облигаций). Текущая стоимость потока доходов $A_1, A_2, \ldots, A_T$ должна определяться как:

$$P_A = \sum_{t=1}^{T} p_A(t) A_t \ .$$

Аналогично, для потока выплат $L_1, L_2, \ldots, L_T$, текущая стоимость обязательств равняется:

$$P_L = \sum_{t=1}^{T} p_L(t) L_t \ .$$

$p_A(t)$ и $p_L(t)$ - это коэффициенты дисконтирования для активов и обязательств соответственно. В данном случае равенство ставок доходности для активов и обязательств не является критичным и возможно рассматривать ситуацию, когда кривые доходности и, соответственно, ставки дисконтирования активов и обязательств различны, т.е. $p_A(t) \neq p_L(t)$. Главным предположением остается зависимость всех ставок от *единственного фактора* - краткосрочной ставки *x*, т.е. $x_A(t) = x + s_A(t)$, $x_L(t) = x + s_L(t)$, причем величина спредов $s_A(t)$ и $s_L(t)$ является *постоянной*, что допускает только паралельные сдвиги структуры процентных ставок.

При небольшом параллельном сдвиге процентных ставок, стоимость собственного капитала изменится на величину:

$$\frac{dP_E}{dx} = \frac{dP_A}{dx} - \frac{dP_L}{dx} = -P_A \mathfrak{D}_A + P_L \mathfrak{D}_L ,$$

где $\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{D}_L$ - дюрация Фишера-Вайля для потока доходов и выплат соответственно. Таким образом, первое условие иммунизации в условиях неплоской кривой доходности ничем не отличается от (6.6), за исключением того, что в качестве дюрации использованы показатели Фишера-Вайля:

$$\mathfrak{D}_A = (P_L / P_A) \mathfrak{D}_L . \tag{6.11}$$

Подчеркнем еже раз, что данное условие иммунизации остается в силе *даже* в случае различий между ставками доходности активов и обязательств: портфель будет застрахован от процентного риска, если сдвиги кривых доходности будут относительно небольшими и главное - параллельными. Как и в дискретном случае, невыполнение условия (6.11) означает подверженность колебаниям процентных ставок, причем если $\mathfrak{D}_A > (P_L / P_A) \mathfrak{D}_L$ благоприятным (т.е. увеличивающим стоимость собственного капитала) является *снижение* процентных ставок, и наоборот - в случае $\mathfrak{D}_A < (P_L / P_A) \mathfrak{D}_L$.

Второе условие иммунизации требующее выпуклости функции $P_E(x)$, т.е. неотрицательности ее второй производной ($d^2 P_E / dx^2 \geq 0$) можно записать:

$$\frac{dP_E}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-P_A \mathfrak{D}_A + P_L \mathfrak{D}_L\right) = P_A \mathfrak{C}_A - P_L \mathfrak{C}_L \geq 0 ,$$

или:

$$\mathfrak{C}_A \geq (P_L / P_A) \mathfrak{C}_L , \tag{6.12}$$

где $\mathfrak{C}_A$, $\mathfrak{C}_L$ - *выпуклость* активов и обязательств соответственно:

$$\mathfrak{C}_A = \sum_{t=1}^{T} t^2 a_t \text{ , где } a_t = \frac{p_A(t) A_t}{P_A} ,$$

$$\mathfrak{C}_L = \sum_{t=1}^{T} t^2 l_t \text{ , где } l_t = \frac{p_L(t) L_t}{P_L} .$$

Рассмотрим случай, когда необходимо застраховать стоимость собственного капитала на определенный *будущий момент* времени (плановый горизонт) τ . Стоимость денежного потока A_t, возникающего во время t, на момент τ может быть представлена как:

$$\widetilde{p}_A(t-\tau)A_t \text{, где } \widetilde{p}_A(t-\tau) = \begin{cases} p_A(t-\tau) = e^{-x_A(t-\tau)\cdot(t-\tau)}, & t \ge \tau \\ 1/p_A(\tau-t) = e^{x_A(\tau-t)\cdot(\tau-t)}, & t < \tau \end{cases}$$

Стоимость собственного капитала на момент τ равняется $P_E(\tau) = P_A(\tau) - P_L(\tau)$, где:

$$P_A(\tau) = \sum_{t=1}^{T} \widetilde{p}_A(t-\tau)A_t \text{ , } P_L(\tau) = \sum_{t=1}^{T} \widetilde{p}_L(t-\tau)L_t$$

Первое и второе условия иммунизации стоимости собственного капитала на момент τ могут быть представлены как:

$$\mathcal{D}_A(\tau) = (P_L(\tau)/P_A(\tau))\mathcal{D}_L(\tau). \quad (6.11')$$

$$\mathcal{C}_A(\tau) \ge (P_L(\tau)/P_A(\tau))\mathcal{C}_L(\tau), \quad (6.12')$$

где $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_L$, $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_L$ - дюрация и выпуклость активов и обязательств, *рассчитанная на момент* τ:

$$\mathcal{D}_A(\tau) = \sum_{t=1}^{T} (t-\tau)\widetilde{a}_t(\tau) \text{, где } \widetilde{a}_t(\tau) = \widetilde{p}_A(t-\tau)A_t / P_A(\tau), \quad (6.13)$$

$$\mathcal{C}_A(\tau) = \sum_{t=1}^{T} (t-\tau)^2 \widetilde{a}_t(\tau). \quad (6.14)$$

Соответствующие показатели для потока обязательств рассчитываются аналогично. Как видим, при $\tau = 0$ показатели (6.13), (6.14) превращаются в дюрацию и выпуклость Фишера-Вайля, а выражения (6.11'), (6.12') - в обычные условия иммунизации *текущей* стоимости собственного капитала (6.11), (6.12).

Оптимальность иммунизированного портфеля

Если на рынке доступно достаточное количество различных инструментов, существует *множество* портфелей, которые удовлетворяют условиям иммунизации. Естественно, что на практике, помимо условий иммунизации, необходимо учитывать много других ограничений на структуру активов и обязательств, что сужает круг возможных вариантов решения. Тем не менее, если возможное решение не единственное, возникает проблема *выбора* варианта, который был бы наилучшим (*оптимальным*) с точки зрения какого-либо критерия. В качестве критериев чаще всего упоминают два: *максимизация доходности* портфеля (в т.ч. реализованной доходности к плановому горизонту, спреда между доходностью активов и обязательств и т.п.) и *максимизация стоимости собственного капитала* инвестора (или финансового института) - на сегодняшний день или к определенному будущему моменту.

Простейшая *оптимизационная* модель иммунизации портфеля долговых обязательств может быть представлена как расширение задачи из 1-го параграфа настоящей главы. Пусть доступно K долговых инструментов, y_k, D_k, $\overline{C}_k$ - соответственно доходность к погашению, дюрация Маколея и выпуклость k-го инструмента ($k = 1,2,\ldots,K$), z_k - искомые *доли* каждого из инструментов в общем объеме инвестиций. Доходность портфеля может быть приближенно оценена как взвешенная по дюрации и по долям инвестиций доходность входящих в портфель инструментов, т.е.:

$$y_{\Pi} \cong \sum_{k=1}^{K} y_k D_k z_k \Bigg/ \sum_{k=1}^{K} D_k z_k \ , \qquad (6.15)$$

(Отметим, что знаменатель в последнем выражении есть дюрация портфеля). Для максимизации доходности портфеля достаточно обеспечить:

$$\max_{z_1, z_2, \ldots, z_K} \sum_{k=1}^{K} y_k D_k z_k \ , \qquad (6.16)$$

одновременно z_k должны быть такими, чтобы выполнялось условие иммунизации (6.1'):

$$\sum_{k=1}^{K} D_k z_k = \tau \, , \qquad (6.1')$$

бюджетное ограничение (6.2):

$$\sum_{k=1}^{K} z_k = 1 \, , \qquad (6.2)$$

и ограничение по выпуклости:

$$\sum_{k=1}^{K} \overline{C}_k z_k \geq 0 \ . \qquad (6.17)$$

Последнее ограничение выполняется автоматически, если невозможны короткие продажи (т.е. $z_k \geq 0$) и все денежные потоки по инструментам, входящим в портфель, положительны.

Достоинством приведенной выше модели является простота постановки и реализации, однако она не вполне удовлетворительна с точки зрения достижения поставленных целей. Во-первых, если доходность к погашению входящих в портфель инструментов различна, это означает что кривая доходности не плоская, тем самым условия иммунизации (6.1'), (6.2), основанные на дискретных показателях дюрации и выпуклости, не вполне точны. С другой стороны, при плоской структуре процентных ставок доходность всех инструментов одинакова, и критерий (6.16) не имеет смысла. Во-вторых, условием (6.16) максимизируется средняя доходность к погашению инструментов, входящих в портфель, а *не* реализованная доходность портфеля к определенному плановому горизонту (инвестора интересует именно последняя), в то время как эти величины могут существенно различаться.

Для финансового института более естествено в качестве целевого показателя рассматривать текущую *стоимость собственного капитала* либо его стоимость на определенный момент в будущем (т.е. сегодняшнюю стоимость плюс прибыль на собственный капитал, полученную за данный период). Задачей в данном случае является выбор портфеля активов *и* обязательств[2], который отвечал бы условиям иммунизации (например, (6.13) и (6.14)) и максимизировал бы величину $P_E(\tau)$.

Пример 6.2 Краткосрочное финансирование предприятия

В настоящем примере необходимо принять решение о краткосрочном финансировании предприятия, при условии, что прогнозируемый денежный поток определен. Пусть согласно финансовому плану предприятия на следующий год прогнозируются следующие денежные потоки:

Квартал	Свободный денежный поток после налогобложения, млн. грн.
1	-20
2	+10
3	+10
4	+10

Как видим, в первом квартале денежный поток отрицателен - это означает, что требуется внешнее финансирование (считаем, что все возможные внутренние источники использованы, и изменение финансового плана для выравнивания денежных потоков невозможно). В качестве внешнего источника доступен банковский кредит, причем процентная ставка по трехмесячному кредиту равна 30% годовых (номинальная ставка), а если кредит берется на срок от 6 месяцев до 1 года - 40% годовых. Трехмесячный кредит более дешев, но, как видно из финансового плана, денежного потока предприятия во втором квартале будет недостаточно, чтобы вернуть кредит размером 20 млн. грн. вместе с процентами - потребуется снова привлекать заемные средства, и нет гарантии что к этому времени процентные ставки не вырастут. Т.е. присутствует процентный риск, и задача заключается в выборе

[2] Как уже отмечалось, *полной* свободы в выборе портфеля активов и обязательств быть не может. Либо определена структура обязательств, либо - структура активов. Или, при наличии определенной свободы в выборе *и активов, и обязательств*, существуют ограничения, связанные с положением на рынке, нормативным регулированием, целями финансового института, и другими факторами. Тогда эти ограничения должны входить в модель как дополнительные условия, накладываемые на искомое решение.

такого решения по краткосрочному финансированию, которое страховало бы предприятие от риска и одновременно обеспечивало бы максимально возможный посленалоговый денежный поток на собственный капитал. Очевидно, что возможными вариантами решения есть взять в первом квартале кредит на срок три, шесть или девять месяцев, либо использовать определенную их *комбинацию*. Сегодняшним моментом считаем первый квартал и, используя введенные обоначения, текущая стоимость обязательств равна $P_L = 20$ млн. грн. Процентные ставки по кредитам (30% и 40%) указаны в доналоговом исчислении, это означает, что с учетом налоговой защиты по процентным платежам, если ставка налога на прибыль равна 30%, они составят соответственно 30%×(1 - 0,3)=21% и 40%×(1 - 0,3)=28% годовых. Если проценты выплачиваются *поквартально*, это означает, что величина процентных издержек в расчете на одну гривню кредита в посленалоговом исчислении равна 0,0525 грн. при ставке кредита 30%, и 0,07 грн. - при ставке 40%. Тем самым, доступные варианты кредитования могут быть представлены в виде:

Квартал	Денежные потоки в расчете на 1 грн. кредита (в посленалоговом исчислении)			Коэффициент дисконтирования $p_L(t)$	Ставка спот $x_L(t)$, в квартальном исчислении
	Кредит на 1 квартал	Кредит на 2 квартала	Кредит на 3 квартала		
1	+1,00	+1,00	+1,00	1,0000	
2	-1,0525	-0,07	-0,07	0,9501	5,12%
3	-	-1,07	-0,07	0.8724	6,82%
4	-	-	-1,07	0.8153	6,80%

Единицей измерения будем считать один квартал. Первый квартал считаем *сегодняшним* моментом, поэтому $t =$(Номер квартала - 1), плановый горизонт $\tau = 3$ (время от текущего момента до конца года). Коэффициенты дисконтирования $p_L(t)$ рассчитаны цепным методом (см. Пример 3.), ставки спот - по формуле $x_L(t) = -(1/t)\ln p_L(t)$.
В качестве доходности активов (x_A) необходимо взять ставку, по которой могут быть реинвестированы положительные денежные потоки. Пусть это ставка по депозиту, равная, независимо от срока, 5% в квартал. Тогда для потока доходов получим

t	A_t	$x_A(t)$	$p_A(t)$	$t-\tau$	$\widetilde{p}_A(t-\tau)$	$\widetilde{a}_t(\tau)$
1	10	5%	0,9512	-2	1,1052	0,350
2	10	5%	0,9048	-1	1,0513	0,333
3	10	5%	0,8607	0	1,0000	0,317

Дюрация и выпуклость потока доходов, рассчитанные на момент τ , равняются, в соответствии с формулами (6.13), (6.14), соответственно $\mathcal{D}_A(\tau) = -1{,}0333$, $\mathcal{C}_A = 1{,}7336$.
В оптимизационной задаче необходимо найти объем кредита каждого вида (на срок

один, два и три квартала) таким образом, чтобы максимизировать стоимость собственного капитала на конец планового горизонта $P_E(\tau)$. Ограничениями являются (6.11’) и (6.12’), бюджетное ограничение (сумма всех кредитов должна равняться 20 млн. грн.) и ограничение на неотрицательность объемов кредитов. Полученная задача является достаточно простой, решить ее можно без помощи специализированного программного обеспечения - воспользовавшись например, функцией Solver («Поиск решения») электронной таблицы. Оптимальное решение задачи приведено в таблице:

Инструмент	Объем, млн. грн.
Кредит сроком 1 квартал	6,112
Кредит сроком 2 квартала	13,888
Кредит сроком 3 квартала	0

В том, что данное решение действительно страхует от риска колебаний процентной ставки, можно убедиться, исследовав влияние изменение уровня процентных ставок на стоимость собственного капитала на момент τ, и сравнив с другими вариантами выбора источников финансирования (например, использование только одного вида кредита). Результат такого расчета приведен на Рис. 6.3.

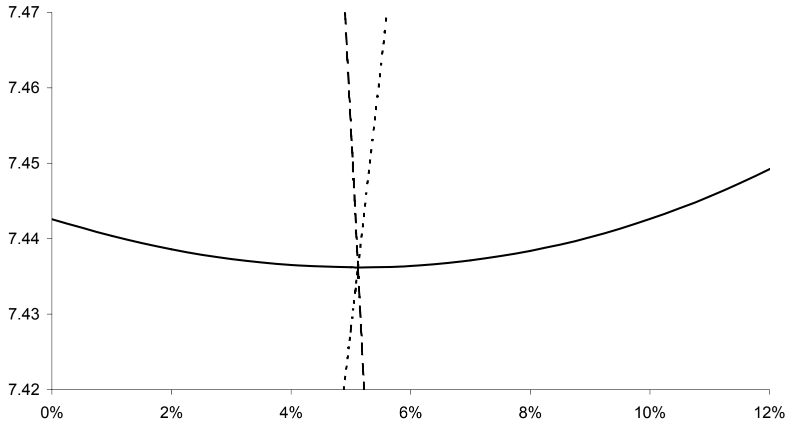


Рис. 6.3 Иммунизация портфеля краткосрочных кредитов (см. Пример 6.2). По вертикали на рисунке - стоимость собственного капитала на момент τ, по горизонтали - уровень процентных ставок. Сплошная линия характеризует иммунизированный портфель, прерывистые линии - выбор только одного инструмента (в данном случае - кредиты сроком 1 и 2 квартала).

Непараллельные сдвиги кривой доходности: кусочная иммунизация

Основным недостатком рассмотренных вариантов стратегий иммунизации остается то, что они защищают стоимость портфеля лишь от *параллельных* сдвигов кривой доходности (пропорционального изменения общего уровня процентных ставок в одном направлении). Тем не менее, метод имунизации может быть обобщен таким образом, чтобы обеспечивать защиту и от других возможных изменений процентных ставок. Содержание подобных обобщенных методов определяется принимаемой *гипотезой* относительно поведения процентных ставок (*моделью процентных ставок*). Ниже рассматривается вариант стратегии иммунизации для простейшей из возможных моделей изменения процентных ставок, допускающей непараллельные сдвиги. Более реалистичные модели динамики процентных ставок рассматриваются в Главе 7. Обобщение различных стратегий хеджирования портфеля содержится в Главе 12.

Предположим, что кривая доходности $x(t)$ может быть поделена на два участка[3]: от сегодняшнего дня до некоторого момента Q, и от момента Q+1 до T, при этом каждая спот-ставка может быть представлена:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + s_0(t), & t = 1,\ldots,Q \\ x_\infty + s_\infty(t), & t = Q+1,\ldots,T \end{cases}$$

где x_0 и x_∞ - сответственно краткосрочная и долгосрочная ставки, $s_0(t)$ и $s_\infty(t)$ - спреды, которые для каждого срока t *постоянны*. По сути, в отличие от предыдущих моделей, мы предполагаем наличие не одного (краткосрочная ставка), а *двух* факторов риска, причем один участок кривой доходности зависит только от краткосрочной ставки, другой - только от долгосрочной. Цена любого инструмента с фиксированным доходом является в таком случае функцией двух переменных: $P_k(x_0, x_\infty)$. Дифференциал данной функ-

[3] Здесь, как и ранее в этой главе, мы считаем время дискретным, т.е. промежутки времени состоят из целого числа элементарных периодов, что нисколько не снижает общность рассматриваемых методов.

ции, измеряющий ее изменение при бесконечно малых приращениях x_0 и x_∞ может быть записан как:

$$dP_k = \frac{\partial P_k}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial P_k}{\partial x_\infty} dx_\infty . \qquad (6.18)$$

Обозначим $\mathfrak{D}_{0,k} = (1/P_k)\partial P_k / \partial x_0$, $\mathfrak{D}_{\infty,k} = (1/P_k)\partial P_k / \partial x_\infty$ (заметим, что сумма данных величин равна дюрации Фишера-Вайля: $\mathfrak{D}_{0,k} + \mathfrak{D}_{\infty,k} = \mathfrak{D}_k$).

Рассмотрим обычную задачу иммунизации, когда есть активы суммарной стоимостью P_A и обязательства стоимостью P_L, и необходимо застраховать текущую стоимость собственного капитала $P_E = P_A - P_L$ от непредвиденных колебаний процентных ставок. Выражение (6.18) справедливо и для стоимости портфеля, т.е. мы можем записать:

$$\begin{aligned} dP_E &= dP_A - dP_L = \mathfrak{D}_{0,A} P_A dx_0 + \mathfrak{D}_{\infty,A} P_A dx_\infty - \mathfrak{D}_{0,L} P_L dx_0 - \mathfrak{D}_{\infty,L} P_L dx_\infty = \\ &= (\mathfrak{D}_{0,A} P_A - \mathfrak{D}_{0,L} P_L) dx_0 + (\mathfrak{D}_{\infty,A} P_A - \mathfrak{D}_{\infty,L} P_L) dx_\infty , \end{aligned}$$

где:

$$\mathfrak{D}_{0,A} = \sum_{t=1}^{Q} t p_A(t) A_t \Big/ P_A , \quad \mathfrak{D}_{0,L} = \sum_{t=1}^{Q} t p_L(t) L_t \Big/ P_L ,$$

$$\mathfrak{D}_{\infty,A} = \sum_{t=Q+1}^{T} t p_A(t) A_t \Big/ P_A , \quad \mathfrak{D}_{\infty,L} = \sum_{t=Q+1}^{T} t p_L(t) L_t \Big/ P_L ,$$

A_t, L_t - как и ранее, денежные потоки по активам и обязательствам в момент t, соответственно.

Стоимость собственного капитала будет независимой от небольших изменений x_0 и x_∞ если будет выполняться:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{0,A} &= (P_L / P_A)\mathfrak{D}_{0,L} \\ \mathfrak{D}_{\infty,A} &= (P_L / P_A)\mathfrak{D}_{\infty,L} \end{aligned} . \qquad (6.19)$$

Так как $\mathfrak{D}_{0,A} + \mathfrak{D}_{\infty,A} = \mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{D}_{0,L} + \mathfrak{D}_{\infty,L} = \mathfrak{D}_L$, выполнение (6.19) означает, что справедливо и (6.11), т.е. данная стратегия обеспечивает, как и обычная иммунизация, страхование от параллельных изменений уровня процентных ставок. Преимуществом данного подхода является хеджирование портфеля для случая, когда краткосрочные и долгосрочные ставки меняются непропорционально, или в различных направлениях.

Обобщения условий (6.19) на случай, когда хеджируется стоимость собственного капитала не на *сегодняшний* момент, а к плановому горизонту τ, аналогичны рассмотренным в п. 8 (см. условие (6.11')).

Пример 6.3 Хеджирование непараллельных сдвигов процентных ставок

Продолжим рассмотрение задачи из Примера 6.2. Пусть тепеть требуется сформировать портфель кредитов, обеспечивающий страхование даже в случае, когда процентные ставки с различным сроком меняются в разных направлениях. Предположим, к примеру, что ставка по трехмесячному кредиту и ставки по более длинным кредитам независимы и могут меняться в различных направлениях (например, трехмесячные ставки растут, а шести- и девятимесячные одновременно снижаются или остаются неизменными, или наоборот), т.е., используя введенные обозначения, примем, что $Q=1$ (напомним, что в качестве единицы времени выбран один квартал). Как и ранее, требуется застраховать стоимость собственного капитала на конец планового горизонта $\tau=3$ (т.е. на конец года). Ограничениями задачи будут условия иммунизации:

$$\mathcal{D}_{0,A}(\tau)=(P_L/P_A)\mathcal{D}_{0,L}(\tau),$$

$$\mathcal{D}_{\infty,A}(\tau)=(P_L/P_A)\mathcal{D}_{\infty,L}(\tau),$$

бюджетное ограничение на суммарный объем кредитов и ограничения на неотрицательность размеров кредитов[4]. Критерий, как и ранее, - максимум стоимости собственного капитала на конец года. Оптимальным решением данной задачи будет:

Инструмент	Объем, млн. грн.
Кредит сроком 1 квартал	8,389
Кредит сроком 2 квартала	9,175
Кредит сроком 3 квартала	2,436

Убедиться в том, что данное решение, в отличие от решения из примера 6.2, эффективно даже в случае, когда ставки колеблются непараллельно, можно исследовав влияние разнонаправленных изменений процентных ставок на стоимость собственного капитала. На Рис. 6.4. приведены результаты таких расчетов. Важно отметить, что лучшее хеджирование не является «бесплатным». Если в Примере 6.2, применяя обычную стратегию иммунизации, стоимость собственного капитала при неизменных процентных ставках равнялась 7,436 млн. грн., то для кусочной иммунизации в настоящем Примере - 7,394 млн. грн. (на Рис. 6.4 - значение при изменении ставки на 0%).

[4] В отличие от Примера 6.2, мы, для простоты, не включали ограничение на выпуклость.

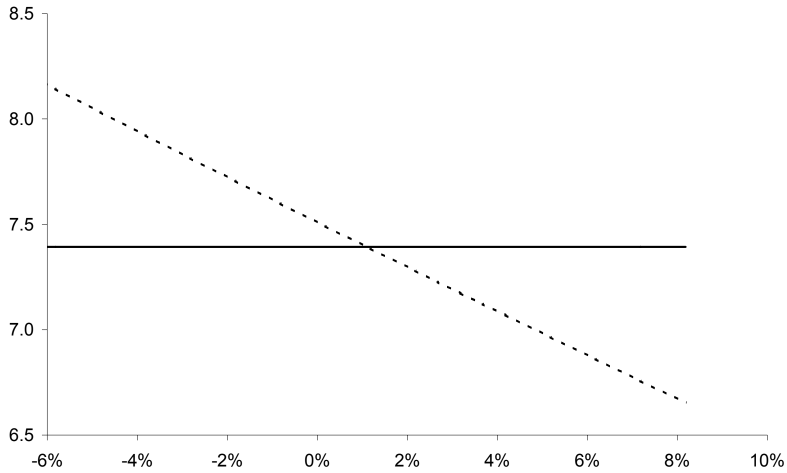


Рис. 6.4 Сравнение эффективности обычной и кусочной стратегий иммунизации (по данным Примеров 6.2 и 6.3). На рисунке, по горизонтальной оси указано *изменение краткосрочной ставки*, при этом *долгосрочные* ставки изменялись пропорционально, но *в противоположном направлении*. *Сплошной* линией показано изменение стоимости капитала при выборе портфеля в соответствии с кусочной стратегией иммунизации, *прерывистая* линия сответствует обычной стратегии иммунизации.

Условная иммунизация

Динамическая иммунизация

VII. Модели

Модели процентных ставок - один из наиболее интенсивно развивающихся разделов современных финансов. В первую очередь это связано с бурным ростом в последние два десятилетия рынков процентных инструментов[1], в первую очередь - рынков всевозможных разновидностей *производных*, что порождает потребность в разработке методов их оценки и использования в стратегиях хеджирования.

Естественным и объяснимым является факт, что финансовые рынки стран Восточной Европы существенно менее развиты и ликвидны по сравнению, с Соединенными Штатами или Западной Европой. Однако это не означает, что использование методов современных финансов, в том числе - связанных с управлением процентным риском, в практике работы финансовых институтов не имеет смысла. Во-первых, потому что, несмотря на неразвитость рынка, *риск процентной ставки существует*, а значит его необходимо контролировать и им необходимо управлять. Во-вторых, потому что существующие тенденции развития рынков, процесс глобализации мировой финансовой системы, приводит к тому, что финансовые инструменты, еще вчера казавшиеся экзотикой, становятся для участников рынка насущно необходимыми. Во-третьих, потому что большое число уже существующих на развивающихся рынках инструментов имеют свойства производных, - денежные потоки по ним зависят от будущих значений процентных ставок. А это означает, что без использования той или иной *модели*, оценить и хеджировать их невозможно.

В то же время следует учитывать, что развивающиеся рынки обладают рядом особенностей, к которым могут относиться относительно высокие уровни инфляции, контроль процентных ставок со стороны центральных банков или правительств, свойства существующей рыночной инфраструк-

[1] Это наблюдение относится, конечно, к финансовыи рынкам развитых стран.

туры, и т.п. Эти особенности могут сделать *неприменимыми* многие популярные модели, вполне работоспособные и эффективные в условиях развитых рынков.

В настоящей главе не преследуется цель дать сколько-нибудь полный обзор существующих моделей процентных ставок - мы рассмотрим лишь *некоторые* принципы и подходы, а также отдельные примеры моделей, которые могут быть использованы (и действительно активно используются) для решения практических задач.

Моделирование процентных ставок - область, требующая достаточно сложного математического аппарата. Акцентируя внимание исключительно на практических аспектах применения рассматриваемых моделей, и стремясь *предельно* упростить изложение, мы, в ущерб математической строгости, ограничимся скорее *интуитивным* пониманием концепций современной финансовой экономики.

Зачем нужна модель

Источником процентного риска является неопределенность, невозможность точного прогнозирования будущих процентных ставок[2]. Однако, не зная - какими в точности будут процентные ставки через месяц или через год, мы знаем, что колебания процентных ставок подвержены определенным закономерностям. Эти знания включают существующие особенности организации и функционирования рынка, а также данные о прошлом (историческом) его развитии. Как минимум, мы знаем, что различные рыночные процентные ставки (и, тем самым, - цены существующих инструментов) более или менее тесно взаимосвязаны между собой. Наличие взаимосвязи между случайными величинами означает, что они находятся под воздействием общих *факторов*. Выбор факторов является, как правило, первым и одним из наиболее важных шагов в построении модели временной структуры. Он может быть сделан достаточно произвольно, когда преследуется цель простоты и прозрачности модели, может основываться на эконометрическом анализе рыночных данных или на некоторой экономической модели равновесия. Далее необходимо определить - в соответствии с какими закономерностями изменяются выбранные факторы (другими словами - какими *случайными процессами* описывается их динамика) и как они связаны с реальными рыночными ценами (процентными ставками). При ответе на последний вопрос как правило предполагают, что существующие рыночные цены не допускают возможности арбитража.

[2] Данное утверждение ни в коем случае не означает, что *прогнозирование* будущих процентных ставок является пустым и ненужным занятием. Речь идет лишь о том, что никакой метод не способен устойчиво давать точные прогнозы - если бы это было возможно, никакого риска не существовало бы.

Случайные процессы, описывающие динамику факторов, всегда зависят от определенного набора *параметров*, поэтому необходимо *откалибровать* модель - найти такие значения параметров, которые наболее точно соответствовали бы наблюдаемым рыночным ценам. На этапе статистического анализа модели важно убедиться, что модель является в достаточной степени *адекватной*, т.е. удовлетворительно описывает соотношения между реальными рыночными показателями и их динамику[3]. Важным (но не всегда обязательным) свойством является *устойчивость* модели - когда она продолжает удовлетворительно описывать реальность даже при относительно существенном изменении рыночных условий.

Наличие модели (в том числе - статистических оценок ее параметров) позволяет решать ряд важнейших задач.

Во-первых, модель дает возможность *оценивать* финансовые инструменты, денежные потоки по которым зависят от выбранных случайных факторов. Оценка в данном случае означает определение такого значения цены, которое исключает арбитраж. Имея информацию о ликвидных инструментах, на основании модели можно оценивать инструменты, которые менее ликвидны или вообще не обращаются на рынке.

Во-вторых, модель необходима для разрабатотки *стратегий хеджирования рисков*, - выбора портфелей финансовых инструментов, стоимость которых не подвержена (точнее - в меньшей степени подвержена) влиянию непредвиденных колебаний случайных факторов. Если некоторая стратегия хеджирования разработана без явного применения модели - это просто означает, что она *неявно* основана на некоторой (возможно, не вполне адекватной) модели.

В-третьих, модель может использоваться как инструмент *контроля риска* - например, для прогнозирования последствий рыночных колебаний для финансового института в целом или для отдельных позиций.

Выбор той или иной модели в любом случае должен соответствовать решаемой задаче. Часто простая модель, не вполне удовлетворительная с точки зрения адекватности, может быть вполне пригодна для решения определенного класса практических задач.

Модели равновесия и арбитражные модели

Способ построения модели структуры процентных ставок во времени может быть различным. В *моделях равновесия* отправной точкой являются предпочтения экономических агентов, и принимаемые на основе этих предпочтений решения. Целью моделирования является определение *абсолют-*

[3] Что, вообще говоря, не всегда возможно. Ряд известных моделей процентных ставок, например, не в состоянии отразить существующие рыночные цены. Требования одновременно описать и текущее состояние, и динамику, могут оказаться взаимоисключающими, и т п.

ных цен в состоянии равновесия - когда все агенты выбрали оптимальные для себя решения. Результат зависит от выбранных предположений, которые могут оказаться слишком упрощающими действительность. Наиболее известной моделью равновесия в области моделирования динамики процентных ставок является модель Кокса-Ингерсолла-Росса (1985) [ ]. Однако ряд других моделей, таких как модель Мертона или модель Васичека, которые не базируются *явно* на условиях равновесия экономической ситемы, также могут быть отнесены к этому классу, поскольку в них постулируются закономерности, в соответствии с которыми ведут себя случайные факторы. В сответствии с Даффи и Каном (1996) [ ], любое явное предположение о закономерностях динамики приоцентных ставок,означает, что в его основе явно или неявно лежит некая модель равновесия.

Арбитражные модели (примерами являются модели Хо-Ли, Халла-Уайта, и множество других) в существенно меньшей степени полагаются на предположения о предпочтениях инвесторов: как правило, достаточно считать, что экономические агенты предпочитают больший доход меньшему. Существующие рыночные цены торгуемых на рынке активов воспринимаются как данность, а цены других (например, производных) инструментов определяются *по отношению* к известным рыночным ценам так, чтобы возможность получения арбитражной прибыли отсутствовала.

И в моделях равновесия, и в арбитражных моделях отправной точкой является предположение о случайных факторах, которые влияют на рыночные цены и закономерностях их динамики.

Однофакторные модели

Простейшее предположение, которое может быть сделано относительно структуры процентых ставок во времени и цен инструментов с фиксированным доходом - зависимость их от *единственного* случайного фактора. Формулы цен простых дисконтных облигаций определяются на основании предположений о вероятностных свойствах данного случайного фактора.

В качестве единственного фактора чаще всего выступает *краткосрочная спот-ставка* - доходность инструментов со сроком погашения один период - в случае дискретного времени, или *мгновенная ставка* - для непрерывного времени. Вообще говоря мгновенная ставка является скорее теоретической абстракцией, поскольку на реальном рынке трудно найти процентную ставку, которая вполне соответствовала бы этому понятию. Однодневные (овернайт) ставки не вполне подходят на эту роль, поскольку данный рынок является чрезвычайно специфичным и ставки овернайт часто слабо коррелированы с другими стаками на рынке. Часто более подходящими на роль мгновенноствки являются более длинные ставки (например недельные или месячные).

Даже если считать, что случайным фактором явяется не краткосрочная ставка, а какой-либо другой параметр, модель всегда может быть преобразована таким образом, что единственным случайным фактором является именно краткосрочная ставка. Предположение о единственном случайном факторе, определяющем колебания всех цен на рынке является чрезвычайно привлекательным вследствие своей простоты: в частности, оно дает возможность разработки относительно простых методов оценки финансовых инструментов.

Имея предположение о случайном процессе, описывающем динамику краткосрочной ставки, относительные цены простых дисконтных облигаций, как и цены других, более сложных, инструментов, определяются исходя из принципа *отсутствия возможности арбитража*.

Одни из первых моделей временной структуры процентных ставок были предложены Робертом Мертоном (1970) [ ], (1973) [ ] и Олдричем Васичеком (1977) [ ]. Неопределенность, в соответствии с данным подходом, ставшим господствующим в теории временной структуры процентных ставок, моделируется с помощью винеровского процесса (процесса броуновского движения). В *непрерывном* времени поведение случайного фактора (краткосрочной ставки x) описывается *процессом Ито* (стохастическим дифференциальным уравнением)

$$\mathrm{d}x = \mu_r(t,x)\mathrm{d}t + \sigma_r(t,x)\mathrm{d}\omega \,, \tag{7.1}$$

где x - мгновенная спот-ставка т.е. доходность[4] простой дисконтной облигации с бесконечно малым сроком погашения(обозначение использовано исключительно для упрощения записи, в действительности x - случайный процесс, т.е. случайная переменная, зависящая от времени t и состояния природы), $\mathrm{d}t$ - бесконечно малый интервал времени, $\mathrm{d}x$ - прирост (изменение) величины x за время $\mathrm{d}t$, $\mu_x(t,x)$ - ожидаемое значение прироста мгновенной ставки, приведенное к годовому измерению, $\sigma_x(t,x)$ - стандартное отклонение (также в годовом измерении) прироста мгновенной ставки, которое в финансах принято называть *волатильностью* (изменчивостью), ω - стандартный винеровский процесс.

Винеровский процесс (не в последнюю очередь, вследствие своей простоты) является важнейшим средством моделирования неопределенности в современных финансах. Стандартным винеровским процессом называют зависимую от времени случайную переменную $\omega(t)$, приращения которой во времени $\Delta\omega = \omega(t+\Delta t) - \omega(t)$ являются *независимыми нормально распределенными случайными величинами*, ожидаемое значение которых равно

[4] В *годовом измерении*: для удобства в качестве единицы времени будем использовать один год. Соответственно, все параметры, характеризующие ставки доходности приводятся в годовом измерении.

нулю, а стандартное отлонение - $\sqrt{\Delta t}$. В непрерывном времени, величину $\mathrm{d}\omega$ можно рассматривать как приращение стандарного винеровского процесса за бесконечно малый интервал времени.

Первое слагаемое в выражении (7.1) моделирует *тенденцию* изменения x , второе слагаемое - случайные колебания. Как тенденция $\mu_x(t,x)$, так и изменчивость (*волатильность*) $\sigma_x(t,x)$ в общем случае могут являться функциями времени и значения переменной x.

Пусть t - некоторый момент времени[5]. Считая, что цена простой дисконтной облигации со сроком погашения τ, $p(\tau)$, является функцией времени t и краткосрочной процентной ставки x (т.е. $p(\tau) \equiv p(t,T,x)$, $\tau = T - t$), в соответствии с известной *леммой Ито* (К. Ито (   ) [ ]) получим выражение для прироста цены за бесконечно малый промежуток времени

$$\mathrm{d}p(\tau) = \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 . \tag{7.2}$$

Подставляя в (7.2) вместо $\mathrm{d}x$ выражение (7.1), и применяя т.н. *мультипликативные правила Ито*[6] ($(\mathrm{d}\omega)^2 = \mathrm{d}t$, $(\mathrm{d}t)^2 = 0$, $\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t = 0$) получим

$$\mathrm{d}p(\tau) = \mu_p(t,x)\mathrm{d}t + \sigma_p(t,x)\mathrm{d}\omega , \tag{7.3}$$

где

$$\mu_p = \frac{\partial p}{\partial t} + \mu_x(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_x^2(t,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} , \tag{7.4}$$

$$\sigma_p = \sigma_x(x,t)\frac{\partial p}{\partial x} . \tag{7.5}$$

Цены простых дисконтных облигаций на конкурентном рынке должны быть такими, чтобы не существовало возможности арбитража. Выберем портфель, состоящий из облигаций двух видов (два различных срока погашения - t_1 и t_2) таким образом, чтобы его доходность за бесконечно малый промежуток времени была детерминированной величиной. Двух видов облигаций для этой цели достаточно, так как существует *лишь один* фактор риска - мгновення спот-ставка. Стоимость портфеля, состоящего из *одной*

---

[5] Обозначения здесь и далее несколько изменены по сравнению с предыдущими главами. Мы переходим к рассмотрению *динамики* процентных ставок, поэтому понятия *момент* времени и *промежуток* вемени теперь имеют разное значение. Моменты будут обозначаться латинскими буквами (t или T; текущий момент времени, как правило, обозначается t), *промежутки* времени от текущего момента до некоторого момента в будущем обозначаются греческими буквами (например, $\tau = T - t$).

[6] По сути, лемму Ито, являющуюся краеугольным камнем большинства современных финансовых теорий, можно рассматривать как стохастический *аналог* разложения обычной детерминированной функции в ряд Тейлора, когда точность разложения ограничивается вторым порядком производных.

простой дисконтной облигации со сроком погашения t_1 и η облигаций сроком t_2 равна

$$V = p(t_1) + \eta p(t_2)\,. \tag{7.6}$$

Далее, для упрощения записи $p(t_1)$ будем обозначать как p_1, $p(t_2)$ - как p_2. Прирост стоимости портфеля за бесконечно малый промежуток времени будет равен

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}p_1 + \eta \mathrm{d}p_2 = (\mu_1 + \eta\mu_2)\mathrm{d}t + (\sigma_1 + \eta\sigma_2)\mathrm{d}\omega\,, \tag{7.7}$$

где

$$\mu_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \mu_x(t,x)\frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_x^2(t,x)\frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2}\,,\ \sigma_i = \sigma_x\frac{\partial p_i}{\partial x}\,,\ i = 1{,}2\,.$$

Для того, чтобы доходность портфеля за время dt была детерминированной, необходимо, чтобы в выражении (7.7) коэффициент при случайной величине $\mathrm{d}\omega$ равнялся нулю, т.е.

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial p_2}{\partial x} = 0\,,$$

тем самым, коэффициент хеджирования (в данном случае - количество облигаций сроком погашения t_2) должен быть равен

$$\eta = -\frac{\partial p_1}{\partial x}\bigg/\frac{\partial p_2}{\partial x} \tag{7.8}$$

Доходность безрискового портфеля (прирост стоимости в процентах) за время $\mathrm{d}t$, *если арбитраж невозможен*, должна равняться безрисковой мгновенной ставке

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = x\mathrm{d}t\,. \tag{7.9}$$

или, принимая во внимание содержимое портфеля:

$$\mathrm{d}V = x(p_1 + \eta p_2)\mathrm{d}t\,. \tag{7.10}$$

Приравнивая выражения (7.7) и (7.10), с учетом того, что величина η выбрана так, чтобы отсутствовал риск (т.е. в соответствии с (7.8)), после преобразований получим:

$$(\mu_1 - xp_1)\bigg/\frac{\partial p_1}{\partial x} = (\mu_2 - xp_2)\bigg/\frac{\partial p_2}{\partial x}\,.$$

Разделив последнее выражение на σ_x, получим, что *для всех* простых дисконтных облигаций, если отсутствует возможность арбитража, должно выполняться условие:

$$\frac{\mu_p - xp}{\sigma_p} = \lambda . \qquad (7.11)$$

Здесь λ - величина, называемая *рыночной премией за риск*. Действительно, правая часть последнего выражения представляет собой т.н. *коэффициент Шарпа* для простой дисконтной облигации: числитель - это разница между ожидаемым доходом по облигации за бесконечно малый промежуток времени и безрисковым доходом, получаемым за это же время от инвестирования суммы p (цена облигации), знаменатель - волатильность облигации (все величины в годовом измерении). В общем случае λ может зависеть от времени и уровня краткосрочной ставки: $\lambda \equiv \lambda(t,x)$, но не зависит от характеристик конкретной облигации (в частности срока погашения).

Если λ равняется нулю, это означает, что все простые дисконтные облигации, независимо от срока погашения приносят инвесторам одинаковую доходность, которая равна краткосрочной ставке: $\mu_p = xp$, т.е. инвесторы не получают *премии за риск*, инвестируя в относительно более долгосрочные инструменты. Это возможно только если инвесторы обладают свойством нейтральности к риску (напомним, что нейтральным к риску называют человека для которого гарантированный доход C и случайный доход $\widetilde{C}$, ожидаемая величина которого равна C, являются совершенными заменителями). В действительности, это не так. Гораздо более правдоподобно считать, что большинство инвесторов к риску *не склонны*, т.е. выбирая между известной суммой денег C и случайной $\widetilde{C}$, такой, что $\mathbb{E}[\widetilde{C}] = C$, всегда отдают предпочтение гарантированному получению C. Это означает, что рисковые вложения могут заинтересовать инвестора, только если они приносят больший средний доход по сравнению с безрисковыми. В нашем случае, за малый промежуток премени инвестор может получить гарантированно x процентов годовых, либо может купить облигацию с более отдаленным сроком погашения - доход по ней за малый интервал времени случаен, так как зависит от будущих значений процентных ставок. Средняя (ожидаемая) доходность (в процентах годовых) по облигаци равна μ_p / p, и данная облигация может быть привлекательной для несклонного к риску инвестора только если $(\mu_p / p) - x > 0$, что означает $\lambda < 0$ (т.к. $\sigma_p = (\partial p / \partial x)\sigma_x < 0$ вследствие обратной зависимости цен процентных ставок).

Величина λ показывает сколько единиц дополнительного дохода инвестор может получить в расчете на одну дополнительную единицу риска (волатильности), на рынке она должна быть одинакова для всех инструментов, т.к. иначе бует возможен т.н. межвременной арбитраж - по отдельным облигациям на единицу риска можно будет получить больший доход. чем по другим, что неизбежно приведет к корректировке цен, пока для всех облигаций не будет выполняться (7.11).

Переписав уравнение (7.11), подставляя выражения для μ_p и σ_p (см. (7.4), (7.5)) получим следующее *дифференциальное уравнение в частных производных*:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mu_x - \lambda\sigma_x)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_x^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - xp = 0\,. \tag{7.12}$$

Найти выражение для цены простой дисконтной облигации, можно решив данное уравнение (для определенного вида функций[7] $\mu_x(t,x)$ и $\sigma_x(t,x)$). Предельным условием при решении уравнения (7.12) является равенство цены облигации в момент погашения единице, т.е. если T - момент погашения облигации, то в момент $t = T$ выполняется $p(T,T) = 1$.

Модель Васичека

Собственно *моделью Васичека* называют модель временной структуры процентных ставок, в которой динамика краткосрочной ставки имеет *тенденцию возврата* к равновесному значению[8], т.е. $\mu_x(t,x) = \alpha(\mu - x)$, где μ - долгосрочное равновесное значение краткосрочной ставки (константа), α - параметр, определяющий скорость возвратной тенденции (скорость приближения x к равновесному значению μ). Стандартное отклонение прироста процентной ставки в модели Васичека является константой, не зависящей от времени и значения x: $\sigma_x(t,x) \equiv \sigma$. Случайный процесс, описывающий динамику краткосрочной ставки в модели Васичека носит название процесса Орнштейна-Улинбека

$$\mathrm{d}x = \alpha(\mu - x)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{7.13}$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (7.12) запишется как

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left[\alpha(\mu - x) - \lambda\sigma\right]\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - xp = 0\,, \tag{7.14}$$

причем рыночная премия за риск λ в модели Васичека также является константой.

Решением данного уравнения (с предельным условием $p(T,T) = 1$) является выражение для цены простой дисконтной облигации, погашаемой в момент T (через $\tau = T - t$ лет)

$$p(t,T) \equiv p(\tau) = e^{-\chi(\tau)\tau}\,, \tag{7.15}$$

[7] Явное решение можно получить не для всех возможных функций μ и σ.

[8] Наличие данного свойства почти всегда наблюдается в действительной динамике процентных ставок.

a.mertens

где $\chi(\tau) \equiv \chi(t, T, x)$ - *доходность* простой дисконтной облигации (спот-ставка) определяется как

$$\chi(\tau) = x\frac{\phi(\tau)}{\tau} + \left(\mu - \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)\frac{\tau - \phi(\tau)}{\tau} + \frac{(\sigma\phi(\tau))^2}{4\alpha\tau}, \tag{7.16}$$

где $\phi(\tau) = (1 - e^{-\alpha\tau})/\alpha$. Обозначим через x_∞ значение $\chi(\tau)$ при $\tau \to \infty$ (предельное значение долгосрочной ставки):

$$x_\infty = \lim_{\tau\to\infty}\chi(\tau) = \mu - \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}.$$

Тогда выражение для ставки спот в модели Васичека может быть представлено в виде

$$\chi(\tau) = x_\infty + (x - x_\infty)\frac{\phi(\tau)}{\tau} + \frac{(\sigma\phi(\tau))^2}{4\alpha\tau}. \tag{7.17}$$

Определив функцию $\psi(\tau)$

$$\psi(\tau) = \left(\mu - \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)(\tau - \phi(\tau)) + \frac{(\sigma\phi(\tau))^2}{4\alpha}, \tag{7.18}$$

выражение (7.16) для цены простой дисконтной облигации можно записать

$$p(\tau) = \exp(-\phi(\tau)x - \psi(\tau)). \tag{7.19}$$

Модель Мертона

Модель, в которой как и в модели Васичека все параметры - константы, но в отличие от последней возвратная тенденция в динамике краткосрочной ставки отсутствует, т.е. динамика мгновенной ставки описыается процессом $\mathrm{d}x = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega$ (μ и σ - константы), называют *моделью Мертона* (1970) [ ]. В этом случае спот-ставка сроком τ лет определяется в соответствии с соотношением

$$\chi(\tau) = x + \frac{1}{2}(\mu - \lambda\sigma)\tau - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^2, \tag{7.20}$$

цена простой дисконтной облигации соответственно

$$p(\tau) = \exp(-x\tau - \psi(\tau)),$$

где

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2}(\mu - \lambda\sigma)\tau^2 - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3.$$

Модель Мертона используется в основном в иллюстративных целях - как наиболее простая и интуитивно понятная модель временной структуры процентных ставок. Одним из основных ее недостатков является то, что представление спот-ставок как квадратичных функций времени погашения является абсолютно нереалистичным результатом - в частности, выражение (7.20) предполагает, что, начиная с определенного срока погашения ставки обязательно начинают снижаться и даже становятся отрицательными (см. Рис. 7.1). Кроме того, квадратичная функция слишком проста, чтобы иметь возможность отразить реальную структуру процентных ставок во времени (фактические рыночные цены).

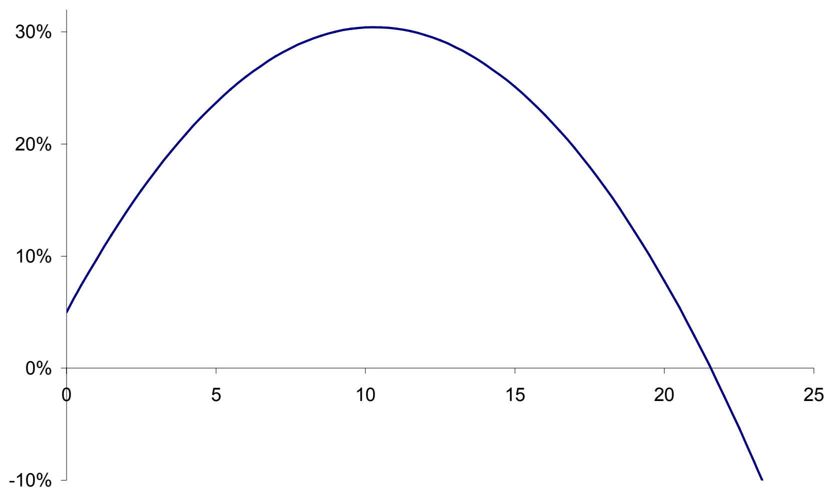


Рис. 7.1 Кривая спот-ставок в модели Мертона при значениях параметров (по горизонтали - время в годах).

Спот-кривая в модели Васичека (выражение (7.16)) является более гибкой по сравнению с моделью Мертона, хотя недостаточно для того, чтобы удовлетворительно моделировать реальные рыночные цены (см. Пример 7.2), и также допускает возможность отрицательных ставок.

Оценка параметров модели Васичека

Для практического использования модели структуры процентных ставок необходимо, используя рыночную информацию, оценить ее параметры. Оценивание параметров - один из наиболее важных и сложных этапов в моделировании временно́й структуры. Существует множество возможных подходов к решению этой задачи. Различия состоят в том - какие данные и какие статистические методы используются для оценивания. Первый возможный подход - отдельные параметры, такие как скорость возвратной тенденции и долгосрочные равновесные значения процентных ставок в модели Васичека, оцениваются на основании исторических данных о динамике процентных ставок (временных рядов). Затем, недостающие параметры (например, рыночная премия за риск) подбирается таким образом, чтобы модель наилучшим образом воспроизводила рыночные цены. Альтернативный подход - подгонка параметров модели только лишь под текущие рыночные цены, добиваясь наиболее точного воспроизведения их моделью. Основным недостатком использования временных рядов является то, что в действительности параметры меняются во времени, и полученные на основании статистических процедур оценки в лучшем случае отражают их прошлые значение, тогда как для адекватного решения практических задач необходимы сегодняшние и ожидаемые в будущем. Поэтому для решения практических задач более приемлемым чаще всего оказывается второй подход.

Не менее важный вопрос - какой именно набор рыночных инструментов использовать для оценивания. Выбор зависит от того - какая информация доступна и с какой целью предполагается использовать модель. Скажем, если на рынке торгуют только простыми долговыми обязательствами, то в лучшем случае параметры можно оценить на основании текущей кривой доходности, использовать же данные о рыночных ценах опционов (без которых сложно обойтись оценивая инструменты со сложной нелинейной финансовой структурой) невозможно за отсутствием последних.

На основании *временного ряда* значений краткосрочной ставки могут быть оценены параметры μ, α и σ модели Васичека. Для этого можно использовать дискретный (с шагом Δt) вариант процесса (7.13)

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\alpha(\mu-x(t))\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon(t)\,. \tag{7.21}$$

где $\varepsilon(t)$ - нормально распределенные случайные величины со средним 0 и дисперсией 1. Обозначим через x_t наблюдение над краткосрочной ставкой в момент t ($t=0,1,\ldots,T$). Оценив параметры a и b линейной регрессии

$$x_{t+1}=a+bx_t+u_t\,, \tag{7.22}$$

получим оценки параметров

$$\hat{\mu}=\frac{a}{1-b}\,,\ \hat{\alpha}=\frac{1-b}{\Delta t}\,,\ \hat{\sigma}=\left(\frac{\mathrm{VAR}[u_t]}{\Delta t}\right)^{1/2}. \tag{7.23}$$

Ключевой проблемой в данном случае является то, что оценки, полученные с помощью обычного метода наименьших квадратов как правило не удовлетворительны. Это может быть связано с двумя причинами, которые могут проявляться одновременно: (1) неадекватность метода оценивания (отличное от нормального распределение остатков, автокорреляция остатков, гетероскедастичность) и (2) неадкватность самой модели - если процесс (7.21) неверно описывает реальную динамику процентных ставок. Проблема неадекватноти обычного метода наименьших квадратов может быть решена, если перейти к использованию других методов - таких как обобщенный метод моментов или метод максимального правдоподобия.

Проиллюстрируем примнение обобщенного метода моментов для оценки параметров модели Васичека. Величины u_t в регрессии (7.22) должны удовлетворять целому ряду условий - быть номально распределенными со средним 0 и дисперсией $\sigma^2 \Delta t$, что, в частности, означает

$$\mathbb{E}[u_t] = 0\,,\ \mathbb{E}[u_t^2 - \sigma^2\,\Delta t] = 0\,, \tag{7.24}$$

быть серийно некоррелированными с x_t, т.е. как минимум

$$\mathbb{E}[u_t x_t] = 0\,,\ \mathbb{E}[x_t(u_t^2 - \sigma^2\,\Delta t)] = 0\,, \tag{7.25}$$

быть серийно некоррелироваными между собой

$$\mathbb{E}[u_t u_{t+1}] = 0\,, \tag{7.26}$$

и т.п. На основании условий (7.24) - (7.26) запишем соответствующие моменты для выборки x_t ($t = 0,1,\ldots,T$)

$$m_1 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m_{1t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(a + bx_{t-1} - x_t)\,, \tag{7.27}$$

$$m_2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m_{2t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[(a + bx_{t-1} - x_t)^2 - \sigma^2\,\Delta t\right], \tag{7.28}$$

$$m_3 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t(a + bx_{t-1} - x_t)\,, \tag{7.29}$$

$$m_4 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t\left[(a + bx_{t-1} - x_t)^2 - \sigma^2\,\Delta t\right], \tag{7.30}$$

$$m_5 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1}(a + bx_{t-1} - x_t)(a + bx_t - x_{t+1})\,. \tag{7.31}$$

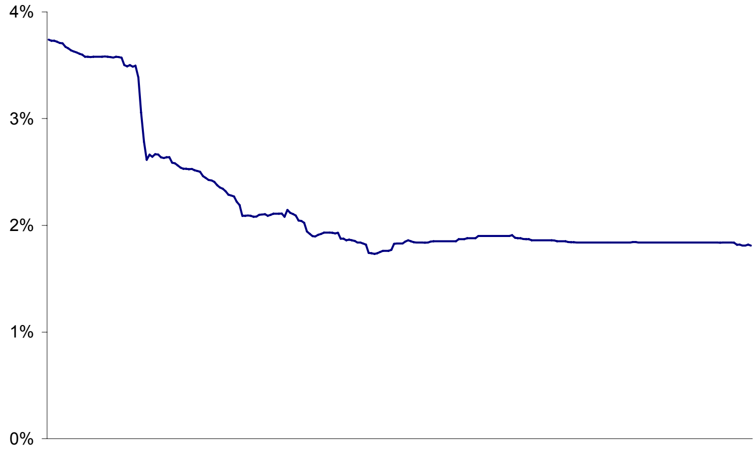


Рис. 7.2 LIBOR сроком один месяц по доллару США (период с июля 2001 по июль 2002 г., ежедневные данные).

Обозначим $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_5)'$, $\boldsymbol{m}_t = (m_{1t}, \ldots, m_{5t})'$. Оценка вектора параметров (α, b, θ) обобщенным методом моментов сводится к нахождению таких их значений, которые минимизируют функцию

$$\boldsymbol{m}'\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{m}\,, \tag{7.32}$$

где $\boldsymbol{W}$ - матрица весовых коэффициентов, определяемая как[9]

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{m}_t \boldsymbol{m}_t'\,, \tag{7.33}$$

Боле простой (но не оптимальный в случае, когда количество моментов превышает количество оцениваемых параметров) критерий - минимизировать сумму квадратов моментов

$$\boldsymbol{m}'\boldsymbol{m}\,. \tag{7.34}$$

Метод максимального правдоподобия, по-видимому, является наиболее предпочтительным для оценки параметров модели Васичека по историческим данным. Оценками будут такие значения (α, b, θ), при которых функция

$$-\frac{\alpha}{\sigma^2(1-e^{-2\alpha\Delta t})}\sum_{t=1}^{T}\left[x_t - (\mu + e^{-\alpha\Delta t}(x_{t-1}-\mu))\right] - \frac{T}{2}\ln\left[\frac{\sigma^2(1-e^{-2\alpha\Delta t})}{2\alpha}\right] \tag{7.35}$$

[9] Матрица весовых коэффициентов $\boldsymbol{W}$ - это оценка асимптотической ковариационной матрицы вектора $\boldsymbol{m}$ (см. Грин (1993) [ ]).

достигает максимума. (7.35) является логарифмом функции правдоподобия (без слагаемого $-(T/2)\ln(2\pi)$, не влияющего на поиск оптимума).

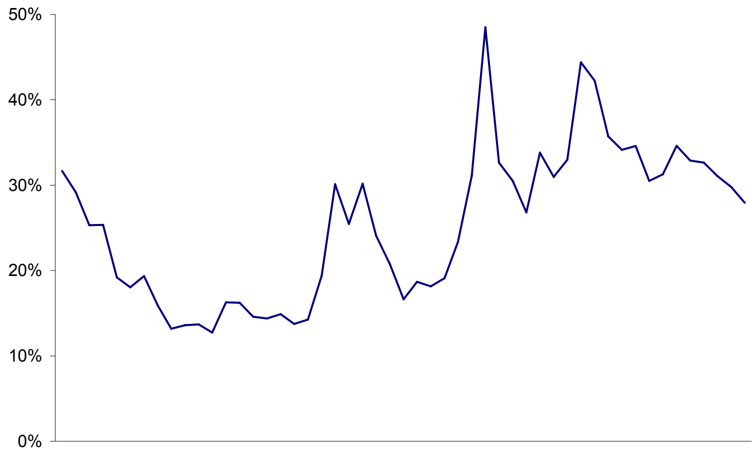


Рис. 7.3 Средневзвешенная ставка по межбанковским кредитам сроком один месяц на киевском рынке (период с ноября 2000 по ноябрь 2001 г., недельные данные).

Пример 7.1 Оценка параметров модели Васичека по историческим данным

В качестве примера проведем оценку параметров модели Васичека используя два массива данных - еженедельные данные по средним ставкам Киевского рынка межбанковских кредитов (KIBOR) сроком один месяц за период с ноября 2000 по ноябрь 2001 г. (Рис. 7.3) и ставки 1-месячного LIBOR по доллару США за период с июля 2001 по июль 2002 г. (ежедневные данные - Рис. 7.2).

Для оценки использовались три метода - (1) оценка регрессии (7.22) обычным методом наименьших квадратов, (2) обычный метод моментов: использованы моменты (7.27), (7.28), (7.30); т.к. число моментов в данном случае равно числу параметров, минимизируется (точнее - приравнивается к нулю) критерий (7.34), и (3) метод максимального правдоподобия.

Полученные оценки параметров приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 Параметры модели Васичека по данным USD LIBOR (2001 - 2002) и KIBOR (2000 - 2001)

	μ	α	σ
		LIBOR (2001 - 2002)	
Метод наименьших квадратов	0.01653	5.1649	0.0062
Метод моментов	0.01653	5.2018	0.0088
Метод максимального правдоподобия	0.01653	5.2018	0.0088

	KIBOR (2000 - 2001)		
Метод наименьших квадратов	0.2492	8.6379	0.3539
Метод моментов	0.2418	9.7251	0.3843
Метод максимального правдоподобия	0.2492	9.4437	0.5410

Как видим, в случае LIBOR метод моментов и метод максимального правдоподобия дали идентичные результаты, тогда как оценки обычного МНК несколько отличаются. В случае с KIBOR все три метода дали различные результаты. В целом, еще раз подчеркнем неадекватность применения как МНК так и обычного метода моментов для данной задачи (в последнем случае по причине того, что результаты зависят от выбора моментов), поэтому следует использовать метод максимального правдоподобия либо обобщенный метод моментов.

Значение премии за риск λ необходимо подобрать таким образом, чтобы наиболее точно воспроизвести реальную кривую доходности. Пусть имеются фактические значения спот-ставок на определенную дату (первая колонка в таблице 7.2). Значение λ подберем таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений фактических ставок и теоретических значений, расчитываемых в соответствии с формулой (7.17). Получим, что

$$\lambda = -7{,}456\,,\ x_\infty = 2{,}909\%\,.$$

Фактические значения процентных ставок и теоретическая кривая доходности модели Васичека представлены на Рис. 7.4 и в таблице 7.2. Как видим, полученная торетическая кривая и реальные значения существенно различаются - результат, который нельзя считать удовлетворительным. Причинами являются слишком простая форма кривой спот-ставок в модели Васичека, а также использование значений параметров, оцененных по историческим данным: подбор только лишь одного параметра λ недостаточен, чтобы даже с минимальной точностью воспроизвести реальные рыночные цены.

Таблица 7.2 Фактическая и теоретическая (модель Васичека) кривые доходности (μ, α и σ оценены по историческим данным методом максимального правдоподобия)

Срок (τ)	$\chi(\tau)$		$p(\tau)$	
	Фактич.	*Модель*	*Фактич*	*Модель*
1 мес.	1.810%	1.330%	0.9985	0.9989
3 мес.	1.812%	1.820%	0.9955	0.9955
6 мес.	1.830%	2.216%	0.9909	0.9890
9 мес.	1.875%	2.420%	0.9860	0.9820
1 год	1.975%	2.537%	0.9804	0.9749
2 года	2.350%	2.722%	0.9541	0.9470
5 лет	3.150%	2.834%	0.8543	0.8679
10 лет	3.950%	2.872%	0.6737	0.7504

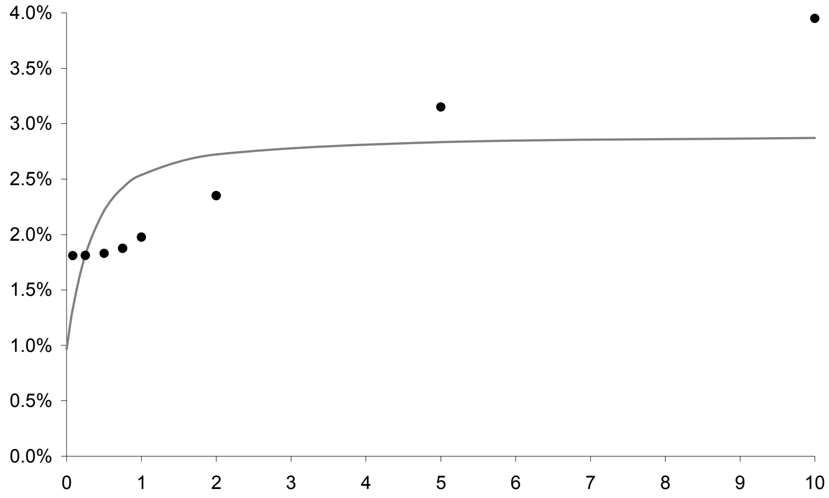


Рис. 7.4 Фактическая (точки; данные - первая колонка табл. 7.2) и теоретическая (сплошная линия) кривые спот-ставок по доллару США. Рисунок иллюстрирует недовлетворительное воспроизведение моделью реальных рыночных цен в случае, когда параметры оценивались по историческим данным.

Если сама модель неверно описывает исходные данные, - это возможно означает необходимость выбора другой (более адекватной) модели. Проблема состоит в том, что, как показывают исследования (см. напр. известную работу Чан и др. (1992) [ ]), *практически все известные однофакторные модели неудовлетворительно моделируют динамику процентных ставок*. Означает ли это, что однофакторные модели не имеют никакого практического значения? Нет, не означает, но необходимо правильно понимать - какие задачи могут быть решены с помощью однофакторных моделей, а какие - нет. Критически важно внимательное отношение к выбору методов оценивания параметров модели и проверка того - выполняются ли предположения, лежащие в основе используемой статистической процедуры.

Альтернативный подход оценивания параметров модели - подгонка не под исторические данные, а под текущие рыночные цены. Основной аргумент в пользу этого состоит в том, что именно текущие, а не прошлые цены содержат информацию об ожиданиях рынка относительно будущих уровней доходности, волатильности, и т.п. Подгонка модели под цены простых долговых обязательств (текущую кривую доходности) в целом аналогична рассмотренным в 4-главе задачам сглаживания кривой доходности, но теперь функциональная форма кривой определяется избранной моделью - например, в модели Васичека функциональная форма кривой спот-ставок задана выражением (7.16). Набором оцениваемых параметров может быть

$(x_\infty, \alpha, \sigma)$ либо $(\tilde{\mu}, \alpha, \sigma)$, где $\tilde{\mu} = \mu - \lambda\sigma / \alpha$. Отметим, что используя только лишь текущие данные (перекрестную выборку) невозможно оценить рыночную премию за риск λ. Для этого нужно дополнительно, на основании временного ряда краткосрочной ставки (исторических данных) оценить величину μ.

Пример 7.2 Оценка параметров модели Васичека по текущей кривой доходности

Воспользуемся данными о процентных ставках по доллару США из первой колонки табл.7.2.

Параметры $(\tilde{\mu}, \alpha, \sigma)$ будем выбирать таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений фактических и теоретических (выражение (7.17)) спот-ставок. В качестве оценки для μ используем полученную из исторической информации величину 0,01653. В результате решения задачи минимизации получены следующие значения параметров:

$$\tilde{\mu} = 0{,}06292\,,\ \alpha = 0{,}1566\,,\ \sigma = 0{,}000974\,,\ \lambda = -7{,}456\,.$$

Фактические и теоретические (соответствующие полученным знаениям параметров) значения ставок спот и коэффициентов дисконтирования приведены в табл. 7.3. и на Рис. 7.5. Как видим, даже выбирая параметры, наилучшим образом соответствующие наблюдаемой кривой доходности, добиться точного воспроизведения последней с помощью модели не удается, что является еще одним подтверждением слишком упрощенного характера модели Васичека.

Явным недостатком рассмотренного подхода является сложность решения задачи нелинейной оптимизации (минимизации суммы квадратов отклонений). Так как оцениваемые параметры входят в целевую функцию в сочетании одни с другими, различные комбинации параметров обеспечивают практически одну и ту же точность приближения к оптимальному значению целевой функции (кроме того, возможно наличие нескольких локальных минимумов, т.е. результат становится зависимым от начального приближения). Соответственно, говорить о точных оценках парметров (в частности, волатильности σ) не приходится.

Таблица 7.3 Фактическая и теоретическая (модель Васичека) кривые доходности (параметры модели оценены таким образом, чтобы наболее точно воспроизвести текущие фактические знения процентных ставок)

Срок (τ)	$\chi(\tau)$		$p(\tau)$	
	Фактич.	*Модель*	*Фактич*	*Модель*
1 мес.	1.810%	1.720%	0.9985	0.9986
3 мес.	1.812%	1.779%	0.9955	0.9956
6 мес.	1.830%	1.865%	0.9909	0.9907
9 мес.	1.875%	1.950%	0.9860	0.9855
1 год	1.975%	2.032%	0.9804	0.9799
2 года	2.350%	2.341%	0.9541	0.9543
5 лет	3.150%	3.100%	0.8543	0.8564
10 лет	3.950%	3.966%	0.6737	0.6726

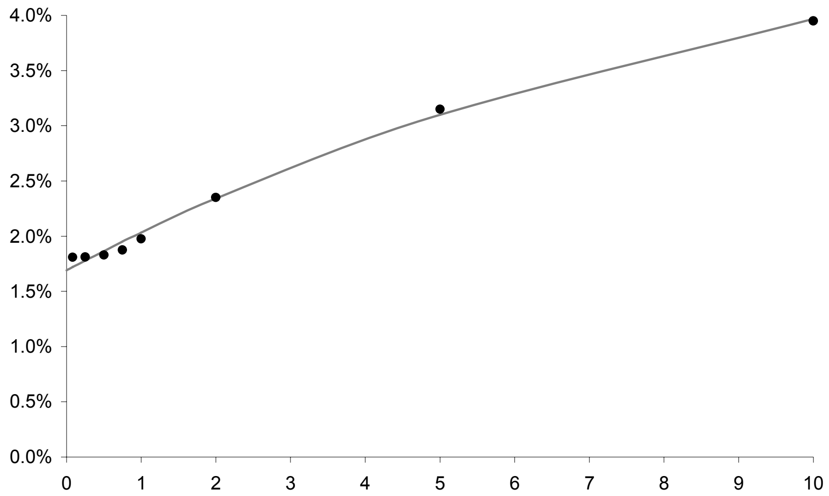


Рис. 7.5 Фактическая (точки) и теоретическая (сплошная линия) кривые спот-ставок по доллару США при подгонке параметров модели Васичека под текущую кривую доходности.

Модель Халла-Уайта

Модель Васичека упрощает действительность как минимум в силу того, что все параметры считаются константами, в то время как статистические наблюдения за динамикой процентных ставок свидетельствуют о том, что как равновесные значения, так и волатильность процентных ставок, по-видимому, меняются со временем. Модель, аналогичная модели Васичека по форме случайного процесса, но с изменяющимися во времени параметрами, носит название модели Дж. Халла и А. Уайта (1990) [ ], (1993) [ ] или *расширенной модели Васичека*. Динамика краткосрочной ставки в модели Халла-Уайта может быть представлена как

$$\mathrm{d}\,x(t) = \alpha(t)(\mu(t) - x)\,\mathrm{d}\,t + \sigma(t)\,\mathrm{d}\,\omega\,. \tag{7.35}$$

В практических приложениях часто используется частный случай модели Халла-Уайта, когда параметры α и σ, как и в модели Васичека, являются константами:

$$\mathrm{d}\,x(t) = \alpha(\mu(t) - x)\,\mathrm{d}\,t + \sigma\,\mathrm{d}\,\omega\,. \tag{7.36}$$

Изменчивость во времени равновесного значения процентной ставки влечет изменчивость во времени премии за риск $\lambda \equiv \lambda(t)$. Введя обозначение

$$\theta(t) = \alpha\mu(t) - \lambda(t)\sigma ,$$

дифференциальное уравнение в частных производных (7.12) для случая (7.36) можно записать как

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\theta(t) - \alpha x)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - xp = 0 . \tag{7.37}$$

Решением уравнения (7.37) является цена простой дисконтной облигации в модели Халла-Уайта

$$p(\tau) = \exp(-\phi(\tau)x - \psi(\tau)) , \tag{7.38}$$

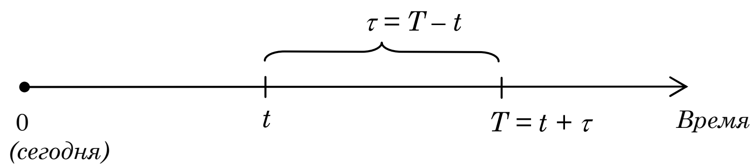
где $\phi(\tau)$ определяется также, как и ранее

$$\phi(\tau) = \frac{1 - \exp(-\alpha\tau)}{\alpha} , \tag{7.39}$$

а функция $\psi(\tau)$ принимает вид

$$\psi(\tau) = -\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(\tau - \phi(\tau)) + \frac{(\sigma\phi(\tau))^2}{4\alpha} + \int_t^{t+\tau}\phi(t+\tau-s)\theta(s)\,\mathrm{d}\,s . \tag{7.40}$$

Наиболее важным преимуществом модели Халла-Уайта по сравнению с классической моделью Васичека является возможность *точного* отображения фактических рыночных цен (рыночной структуры процентных ставок во времени). Это достигается за счет подбора соответствующей функции $\theta(t)$. Пусть 0 - сегодняшний момент времени:



сответственно, если $p_0(t) = p(0,t)$ - наблюдаемая на рынке в момент 0 кривая коэффициентов дисконтирования ($t \in [0,T]$ - момент погашения),

$$\varphi_0(t) = -(\partial p_0(t)/\partial t)/p_0(t)$$

- соответствующая ей кривая форвардных ставок, то функция $\theta(t)$, определенная как

$$\theta(t) = \alpha\varphi_0(t) + \frac{\partial\varphi_0(t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}) , \tag{7.41}$$

обеспечит точное соответствие модели и наблюдаемой на рынке структуры процентных ставок.

С учетом (7.41) цена простой дисконтной облигации, погашаемой в момент $T = t + \tau$, в момент t будет равна

$$p(\tau) = \exp(-\tau\chi(\tau)) = \exp\left(-\phi(\tau)(x - \varphi_0(t)) - \int_t^{t+\tau} \varphi_0(s)\mathrm{d}s - \frac{\upsilon^2}{2}\right), \tag{7.42}$$

где

$$\upsilon = \sigma\phi(\tau)\left(\frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}\right)^{1/2};$$

интеграл в показателе степени правой части выражения (7.42) можно представить как известную на момент 0 форвардную ставку на промежутке между t и $t + \tau$:

$$\int_t^{t+\tau} \varphi_0(s)\mathrm{d}s = \ln(p_0(t+\tau)/p_0(t)) = \tau\varphi_0(t, t+\tau),$$

тем самым, (7.42) можно переписать как

$$p(\tau) = \frac{p_0(t+\tau)}{p_0(t)}\exp\left(-\phi(\tau)(x - \varphi_0(t)) - \frac{\upsilon^2}{2}\right). \tag{7.42'}$$

Модель Хо-Ли

Модель Т. Хо и С.-Б. Ли (1986) [ ] - исторически первая модель, построенная таким образом, чтобы *в точности* воспроизводить реальную временную структуру процентных ставок. В этом она подобна модели Халла-Уайта, являясь, по-существу, частным случаем последней. Отличие состоит в отсутствии возвратной тенденции в динамике краткосрочной ставки, что, очевидно, является одним из основных ее недостатков. Изначально авторами была разработана модель в дискретном времени. В *непрерывном аналоге* модели Хо-Ли динамика краткосрочной ставки описывается процессом

$$\mathrm{d}x = \alpha(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega. \tag{7.43}$$

Дифференциальное уравнение в частных производных, являющееся условием отсутствия арбитражных возможностей принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\alpha(t) - \lambda\sigma)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - xp = 0 \tag{7.44}$$

Решением уравнения (7.44) с предельным условием $p(T,T)=1$ является цена (на момент t) простой дисконтной облигации, погашаемой в момент T ($\tau = T - t$)

$$p(\tau) = \exp(-\chi(\tau)\tau) = \exp(-x\tau - \psi(\tau)),$$

где

$$\psi(\tau) = -\frac{1}{2}\lambda\sigma\tau^2 - \frac{1}{6}\sigma^2\tau^3 + \int_{T-\tau}^{T}\mu(s)(T-s)\,\mathrm{d}\,s,$$

спот-ставка в свою очередь равна

$$\chi(\tau) = x + \frac{\psi(\tau)}{\tau}.$$

Точное соответствие модели наблюдаемой структуре процентных ставок достигается выбором функции $\mu(t)$:

$$\mu(t) - \lambda\sigma = \theta(t) = \sigma^2 t + \frac{\partial\varphi_0(t)}{\partial t},$$

где $\varphi_0(t)$, - как и в модели Халла-Уайта, наблюдаемая на рынке в момент 0 форвардная кривая.

Модель Кокса-Ингерсолла-Росса

Модель временной структуры, предложенная Дж. Коксом, Дж. Ингерсоллом и С. Россом (модель *CIR*) (1985) [ ] - классический пример модели равновесия, построенной на базе анализа оптимизирующих решений экономических агентов. Рассматривая динамическую (в непрерывном времени) модель экономики с единственным благом и единственным фактором неопределенности U, который изменяется в соответствии с процессом

$$\mathrm{d}U = (A - BU)\mathrm{d}t + V\sqrt{U}\mathrm{d}\omega,$$

(A, B и V - константы), исходя из стандартных неоклассических предположений (конкурентность рынков, постоянная отдача от масштаба производственных функций, несклонность к риску домашних хозяйств, и т.д.), авторы модели показали, что в состоянии равновесия краткосрочная процентная ставка является линейной функцией случайного фактора U. Это означает, что процесс для мгновенной ставки x может быть представлен в виде

$$\mathrm{d}x = \alpha(\mu - x)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,\omega. \tag{7.45}$$

Спот-ставка $\chi(\tau)$ сроком погашения τ определяется в модели Кокса-Ингерсолла-Росса как

$$\chi(\tau) = \frac{\phi(\tau)}{\tau} x + \frac{\psi(\tau)}{\tau}, \tag{7.46}$$

где

$$\phi(\tau) = -\frac{\mathrm{sh}(\gamma\tau)}{\gamma\,\mathrm{ch}(\gamma\tau) + (1/2)\alpha\,\mathrm{sh}(\gamma\tau)},$$

$$\psi(\tau) = \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2}\ln\left(\frac{\gamma\exp(\alpha\tau/2)}{\gamma\,\mathrm{ch}(\gamma\tau) + (1/2)\alpha\,\mathrm{sh}(\gamma\tau)}\right),$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}\Big/2,$$

$\mathrm{sh}(\cdot)$ и $\mathrm{ch}(\cdot)$ - соответственно гиперболический синус и косинус:

$$\mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Используя определенные выше функции $\phi(\tau)$ и $\psi(\tau)$, выражение для цены простой дисконтной облигации можно записать аналогично моделям Васичека и Халла-Уайта (см. (7.19) и (7.38)). Параметры модели Кокса-Ингерсолла-Росса могут оценены подобно тому, как оцениваются параметры модели Васичека - т.е. так, чтобы спот-ставки (7.36) наиболее точно соответствовали бы рыночным значениям. Хотя спот-кривая (7.36) яляется достаточно гибкой, она, тем не менее, не может описать некоторые часто встречающиеся формы кривых доходности (например, при наличии одного или нескольких «изгибов»).

Обобщенная однофакторная модель

Рассмотренные выше однофакторные модели с постоянными параметрами (модели Мертона, Васичека, Кокса-Ингерсолла-Росса и ряд других) могут быть обобщены, если процесс для краткосрочной ставки представить в виде

$$\mathrm{d}x = (\mu_1 + \mu_2 x)\mathrm{d}t + \sigma r^{\beta}\mathrm{d}\omega. \tag{7.47}$$

При $\mu_2 = 0$ и $\beta = 0$ получим модель Мертона, при $\mu_1 = \alpha\mu$, $\mu_2 = -\alpha$ и $\beta = 0$ - модель Васичека, наконец, при $\beta = 1/2$ - модель Кокса-Ингерсолла-Росса. Модель (7.47) предложена в работе Чана, Каролаи, Лонгстаффа и Сандерса (1992) [ ].

Все рассмотренные выше модели принадлежат к классу так называемых *аффинных моделей* - поскольку процентные ставки с различными сроками погашения могут быть представлены как линейные функции случайного фактора - мгновенной ставки (как в соотношении (7.46)).

Двухфакторные модели

Модели, в которых присутствует только лишь один фактор риска, просты и удобны в использовании, как при оценивании параметров, так и для оценки финансовых инструментов и хеджирования. Во многих ситуациях их использование оправдано и дает удовлетворительные результаты - в первую очередь когда основным источником риска, который необходимо хеджировать, является измененение общего уровня процентных ставок. Достаточность однофакторных моделей для практичесих целей может подтверждаться с помощью анализа главных компонент - если первая главная компонента объясняет львиную долю (80% - 90%) колебаний процентных ставок.

Тем не менее, простота однофакторных моделей является и их главным недостатком. В первую очередь, ключевое предположение, лежащее в основе однофакторной модели - об абсолютной коррелированости процентных ставок по всем срокам погашения, - не подтверждается на практике. Можно говорить о высокой корреляции ставок с близкими сроками погашения, но коэффициенты корреляции краткосрочных (до года) и долгосрочних (свыше 10 лет) ставок, как правило, существенно меньше единицы. Наличем только лишь одного фактора может объясняться факт, что однофакторная модель (это относится к равновесным моделям типа Васичека или Кокса-Ингерсолла-Росса) неудовлетворительно воспроизводит фактические рыночные цены даже простых процентных инструментов (облигаций), не говоря уже об опционах.

Все вышесказанное говорит в пользу того, что существенно более точные результаты в задачах оценки и хеджирования (что предельно важно с точки зрения применения моделей на практике) могут быть получены с использованием моделей, содержащих более чем один случайный фактор. Более того, множество современных финансовых инструментов просто не могут быть оценены на основании однофакторной модели - инструмент, разработанный для хеджирования фактора риска, отсутствующего в модели (например, хеджирование разворота или изменения наклона временной структуры процентных ставок), в рамках этой модели не может быть оценен. Оборотной стороной здесь выступает сложность, опять же - с точки зрения практического применения. Приемлемой альтернативой есть использование двухфакторных моделей. Статистические исследования свидетельствуют, что первые три главные компоненты, как правило, объясняют более 90% - 95% колебаний процентных ставок, первые две - более 80% - 90%, т.е.

использование двухфакторных моделей может быть вполне достаточным с практической точки зрения[10].

Если первым случайным фактором в двух факторных моделях как правило остается мгновенная ставка, то наиболее распространенными вариантами выбора второго фактора являются степень изменчивости (волатильность) мгновенной ставки либо ее долгосрочное равновесное значение.

В качестве примера двухфакторной модели мы приведем модель равновесия Лонгстаффа и Шварца (1992) [ ].

Модель Лонгстаффа-Шварца

По построению данная модель является моделью общего равновесия (подобно модели Кокса-Ингерсолла-Росса). Не вдаваясь в подробности базовых предположений относительно функционирования экономики (в целом они, как и в модели Кокса-Ингерсолла-Росса, соответствуют стандартным неоклассическим допущениям - постоянная отдача от масштаба технологического процесса, несклонность к риску домашних хозяйств, описываемая логарифмической функцией полезности, и т.д.), отметим, что неопределенность в модели представляют два случайных фактора y_1 и y_2, интерпретируемых как компоненты доходности реальных инвестиций, одна из которых связана, другая - не связана с волатильностью доходности. Норма отдачи реальных инвестиций описывается случайным процессом

$$\mathrm{d}r(t) = (\mu y_1 + \eta y_2)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{y_2}\,\mathrm{d}\omega ,$$

соответственно, динамика случайных факторов y_1 и y_2 следует закономерностям

$$\mathrm{d}y_1(t) = (\mu_1 - \mu_2 y_1(t))\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{y_1(t)}\,\mathrm{d}\omega_1 ,$$

$$\mathrm{d}y_2(t) = (\mu_3 - \mu_4 y_2(t))\mathrm{d}t + \sigma_2\sqrt{y_2(t)}\,\mathrm{d}\omega_2$$

где μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, σ_1, σ_2 - константы, ω_1 и ω_2 - два взаимонезависимых винеровских процесса.

Краткосрочная процентная ставка $x(t)$ и ее волатильность $v(t)$ (дисперсия мгновенного прироста краткосрочной ставки: $(\mathrm{d}x)^2 = v\mathrm{d}t$) являются линейными функциями случайных факторов

$$x(t) = ay_1 + by_2 ,\ v(t) = a^2 y_1 + b^2 y_2 ,$$

[10] Тем не менее, подчеркнем еще раз, что наиболее правильный подход - использование модели, адекватной решаемой задаче. Для каких-то задач вполне достаточно обычной однофакторной модели Васичека, для других - требуется трехфакторная модель.

соответственно, модель может быть представлена таким образом, что исходными случайными факторами являются $x(t)$ и $v(t)$. Приросты данных случайных процессов можно записать как

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= \left[ac + bg - \frac{bd - ah}{b-a}x - \frac{h-d}{b-a}v\right]\mathrm{d}t \\ &+ \left[\frac{a(bx - v)}{b-a}\right]^{1/2}\mathrm{d}\omega_1 + \left[\frac{b(v-ax)}{b-a}\right]^{1/2}\mathrm{d}\omega_2\end{aligned}, \tag{7.48}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v &= \left[a^2c + b^2g - \frac{ab(d-h)}{b-a}x - \frac{bh - ad}{b-a}v\right]\mathrm{d}t \\ &+ \left[\frac{a^3(bx - v)}{b-a}\right]^{1/2}\mathrm{d}\omega_1 + \left[\frac{b^3(v-ax)}{b-a}\right]^{1/2}\mathrm{d}\omega_2\end{aligned}. \tag{7.49}$$

где c, d, g, h - константы, выраженные через исходные параметры μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, σ_1, σ_2 (вид этих выражений уже не важен, поскольку $x(t)$ и $v(t)$ теперь рассматриваются как базовые случайные факторы, соответственно a, b, c, d, g, и h - это параметры, значения которых необходимо оценить используя реальную рыночную информацию). Экономической интерпретацией параметров модели можно считать выражения для среднего и дисперсии случайных фактров x и v:

$$\mathbb{E}[x] = \frac{ac}{d} + \frac{bg}{h}, \ \mathrm{VAR}[x] = \frac{ac}{2d^2} + \frac{bg}{2h^2}, \tag{7.50}$$

$$\mathbb{E}[v] = \frac{a^2c}{d} + \frac{b^2g}{h}, \ \mathrm{VAR}[v] = \frac{a^4c}{2d^2} + \frac{b^4g}{2h^2}. \tag{7.51}$$

Равновесная цена в момент t простой дисконтной облигации $p(\tau)$, погашаемой через $\tau = T - t$ лет равняется

$$p(\tau) = \phi^{2c}(\tau)\psi^{2g}(\tau)\exp(k\tau + \delta(\tau)x + \gamma(\tau)v), \tag{7.52}$$

где

$$\phi(\tau) = \frac{2m}{2m + (d+m)(e^{m\tau} - 1)},$$

$$\psi(\tau) = \frac{2q}{2q + (l+q)(e^{q\tau} - 1)},$$

$$\delta(\tau) = \frac{am(e^{q\tau} - 1)\psi(\tau) - bq(e^{m\tau} - 1)\phi(\tau)}{mq(b-a)},$$

$$\gamma(\tau) = \frac{q(e^{m\tau}-1)\phi(\tau) - m(e^{q\tau}-1)\psi(\tau)}{mq(b-a)},$$

$$k = g(l+q) + c(d+m),$$

$$m = (2a+d^2)^{1/2}, \; q = (2b+l^2)^{1/2},$$

$$l = \lambda + h,$$

через λ, как и ранее, обозначена рыночная премия за риск.

В отношении оценки параметров модели возможны различные подходы. Две крайности, как и ранее - производить оценку на основании исторических временных рядов, либо - подгонять под текущую структуру процентных ставок. Практически используется та или иная комбинация двух подходов - когда часть параметров оценивают по историческим данным, часть - по текущим, либо оценку основывают на динамике всей временной структуры - нескольких спот-ставок. Пример такого метода оценки будет рассмотрен ниже.

Наиболее часто рекомендуемыми в литературе[11] методами для оценки параметров моделей, в которых некоторые из случайных факторов непосредственно не наблюдаемы (в модели Лонгстаффа-Шварца это - волатильность мгновенной ставки), являются обобщенный метод моментов либо Калмановская фильтрация. Мы проиллюстрируем применение первого.

Модели процентных ставок и хеджирование

Методы хеджирования и иммунизации портфеля, рассматривавшиеся в главах 5 и 6, основывались на показателе *дюрации* - относительном изменении цены долгового обязательства при небольшом параллельном сдвиге процентных ставок. Например портфель, состоящий из Z_A облигаций A и Z_B облигаций B, будет нечувствителен к небольшим параллельным сдвигам временной структуры, если отношение стоимости позиций по облигациям A и B (коэффициент хеджирования) равняется отношению дюраций с обратным знаком, т.е. $h = Z_B P_B / Z_A P_A = -\mathcal{D}_A / \mathcal{D}_B$. Подчеркнем еще раз, что такой выбор коэффициента хеджирования эффективен *только* для случая, когда все спот-ставки $\chi(\tau)$ изменяются *паралельно*, т.е. могут быть представлены в виде

$$\chi(\tau) = x + s(\tau). \tag{7.53}$$

---

[11] см. напр. Джеймс и Уэббер (2000) [ ].

Чувствительность простой дисконтной облигации по отношению к краткосрочной ставке (дюрация) в этом случае равна просто сроку погашения

$$-\frac{1}{p(\tau)}\frac{\partial p(\tau)}{\partial x} = -\frac{1}{p(\tau)}\frac{\partial(e^{-(x+s(\tau))\tau})}{\partial x} = \tau\ . \tag{7.54}$$

Но даже простые однофакторные модели модели процентных ставок предполагают более сложный, чем (7.53) вид зависимости спот-ставок от мгновенной ставки. Из всех рассмотренных выше моделей, только простейшая иллюстративная модель Мертона приводит к выражению для $\chi(\tau)$ подобному (7.53): из соотношения (7.20) видим, что спрэд между ставкой $\chi(\tau)$ и мгновенной ставкой x определяется как $s(\tau) = (\mu - \lambda\sigma)\tau / 2 - \sigma^2\tau^2 / 6$. Т.е. предполагать возможность исключительно параллельных сдвигов кривой доходности по сути эквивалентно предположению о том, что динамика процентных ставок находится под воздействием единственного фактора риска (краткосрочной ставки), который следует случайному процессу с постоянными параметрами без возвратной тенденции: $\mathrm{d}x = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega$. Естественно, что такое предположение нереалистично, как минимум потому, что противоречит статистичекому анализу динамики процентных ставок (например, результатам анализа главных компонент - см. главу 4) и приводит к нереалистичному виду кривой спот-ставок (напомним, что в модели Мертона кривая спот-ставок - квадратичная функция, допускающая отрицательные значения). Следовательно, выбор коэффициентов хеджирования на основании показателей дюрации вообще говоря не вполне эффективен и может не застраховать от потерь при более или менее реалистичном изменении структуры процентных ставок. Более точным подходом является определение коэффициента хеджирования на основании более или менее адекватной модели динамики процентных ставок.

В модели Васичека цены простых дисконтных облигаций (коэффициенты дисконтирования) определяются в соответствии с формулой (7.19), тем самым аналогом дюрации будет показатель

$$-\frac{1}{p(\tau)}\frac{\partial p(\tau)}{\partial x} = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} = \phi(\tau)\ . \tag{7.55}$$

Величина $\phi(\tau)$, расчитанная по формуле (7.55), называется *дюрацией Васичека* простой дисконтной облигации, она измеряет относительное изменение коэффициента дисконтирования в ответ на небольшое изменение мгновенной ставки при условии, что динамика последней описывается процессом (7.13) и невозможен арбитраж. Заметим, что для небольших сроков погашения различие между дюрацией Васичека и обычной дюрацией не столь существенно ($\phi(\tau)$ стремится к τ при $\tau \to 0$), но эта разница растет при увеличении τ (при $\tau \to \infty$ $\phi(\tau)$ стремится к $1/\alpha$).

Для инструмента с фиксированными платежами $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (t - сегодняшний момент, соответственно промежутки времени до каждой выплаты равны $\tau_1 = t_1 - t$, ..., $\tau_n = t_n - t$) дюрация Васичека будет равна

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} \phi(\tau_i) p(\tau_i) C_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} p(\tau_i) C_i \tag{7.56}$$

Если считать, что модель Васичека более адекватно описывает реальность по сравнению с моделью Мертона, то коэффициенты хеджирования должны рассчитываться на основании дюрации Васичека. Например, для портфеля, включающего активы A и B, соотношение стоимости позиций, страхующее от небольших сдвигов кривой доходности должно определяться как $h_v = Z_B P_B / Z_A P_A = -\mathcal{D}_A / \mathcal{D}_B$. В Примере 7.4 вернемся еще раз к рассматривавшейся в 5-й главе задаче определения коэффициента хеджирования.

Пример 7.4 Коэффициент хеджирования в модели Васичека

В Примере 5.1 5-й главы коэффициенты хеджирования рассчитывались с использованием показателей дюрации Маколея и Фишера-Вайля. Воспользуемся теми же данными для расчета дюрации Васичека и сответствующего коэффициента хеджирования. Для этого прежде всего необходимо оценить параметр α. Параметры модели Васичека x_∞, α и σ подберем таким образом, чтобы модель наиболе точно воспроизводила существующие цены на рынке ГКО-ОФЗ (сегодняшний день, как и прежде - 7.09.2001), минимизируя сумму квадратов отклонений теоретических цен от фактических. Получим

$$x_\infty = 0{,}1067\,,\ \alpha = 0{,}0535\,,\ \sigma = 0{,}0678\,,\ x = 0.1179\,.$$

Параметры рассматриваемых в Примере 5.1 облигаций серий 27004 и 27011 и результаты расчета дюрации Васичека приведены в таблице 7.4. Коэффициент хеджирования, в случае, когда позиция по облигации 27004 хеджируется облигацией 27011, равен

-0,909 / 1,702 = -0,534.

При расчете через дюрацию Фишера-Вайля (в Примере 5.1) коэффициент хеджирования равнялся -0,521. Разница (0,013) выглядит не слишком существенной (хотя, например, при объеме позиции 10 млн. руб., это 130 тыс. руб.), но она может быть значительно большей в случае более крутой формы кривой доходности (т.е., например, большей величины α).

Таблица 7.4 Расчет дюрации Васичека для ОФЗ-ФК серий 27004 и 27011 (на 7.09. 2001)

Дата	Время до платежа (лет)	Дюрация Васичека для простой дисконтной облигации	Коэффициент дисконтирования	Платежи и показатели дюрации	
				27004	*27011*
19.09.01	0,033	0,033	0,9961	5,0	

10.10.01	0,090	0,090	0,9892		3,7
19.12.01	0,282	0,280	0,9657	3,7	
09.01.02	0,340	0,337	0,9584		3,7
20.03.02	0,532	0,524	0,9338	3,7	
10.04.02	0,589	0,580	0,9263		3,7
19.06.02	0,781	0,765	0,9008	3,7	
10.07.02	0,838	0,820	0,8931		3,7
18.09.02	1,030	1,002	0,8670	103,7	
09.10.02	1,088	1,057	0,8591		2,5
08.01.03	1,337	1,290	0,8245		2,5
09.04.03	1,586	1,521	0,7897		2,5
09.07.03	1,836	1,748	0,7549		2,5
08.10.03	2,085	1,973	0,7201		102,5
			Дюрация Маколея	**0,934**	**1,533**
			Дюрация Фишера-Вайля	**0,933**	**1,794**
			Дюрация Васичека	**0,909**	**1,702**

VIII. Оценка

В настоящей главе рассматриваются некоторые из наиболее известных и практически используемых методов оценки процентных инструментов *с неопределенными платежами*, прежде всего - инструментов, обладающих свойствами опционов.

Принципы оценки

Прежде чем говорить о практических методах оценки процентных инструментов с неопределенными платежами, необходимо рассмотреть *принципы*, которые лежат в основе современных методов оценки финансовых активов, и соответствующие им ключевые понятия - прежде всего, так называемые *«нейтральные к риску вероятности»*.

Рассмотрим предельно упрощенный пример, позволяющий получить интуитивное представление о современных теориях оценки. Пусть разыгрывается *лотерея А*, предполагающая лишь *два* возможных исхода. Говоря языком теории вероятностей - существует только два возможных *состояния природы* - θ_1 и θ_2. Лотерея разыгрывается немедленно, т.е. влияние фактора времени игнорируется. В случае наступления первого возможного исхода играющий получает выигрыш в сумме 1000 долларов, при втором исходе - ничего. *Какой будет рыночная цена такой лотереи?*

Для ответа на этот вопрос важно иметь представление о шансах (вероятностях) каждого из исходов. Здесь кроется очевидная сложность. Если, к примеру, состояние природы определяется в результате подбрасывания правильной монеты, то вероятности известны (каждый исход имеет вероятность 0,5 или 50%). Но если на наступление того или иного состояния природы оказывает влияние множество случайных факторов, причем не обязательно известно - каких именно, - определить вероятности не так просто. Мы будем рассматривать вероятности как *степень уверенности* людей, принимающих решения, в наступлении того или иного состояния природы. Данная степень уверенности основывается, очевидно, на доступной *информации* о факторах, влияющих на наступление того или иного исхода, о том - какое влияние эти факторы могут иметь, и т.д. Предположим, что существует *общее мнение* участников рынка о вероятностях наступления каждого из возможных состояний природы[1], и эти вероятности равны соответствено $\mathbb{P}(\theta_1) = 0{,}01$, $\mathbb{P}(\theta_2) = 0{,}99$ (так как возможны только два состояния природы, то сумма их вероятностей, очевидно, должна равняться единице).

Если бы участники рынка были *нейтральны* по отношению к риску (для нейтрального к риску человека важен лишь размер *ожидаемого* дохода и не имеет значения риск), задача оценки стоимости лотереи была бы решена - стоимость равнялась бы ожидаемому выигрышу:

$$V_A = \mathbb{E}[\widetilde{C}_A] = 1000 \times \mathbb{P}(\theta_1) + 0 \times \mathbb{P}(\theta_2) = 10 + 0 = 10 \text{ долларов.}$$

(здесь: $\widetilde{C}_A$ - случайная величина выигрыша в лотерее A, $\mathbb{E}[\cdot]$ - оператор математического ожидания, отражающий мнение участников рынка о вероятностях наступления возможных исходов).

Люди в большинстве не нейтральны к риску, соответственно полученная оценка неверна, так как цена в реальности будет отражать отношение к риску участников рынка. Для решения задачи оценки можно использовать два способа. В соответствии с первым, необходимо сделать предположение о том, по каким *правилам* (в соответствии с какой *моделью*) люди выбирают решения в условиях *риска* - когда результат нельзя с точностью предугадать. Приемлемой (и общепринятой в экономике и финансах) моделью поведения людей является гипотеза ожидаемой полезности Неймана-Моргенштерна[2], в соответствии с которой субъект выбирает решения исходя из критерия наибольшей ожидаемой полезности результата. Применительно к нашему примеру, максимальная сумма денег, которую субъект, состояние (богатство) которого равно W, согласиться заплатить за участие в лотерее A, равна числу c_A, такому, что

$$\mathbb{E}[u(\widetilde{C}_A)] = \mathbb{P}(\theta_1)u(W + 1000) + \mathbb{P}(\theta_2)u(W + 0) = u(W + c_A),$$

где $u(\cdot)$ - функция полезности Неймана-Моргенштерна. Величина c_A является с точки зрения данного субъекта *достоверным* (*детерминирован-*

[1] Это звучит не вполне реалистично. На практике характеристики вероятностных распределений случайных факторов могут оцениваться на основании статистического анализа, либо - если применяется принцип *относительного ценообразования*, - информация о предполагаемых участниками рынка характеристиках вероятностных распределений извлекается из существующих рыночных цен.

[2] Впервые идея об ожидаемой полезности выдвинута Даниилом Бернулли еще в начале XVIII века (знаменитый «Санкт-Петербургский парадокс»). Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном (19) [ ] осуществлена строгая математическая формулировка данной теории.

ным) эквивалентом лотереи A. Достоверный эквивалент лотереи - это гарантированный выигрыш, который для данного субъекта эквивалентен участнию в лотерее.

Если $u(\cdot)$ есть функция полезности *типичного* участника рынка, то цена лотереи A на рынке будет равна величине достоверного эквивалента

$$V_A = c_A .$$

В этом состоит смысл подхода *абсолютного ценообразования* в моделях равновесия. Исходя из предположений о предпочтениях типичного инвестора (прежде всего - его функции полезности), цены финансовых инструментов определяются в состоянии равновесия - когда этот типичный инвестор (тем самым - все инвесторы на рынке) достиг наилучшего из возможных положения.

В нашем примере примем для простоты, что размер богатства не имеет значения[3] (будем считать $W = 0$), а функция полезности типичного участника рынка[4] выглядит как $u(w) = w^h$, $0 < h < 1$ (пусть, для определенности, $h = 0{,}5$). Тогда стоимость определится из соотношения:

$$0{,}01 \times 1000^{0,5} + 0{,}99 \times 0^{0,5} = c_A^{0,5} ,$$

откуда $V_A = c_A = 0{,}1$ долл. (стоимость меньше ожидаемого выигрыша, что говорит о несклонности к риску типичного инвестора). Если же параметр h равняется 0,9 (что означает существенно меньшую степень несклонности к риску), стоимость лотереи равна $V_A = 5{,}99$ долларов. Даже этот простейший пример показывает насколько чувствительны результаты, получаемые в рамках теорий равновесия к выбранным предположениям. Если бы существовала необходимость применения данной модели на практике, то параметр h следовало бы выбрать так, чтобы теоретические цены наиболее точно отражали те, которые реально наблюдаются на рынке. Однако это не обязательно удалось бы сделать с приемлемой точностью - например, сам вид функции полезности может препятствовать точному воспроизведения реальных ценовых структур (например, рассмотренная в предыдущей главе модель Васичека не всегда в состоянии воспроизвести реальную кривую доходности). Прежде всего по этой причине теории абсолютного ценообразования не всегда эффективны в решении практических задач.

Подход *относительного* ценообразования (арбитражные методы оценки) не требует почти никаких предположений о поведении инвестора. Счи-

[3] В этом случае говорят об *отсутствии эффекта богатства* - когда предпочтения человека, в частности его отношение к риску, не меняются в ответ на изменения размеров богатства.

[4] Стандартными предположениями относительно полезности является $u' > 0$ и $u'' < 0$, что означает снижение предельной полезности богатства при росте последнего и, тем самым, - несклонность к риску.

тается лишь, что инвесторы предпочитают больший доход меньшему. Стоимость финансовых инструментов определяется на основании (или *относительно*) цен тех инструментов, торговля которыми осуществляется на рынке и цены которых известны. В нашем примере предположим, что существует лотерея *B*, по которой, платежи составят: в состоянии θ_1 - 500 долларов, в состоянии θ_2 - 10 долларов. Лотерея *B* до момента розыгрыша активно продается и покупается на рынке по цене 12 долларов. *В данной рыночной цене содержится информация об отношении к риску типичного на данном рынке инвестора, а также, что не менее важно - информация о субъективных вероятностях возможных исходов.*

Для оценки лотереи *A* на основании информации о цене лотереи *B* используем следующий прием. Поставим вопрос: если бы все инвесторы были бы нейтральны по отношению к риску, какими должны быть вероятности возможных состояний природы, чтобы теоретическая цена лотереи *B* равнялась ее фактическому значению? При нейтральности к риску стоимость равна ожидаемому доходу, т.е. необходимо найти числа $\mathbb{P}_N(\theta_1)$ и $\mathbb{P}_N(\theta_2) = 1 - \mathbb{P}_N(\theta_1)$ такие, что:

$$V_B = 12 = \mathbb{E}_N[\widetilde{C}_B] = \mathbb{P}_N(\theta_1) \times 500 + \mathbb{P}_N(\theta_2) \times 10 ,$$

откуда $\mathbb{P}_N(\theta_1) = 0{,}0040816$, $\mathbb{P}_N(\theta_2) = 0{,}9959284$. Числа $\mathbb{P}_N(\theta_1)$ и $\mathbb{P}_N(\theta_2)$ принято называть (возможно, не совсем удачно) *нейтральными к риску вероятностями*, $\mathbb{E}_N[\cdot]$ - это математическое ожидание, рассчитанное по нейтральным к риску вероятностям. Используя, содержащуюся в цене лотереи *B* информацию о нейтральных к риску вероятностях, можно оценить лотерею *A*. Ее рыночная цена также должна равняться ожидаемому выигрышу, рассчитанному по нейтральным к риску вероятностям, т.е.

$$V_A = \mathbb{E}_N[\widetilde{C}_A] = \mathbb{P}_N(\theta_1) \times 1000 + \mathbb{P}_N(\theta_2) \times 0 ,$$

откуда $V_A = 4{,}0816$ долларов. Данная оценка справедлива *по отношению* к цене лотереи *B* (которая играет роль *нумерера*[5]), т.е. к реальной рыночной информации, что существенно более предпочтительно с практической точки зрения по сравнению со случаем, когда оценки определяются субъективными предположениями о закономерностях поведения участников рынка.

Еще один важнейший вывод: *если существуют нейтральные к риску вероятности, такие, что ожидаемые доходы по финансовым инструментам равняются их рыночным ценам, это означает, что на рынке невозможен арбитраж*. Покажем - почему это так, используя тот же пример с лотереями *A* и *B*.

[5] *Numeráire* (фр.) - единица измерения, эталон.

Арбитражный аргумент и полные рынки

Приведенное выше обоснование цены лотереи A может показаться не вполне убедительным. Для обоснования полученного результата можно использовать несколько другую аргументацию, причем в данном случае *знание вероятностей возможных состояний природы для оценки лотереи A не понадобится*. Достаточно знания, что выплаты по лотереям A и B зависят от одного и того же случайного фактора. Пусть данный случайный фактор (случайная величина, обозначим ее $\widetilde{X}$) может принимать, в зависимости от состояния природы, два значения: 1 либо 0. Тогда выплаты по лотереям A и B можно представить как $\widetilde{C}_A = 1000\widetilde{X}$, $\widetilde{C}_B = 10 + 490\widetilde{X}$. Создадим *портфель*, в который будет входить *одна* купленная лотерея A и Z штук лотерей B. Будем считать, что величина Z может быть как дробной, так и отрицательной (отрицательность означает, что инвестор *продает* данные лотереи). При реализации первого состояния природы портфель принесет инвестору выигрыш $1000 + 500Z$, в случае второго - $10Z$. Выберем Z^* таким образом, чтобы *риск отсутствовал*, т.е. результат не зависел бы от состояния природы, и выигрыш в первом случае был бы в точности равен выигрышу во втором:

$$1000 + 500Z^* = 10Z^*,$$

откуда $Z^* = -2{,}0408163$. Так как риска нет, если арбитраж невозможен (нельзя «получить деньги из ничего»), стоимость портфеля *до розыгрыша* должна равняться величине выигрыша[6]:

$$V_A + Z^* V_B = 1000 + 500Z^* = 10Z^*.$$

Если рыночная стоимость лотереи B известна: $V_B = 12$, то данное выражение дает возможность рассчитать стоимость лотереи A: $V_A = 4{,}0816$, что в точности равно результату, полученному выше с использованием нейтральных к риску вероятностей. Логика обоснования данного результата полностью аналогична тому, как было получено дифференциальное уравнение (7.12), определяющее стоимость простых дисконтных облигаций в однофакторных моделях временной структуры (Глава 7).

Применение арбитражного аргумента для оценки финансовых инструментов возможно если рынки являются *полными*. Последнее означает, что для *любого финансового инструмента* можно подобрать из присутствующих на рынке инструментов *хеджирующий портфель* так, что совокупная стоимость инвестиций (хеджируемый инструмент плюс хеджирующий портфель) не будет подвержена влиянию факторов риска. В нашем примере рынок является полным, так как выплаты по обоим лотереям (A и B) зави-

[6] Напомним, что в данном примере мы игнорируем фактор времени: после торговли лотереями *сразу же* происходит розыгрыш.

сят от одного и того же случайного фактора ($\widetilde{X}$), что позволило хеджировать покупку лотереи A с помощью продажи определенного количества (2,0408163 единиц) лотерей B.

Предположение о полноте рынков является ключевой слабостью и основным объектом критики арбитражного подхода к оценке. Если рынки не полны, что очень часто соответствует действительности, арбитражный подход неприменим, либо, что тоже самое, приводит к неправильным результатам.

Оценка финансовых инструментов

Рассмотренный выше пример - упрощенная карикатура, но он объясняет универсальный подход к оценке финансовых инструментов с неопределенными платежами. Прежде всего необходимо определить случайные факторы, влияющие на размеры платежей (и тем самым на стоимость инструмента) и закономерности (вероятностные законы), которым подвержены изменения данных факторов. Необходимо выбрать *нумерер* - актив, подверженный влиянию тех же факторов, рыночная цена которого известна или может быть вычислена. Необходимо определить нейтральные к риску вероятности и по данным вероятностям рассчитать ожидаемую стоимость доходов по оцениваемому инструменту. Сложность состоит в необходимости учитывать фактор времени: нужно расчитать *ожидаемую текущую стоимость неопределенных будущих доходов*. Альтернативный (но эквивалентный в смысле получаемых результатов) путь оценки - подобрать для оцениваемого инструмента хеджирующий портфель, полностью нейтрализующий риск, и определить стоимость исходя из отсутствия возможностей арбитража.

Пусть необходимо оценить финансовый инструмент, по которому через время T будет выплачен единственный платеж $\widetilde{C}$ (случайная величина), $V(t)$ - искомая стоимость инструмента на момент t (сегодня). Так как в момент T размер платежа будет известен, то $V(T) = \widetilde{C}$. Пусть выбран нумерер - актив, стоимость которого определяется теми же факторами, что и размер платежа $\widetilde{C}$, $\Pi(t)$ - стоимость нумерера в момент t. Тогда отношение стоимости оцениваемого инструмента и нумерера сегодня, и ожидаемое отношение данных стоимостей в будущем должны быть равны между собой:

$$\frac{V(t)}{\Pi(t)} = \mathrm{E}_N\left[\frac{\widetilde{C}}{\Pi(T)}\right], \tag{8.1}$$

$\mathbb{E}_N[\cdot]$ - математическое ожидание[7] по нейтральной к риску вероятностной мере $\mathbb{P}_N$. Тем самым, стоимость на момент t финансового инструмента, обеспечивающего случайный платеж $\widetilde{C}$ в момент T может быть записана как

$$V(t) = \mathbb{E}_N\left[\frac{\Pi(t)}{\Pi(T)}\widetilde{C}\right]. \tag{8.1'}$$

Случайный процесс, значение которого в будущем равно текущему значению (как в выражении (8.1)), называют *мартингалом*[8]. Вероятностная мера $\mathbb{P}_N$, эквивалентная[9] мере $\mathbb{P}$ («фактические» или «объективные» вероятности, описывающие реальный мир), для которой относительные цены финансовых активов являются мартингалами, называется эквивалентной мартингальной мерой (*ЭММ*). Если эквивалентная мартингальная мера существует (т.е. цены всех финансовых активов на рынке соответствуют (8.1)), это означает *отсутствие возможностей арбитража*. Если данная мера единственна - рынок является *полным*. Данные факты - краеугольные камни современных финансов.

Применение принципа оценки (8.1) прежде всего предполагает выбор нумерера[10]. По отношению к процентным инструментам чаще всего применяют два стандартных нумерера. Первый - стоимость простой дисконтной облигации, погашаемой в определенный будущий момент времени T_n

$$\Pi(t) = p(\tau_n)\,,\ \ \tau_n = T_n - t\,.$$

Второй стандартный выбор - стоимость одной денежной единицы, инвестированной в момент 0 и постоянно реинвестируемой по краткосрочной ставке - так называемый *счет денежного рынка*:

$$\Pi(t) = \exp\left(\int_0^t x_s\,\mathrm{d}\,s\right), \tag{8.2}$$

---

[7] Здесь и далее речь идет об *условном* математическом ожидании, основанном на информации, доступной в момент t.

[8] Термин введен известным американским математиком Дж.Л.Дубом в начале 50-х гг. (Дуб (1953) [ ]), понятие мартингала очень широко применяется в финансах (в теориях оценки производных инструментов), начиная с 70-х. - 80- гг. (см. напр. Харрисон и Крепс (1979) [ ]).

[9] Упрощенно говоря, эквивалентность мер означает, что для одной и другой меры *невозможными* являются одни и те же события.

[10] Подчеркнем, что для конечного результата не важно - какой именно нумерер выбран. Важно, чтобы нумерер отвечал определенным стандартным условиям: он должен быть строго большим нуля и самофинансируемым, т.е. не должен предполагать никаких промежуточных выплат и дополнительных вложений. Стоимость нумерера должна зависеть от тех же факторов, что и стоимость оцениваемых инструментов.

x_s - краткосрочная ставка в момент s.

Если в качестве нумерера выбран счет денежного рынка, выражение (8.1) можно записать

$$V(t) = \mathbb{E}_N\left[\widetilde{C}\frac{\Pi(t)}{\Pi(T)}\right] = \mathbb{E}_N\left[\widetilde{C}\exp\left(-\int_t^T x_s\,\mathrm{d}s\right)\right]. \tag{8.3}$$

Если нумерер - стоимость дисконтной облигации (пусть время ее погашения $T_n = T$), получим

$$V(t) = \mathbb{E}_N\left[p(\tau)\widetilde{C}\right],\ \tau = T - t\,, \tag{8.4}$$

t - и в одном, и в другом случае, - момент, на который производится оценка. заметим, что в случае отсутствия неопределенности ($\widetilde{C} = C$ - детерминированная величина) выражение (8.12) представляет собой обычную формулу расчета текущей стоимости $V(t) = p(\tau)C = e^{-\chi(\tau)\tau}C$.

Применение принципов ценообразования проиллюстрируем на примере простейшего производного инструмента - европейского опциона.

Европейский опцион и формула Блэка-Шоулза

Европейский опцион - простейший вид опционного контракта, который может быть исполнен в оговоренный соглашением *момент* времени (в отличие от *американского* опциона, когда выполнение возможно на *протяжении* срока действия соглашения). В случае опциона *колл* владелец имеет *право, но не обязательство*, приобрести базовый актив по определенной цене (*цене выполнения*). Другими словами, в момент выполнения T европейский опцион колл обеспечивает его владельцу денежный поток (в расчете на одну единицу базового актива) в размере

$$C_C = \max(S(T) - X, 0)\,, \tag{8.5}$$

где $S(T)$ - цена базового актива на момент выполнения, X - цена выполнения опциона. Опцион *пут* означает право на продажу по цене X, и в момент выполнения денежный поток по нему составляет

$$C_P = \max(X - S(T), 0)\,. \tag{8.6}$$

В соответствии со знаменитой формулой Блэка-Шоулза (1973) [ ], если невозможен арбитраж, стоимость в момент t, исполняемого в момент T европейского опциона колл на актив, по которому не выплачиваются доходы, определяется как (примем $\tau = T - t$)

$$V_C(\tau) = S(t)\Phi(d) - p(\tau)X\Phi(d - \sigma\sqrt{\tau})\,, \tag{8.7}$$

где

$$d = \frac{\ln[S(t)/p(\tau)X] + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$S(t)$ - текущая цена базового актива, $p(\tau)$ - коэффициент дисконтирования для срока τ, $\Phi(\cdot)$ - функция стандартного нормального (гауссового) распределения. Стоимость европейского опциона пут связана со стоимостью опциона колл (по одному и тому же базовому активу с одинаковым сроком и ценой выполнения) условием *паритета*

$$V_P = V_C + p(\tau)X - S. \tag{8.8}$$

Ключевым предположением, лежащим в основе формулы (8.4), является логнормальное распределение цены базового актива (соответственно - нормальное распределение доходности), т.е динамика цены описывается процессом

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega, \tag{8.9}$$

где σ - стандартное отклонение мгновенного прироста цены (в годовом измерении), μ - ожидаемый мгновенный прирост цены, $\mathrm{d}\omega$ - стандартный винеровский процесс.

В модели Блэка-Шоулза единственным источником (фактором) неопределенности является цена базового актива S. Вероятности наступления различных состояний природы[11] определяются процессом (8.9), которому следует эта цена. Цена S, являясь единственным случайным фактором, выступает в данной модели и в роли *нумерера*. Еще одно предположение, лежащее в основе формулы Блэка-Шоулза - краткосрочная безрисковая ставка ставка является *постоянной*[12].

Существует различные возможности получить формулу (8.7). Один из них - воспользоваться предположением об отсутствии арбитражных возможностей. Составим портфель, состоящий из одного опциона колл и h единиц базового актива, тем самым стоимость портфеля будет равна $V_\Pi = V_C + hS$. Так как цена базового актива выступает в качестве единственного случайного фактора, влияющего на стоимость опциона, используя лемму Ито прирост стоимости опциона за бесконечно малый интервал времени можем записать как

$$\mathrm{d}V_C = \left(\frac{\partial V_C}{\partial t} + \mu\frac{\partial V_C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma\frac{\partial V_C}{\partial S}\,\mathrm{d}\omega.$$

[11] В *динамике*, под «состоянием природы» необходимо понимать *траекторию* развития мира (экономической системы).

[12] Горя более точно, предполагается то существует актив, цена которого изменяется в соотетствии с процессом $\mathrm{d}P/P = x\mathrm{d}t$, где x - константа.

Стоимость портфеля в целом будет, соответственно, описываться процессом

$$\mathrm{d}V_{\Pi} = \left(\frac{\partial V_C}{\partial t} + \mu\frac{\partial V_C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2} + h\mu\right)\mathrm{d}t + \left(\sigma\frac{\partial V_C}{\partial S} + h\sigma\right)\mathrm{d}\omega\,.$$

Величину h подберем таким образом, чтобы доходность портфеля была детерминированной - для этого необходимо, чтобы выражение в скобках при $\mathrm{d}\omega$ равнялось нулю, т.е. $h = -\partial V_C / \partial S$. Невозможность арбитража означает, что доходность любого безрискового портфеля должна равняться безрисковой процентной ставке x: $\mathrm{d}V_{\Pi} / V_{\Pi} = x\mathrm{d}t$, откуда

$$\frac{\partial V_C}{\partial t} + xS\frac{\partial V_C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_C}{\partial S^2} = xV_C\,. \tag{8.10}$$

Данное соотношение называют формулой Блэка-Шоулза, ему подчиняется стоимость *любого* финансового инструмента, зависящего от случайного фактора S, в случае когда динамика последнего описывается законом (8.9), а безрисковая ставка постоянна. Решением дифференциального уравнения (8.10) с предельным условием $V_C(T,T) = \max(S(T) - X, 0)$ будет формула Блэка-Шоулза (8.7) для европейского опциона.

Альтернативный способ получить формулу Блэка-Шоулза - взять математическое ожидание в выражении (8.4). Исходя из предположения, что безрисковая ставка является постоянной, получим

$$V_C = e^{-x\tau}\mathbb{E}_N[\max(S(T) - X, 0)]\,. \tag{8.11}$$

Динамика цены S согласно предположениям модели описывается процессом (8.9). Но данный закон описывает реальный мир, в котором инвесторы несклонны к риску, в то время как ожидаемая величина в (8.11) рассчитывается по нейтральным к риску вероятностям. В нейтральном к риску мире инвесторов интересует только лишь ожидаемый доход, поэтому ожидаемая мгновенная доходность всех активов будет равна безрисковой ставке x. Это означает что в условиях нейтральных к риску вероятностей динамика S должна описываться процессом

$$\mathrm{d}S = xS\,\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}\omega_N\,,$$

следовательно, цена базового актива в момент T распределена логарифмически нормально, т.е. $\ln S(T)$ - нормально распределенная случайная величина со средним $\ln S + (r - \sigma^2/2)\tau$ ($S \equiv S(t)$ - текущее значение цены базового актива) и дисперсией $\sigma^2\tau$. Выражение (8.11) в этом случае можно преобразовать к виду

$$V_C = \frac{e^{-x\tau}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_{\ln X}^{\infty}(e^s - X)\exp\left(-\frac{(s - \ln S - x\tau + \sigma^2\tau/2)^2}{2\sigma^2\tau}\right)\mathrm{d}s\,,$$

откуда, взяв интеграл, получим формулу Блэка-Шоулза (8.7).

Формула Блэка-Шоулза не может быть применена к оценке опционов по процентным инструментам, прежде всего потому, что процесс (8.9) неверно описывает динамику цены базового актива. Например, если речь идет об опционе на простую дисконтную облигацию, ожидаемый прирост цены μ и волатильность σ не могут быть константами. Облигация имеет определенный момент погашения (время, когда будет выплачен номинал), следовательно волатильность по мере приближения к моменту погашения должна снижаться. Кроме того, доходность облигации за краткосрочный промежуток времени подвержена влиянию колебаний краткосрочной ставки, которая сама по себе есть случайная величина.

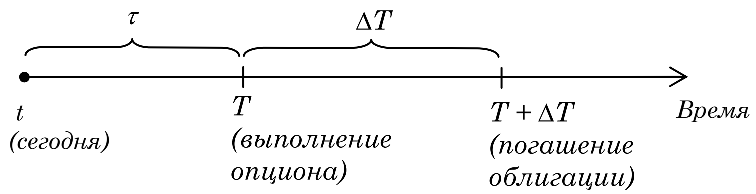
Формула Блэка

Модель Блэка (1976) [ ], не менее известная, чем формула Блэка-Шоулза, является вариантом формулы (8.4) для *опциона на форвардный контракт* по определенному базовому активу. Опцион колл на форвардный контракт есть право заключить в момент T (время выполнения опциона) контракт на приобретение в будущий момент $T+\Delta T$ базового актива по фиксированной цене X. Платеж (в момент выполнения) по опциону колл на форвардный контракт равен

$$C_C = \max(F(T) - X, 0)\ , \tag{8.12}$$

где $F(T)$ - форвардная цена (с поставкой во время $T+\Delta T$) в момент выполнения опциона.

Опцион по простой дисконтной облигации может быть представлен как опцион на форвардный контракт, если рассматривать в качестве базовой переменной форвардную цену облигации: если $T+\Delta T$ - время погашения облигации, то колл-опцион есть право купить в момент T по цене X одну денежную единицу, которая будет выплачена в момент $T+\Delta T$.



Если считать форвардную цену облигации единственным источником риска и предположить, что она распределена логнормально с постоянной волатильностью и нулевым смещением, т.е.

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = \sigma\,\mathrm{d}\,\omega\ ,$$

то такой опцион можно оценить аналогично формуле (8.4). К формуле Блэка для опциона колл на простую дисконтную облигацию можно перейти заменив в формуле Блека-Шоулза цену S на $e^{-x\tau}F$ (как и в модели Блэка-Шоулза безрисковая краткосрочная ставка x считается постоянной)

$$V_C(\tau) = e^{-x\tau}\left(F\Phi(d) - X\Phi(d - \sigma\sqrt{\tau})\right), \tag{8.13}$$

$$d = \frac{\ln(F/X) + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Стоимость опциона пут в модели Блэка может быть определена по условию паритета

$$V_P = V_C + e^{-x\tau}(X - F). \tag{8.14}$$

Модель Блэка, несмотря на определенные недостатки, является рыночным стандартом определения цен простых европейских опционов. В следующей главе будут рассмотрены особенности ее практического применения по отношению к реальным рыночным инструментам.

Оценка на основании модели временной струтуры

Модель Блэка не основывается на каких-либо явных предположениях о временной структуре процентных ставок. Само по себе это не является недостатком если речь идет, например, об оценке опционов на форвардные контракты по реальным активам (сырьевым, сельскохозяйственным, металлам, и т.д.) Но у процентных и инструментов есть существенные особенности. Финансовая структура облигации (сроки до следующих выплат) меняется со временем, колебания процентных ставок влияют не только на стоимость опциона, но и на стоимость базового актива. Если для опционов европейского типа эти проблемы менее важны, либо могут быть без существенных потерь преодолены в рамках модели Блэка, то для американских опционов данный подход неприменим. Американский опцион может быть исполнен в любой момент на протяжении срока своего действия. Будет он исполнен или нет (т.е. выгодно или нет исполнение его владельцу) зависит не только от форвардной цены, но и от колебаний текущих процентных ставок. В модели Блэка, где единственным фактором риска является форвардная цена, а процентные ставки на протяжении срока до выполнения опциона считаются постоянными, это учесть невозможно. Это вызывает необходимость использования для оценки производных процентных инструментов *моделей временной структуры процентных ставок* (примеры которых рассматривались в предыдущей главе).

Подходы к определению цены финансового инструмента с неопределенными платежами на основании моделей временной структуры аналогичны тем, которые использованы при выведении формулы Блэка-Шоулза. Первый возможный подход - расчет математического ожидания по нейтральным к риску вероятностям в соответствии с формулами (8.3) либо (8.4). Сложностью здесь является то, что в отличие от моделей Блэка-Шоулза и Блэка динамика мгновенной ставки (как и цен простых дисконтных облигаций) является случайным процессом, коррелированным со стоимостью оцениваемого инструмента. Поэтому аналитически взять соответствующее математическое ожидание можно только в простых моделях и для простых инструментов. В то же время можно рассчитывать данные математические ожидания численными методами - соответствующие примеры будут рассмотрены ниже. Второй возможный подход - решение дифференциального уравнения, подобного уравнению Блэка-Шоулза (8.10). Оба подхода эквивалентны с точки зрения результатов. Например, пусть мгновенная ставка и стоимость инструмента, который необходимо оценить (случайный платеж $\widetilde{C}$ в момент T), зависят от одного случайного фактора Z, динамика которого при нейтральных к риску вероятностях описывается процессом

$$\mathrm{d}Z = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\omega_N\,,$$

(μ и σ могут в общем случае быть функциями времени и текущего значения величины Z). Тогда (8.3) эквивалентно дифференциальному уравнению Фейнмана-Каца[13]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mu\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} - xV = 0 \tag{8.15}$$

с предельным условием $V(T) = \widetilde{C}(T)$. Легко увидеть, что уравнение (8.10) является частным случаем уравнения Фейнмана-Каца для специфических предположений модели Блэка-Шоулза. Уравнение (8.15) также далеко не всегда можно решить аналитически, поэтому может возникать необходимость применения приближенных численных методов.

Европейский опцион в однофакторных моделях

В рамках многих однофакторных моделей стоимость простых производных инструментов, таких как европейские опционы, может быть найдена аналитически. Наличие явного решения чрезвычайно удобно с точки зрения практического использования - стоимость определяетя однозначно, результат не зависит от точности численных методов и не требует громоздких вычислений. По мнению многих практиков, явные аналитические решения следует использовать всегда, когда это возможно, при условии, что

[13] Аналогичное уравнение (7.12) получено в предыдущей главе для случая, когда мгновенная ставка сама является единственым случайным фактором.

это не идет в ущерб реалистичности получаемых результатов (самое красивое аналитическое решение будет неприемлемым если лежащая в его основе модель неверно воспроизводит фактические рыночные цены).

Рассмотрим Европейский опцион колл на простую дисконтную облигацию. Предположим, что мгновенная ставка x - единственный случайный фактор, влияющий на временную структуру, следует процессу Орнштейна-Улинбека с постоянными параметрами: $\mathrm{d}x = \alpha(\mu - x)\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}\omega$ (α, μ и σ - константы). Соответствующий процесс при нейтральных к риску вероятностях будет иметь вид

$$\mathrm{d}x = [\alpha(\mu - x) - \lambda\sigma]\mathrm{d}t + \sigma \,\mathrm{d}\omega_N . \tag{8.16}$$

Стоимость опциона колл V_C (как и стоимость любого инструмента, находящегося под влиянием исключительно времени и ставки x) будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial V_C}{\partial t} + [\alpha(\mu - x) - \lambda\sigma]\frac{\partial V_C}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V_C}{\partial x^2} - xV_C = 0 . \tag{8.17}$$

Предельным условием для опциона на приобретение в момент T простой дисконтной облигации, погашаемой в момент $T + \Delta T$ будет

$$V_C(T,T) = \max(p(T, T + \Delta T) - X, 0) , \tag{8.18}$$

где X - цена выполнения опциона. Явное выражение для опциона колл в модели Васичека получено Джамшидианом (1989) [ ]:

$$V_C = p(t, T + \Delta T)\Phi(d) - p(t,T)X\Phi(d - v) , \tag{8.19}$$

где

$$d = \frac{1}{v}\ln\left[\frac{p(t, T + \Delta T)}{p(t,T)X}\right] + \frac{v}{2} , \tag{8.20}$$

$$v = \sigma\phi(\Delta T)\left(\frac{1 - e^{-2\alpha\tau}}{2\alpha}\right)^{1/2} , \ \tau = T - t , \ \phi(s) = \frac{1 = e^{-\alpha s}}{\alpha} . \tag{8.21}$$

Формула (8.19) справедлива для стоимости опциона и в расширенной версии модели Васичека (модели Халла-Уайта) - для случая, когда равновесное значение мгновенной ставки μ является функцией времени, - отличием будет только способ определения цен простых дисконтных облигаций (см. соотношения (7.19) и (7.42) в предыдущей главе).

Выражение (8.19) также определяет цену европейского опциона колл для моделей Мертона и Хо-Ли, отличаются только параметры d и v: