АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ОНК ПАРАМЕТРІВ ЧИРПОВАНОГО СИГНАЛУ

В.В. ГЛАДУН

У доповіді розглянуто неперервний у часі множинний чирпований сигнал (англ. *chirp signal*), що спостерігається на фоні сильно або слабко залежного випадкового шуму та отримано властивість асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів сигналу.

Припустимо, що спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad \text{де}$$

$$g(t, \theta^0) = \sum_{j=1}^{N} \left(A_j^0 \cos\left(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2\right) + B_j^0 \sin\left(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2\right)\right), \tag{1}$$

$$\theta^0 = \left(A_1^0, B_1^0, \phi_1^0, \psi_1^0, ..., A_N^0, B_N^0, \phi_N^0, \psi_N^0\right)^*, \tag{2}$$

$\left(A_j^0\right)^2 + \left(B_j^0\right)^2 > 0$, $j = \overline{1, N}$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ є випадковим шумом, що задовольняє наступним вимогам.

A1. ε – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

(i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$, де L – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;

(ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

A2.

(i) Процес ε, що задовольняє умову **A1*(i)***, має спектральну щільність $f(\lambda) = \widetilde{L}\left(1/|\lambda|\right)|\lambda|^{\alpha-1}, \lambda \in \mathbb{R}$, де $\widetilde{L}$ – повільно змінна на нескінченності функція, а також f має четвертий спектральний момент.

(ii) Спектральна щільність процесу ε, що задовольняє умову **A1*(ii)***, має четвертий спектральний момент.

У роботі [1] для оцінювання параметрів (2) ми ввели спеціальні параметричні множини, які залежать від часу спостереження T, що дозволяють асимптотично розрізняти параметри нашої статистичної моделі. Припустимо, що істинні значення амплітуд $A_j^0, B_j^0, j = \overline{1, N}$, є різними числами, а істинні значення частот $\phi_j^0, j = \overline{1, N}$, і параметрів $\psi_j^0, j = \overline{1, N}$, є різними додатними числами. Розмістимо параметри $\psi^0 = \left(\psi_1^0, ..., \psi_N^0\right)$ в порядку зростання і припустимо, що

$$\psi^0 \in \Psi(\underline{\psi}, \overline{\psi}) = \left\{\psi = (\psi_1, ..., \psi_N) : 0 \le \underline{\psi} < \psi_1 < ... < \psi_N < \overline{\psi} < +\infty\right\}.$$

В свою чергу, також введемо параметричну множину

$$\phi^0 \in \Phi(\underline{\phi}, \overline{\phi}) = \left\{\phi = (\phi_1, ..., \phi_N) : 0 \le \underline{\phi} < \phi_j < \overline{\phi} < +\infty, j = \overline{1, N}\right\}.$$

Розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин $\Psi_T \subset \Psi\left(\underline{\psi}, \overline{\psi}\right)$, $T > T_0 > 0$, що містить вектор ψ^0, таку, що $\bigcup\limits_{T > T_0} \Psi_T = \widetilde{\Psi}$, $\widetilde{\Psi}^c = \Psi^c\left(\underline{\psi}, \overline{\psi}\right)$, і виконується наступна вимога розрізнення параметрів.

B. $\lim\limits_{T\to\infty} \inf\limits_{\substack{1 \le j \le N-1 \\ \psi \in \Psi_T}} T^2\left(\psi_{j+1} - \psi_j\right) = +\infty; \quad \lim\limits_{T\to\infty} \inf\limits_{\psi \in \Psi_T} T^2 \psi_1 = +\infty.$

Означення. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \phi_{1T}, \psi_{1T}, ..., A_{NT}, B_{NT}, \phi_{NT}, \psi_{NT}), \tag{3}$$

що мінімізує значення функціоналу $Q_T(\theta) = \int_0^T \left[X(t) - g(t, \theta)\right]^2 dt$ на параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^{4N}$, де амплітуди $A_j, B_j, j = \overline{1, N}$, приймають будь-які значення, а параметри $\phi_j, \psi_j, j = \overline{1, N}$ приймають значення у множині $\Phi^c(\underline{\phi}, \overline{\phi}) \times \Psi_T^c, T > T_0 > 0$, називається ОНК параметра θ^0.

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність ОНК параметрів чирпованого сигналу.

Теорема. *Нехай виконуються умови **A1**, **A2** та **B**. Тоді нормована ОНК*

$$\Big(T\left(A_{1T} - A_1^0\right), T\left(B_{1T} - B_1^0\right), T^2\left(\phi_{1T} - \phi_1^0\right), T^3\left(\psi_{1T} - \psi_1^0\right), ...$$

$$..., T\left(A_{NT} - A_N^0\right), T\left(B_{NT} - B_N^0\right), T^2\left(\phi_{NT} - \phi_N^0\right), T^3\left(\psi_{NT} - \psi_N^0\right)\Big)^*$$

є асимптотично нормальною $N(0, \Sigma)$ при $\to \infty$, де Σ є матрицею порядку $4N$, що задана формулами (59)-(62) у роботі [1].

Зазначимо, що коваріаційна матриця Σ є виродженою, і $rank(\Sigma) = 2N$.

Література

[1] Ivanov, A., Hladun, V. (2024). Asymptotic normality of the LSE for chirp signal parameters. *Modern Stochastics: Theory and Applications.* 11(2), 195-216. doi:10.15559/24-VMSTA247

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: victor.gladun2000@gmail.com