Метод множників Лагранжа

Король Катерина

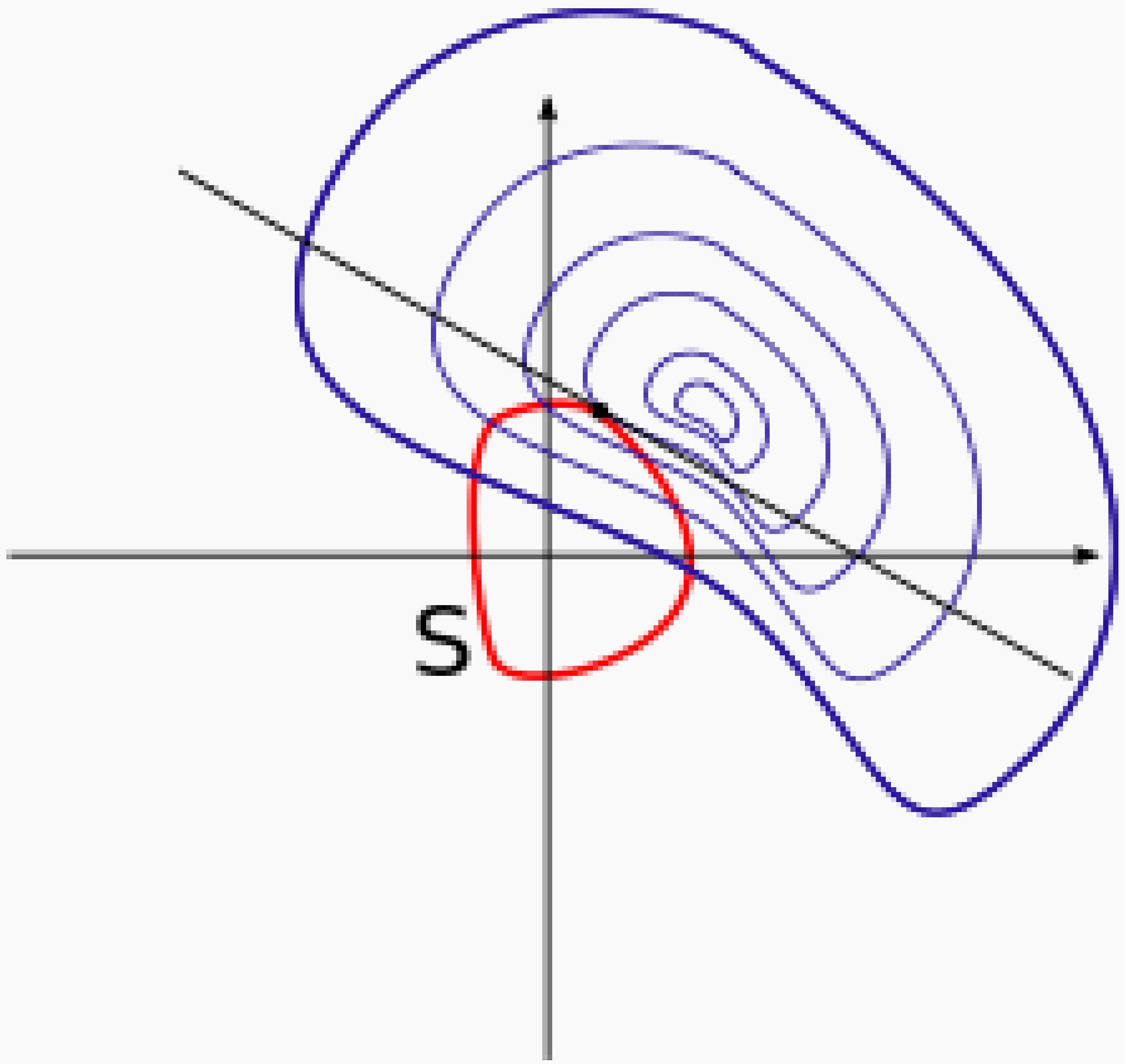
Травень 2024

Мета роботи

- 1.Систематизація основних означень та теорем про необхідні та достатні умови відносного локального екстремуму.
- 2. Застосування методу невизначених множників Лагранжа для розв'язання задач на знаходження відносних локальних екстремумів.
- 3. Застосування методу невизначених множників Лагранжа до розв'язування складних олімпіадних задач на доведення нерівностей.

Метод множників Лагранжа

Метод невизначених множників Лагранжа — метод пошуку умовного локального екстремуму, запропонований італійським математиком Жозефом-Луї Лагранжем. Цей метод дозволяє звести задачу з пошуку умовного екстремуму до задачі на знаходження безумовного екстремуму.



Застосування методу

- Метод невизначених множників Лагранжа широко використовується в математичній і теоретичній фізиці.
- Невизначені множники Лагранжа використовує також варіаційний метод в квантовій механіці.
- Метод множників Лагранжа застосовується під час вирішення задач нелінійного програмування , що виникають у багатьох галузях (наприклад, економіки).
- Основний метод вирішення задачі про оптимізацію якості кодування аудіо та відео даних при заданому середньому бітрейті

Основні означення

Означення 1

Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$, $\vec{x}^{\,0}$ – внутрішня точка множини A, $f : A \to \mathbb{R}$.

Похідною функції f *за напрямком* $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ у точці $\vec{x}^{\,0}$ називається скінченна границя

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}^{\,0}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^{\,0} + t\vec{a}) - f(\vec{x}^{\,0})}{t},$$

якщо вона існує.

Нехай множина A відкрита і в усіх точках $\vec{x} \in A$ існує $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$. Тоді кажуть, що функція f має похідну за напрямком $\vec{a}$ на множині A.

Означення 2

Для базисних векторів $\vec{e}_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots, 0)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, похідна за напрямком $\vec{e}_k$ називається *частинною похідною* за k-ю змінною і позначається символом

$$f'_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} := f'_{\vec{e}_k}.$$

Означення 3

Якщо у точці $\vec{x}^{\,0}$ для кожного $k = 1, 2, \ldots, m$ існує похідна $f'_k(\vec{x}^{\,0})$, то вектор

$$\nabla f(\vec{x}^{\,0}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}^{\,0}) := \left(f'_1(\vec{x}^{\,0}), f'_2(\vec{x}^{\,0}), \ldots, f'_m(\vec{x}^{\,0})\right)$$

називається *градієнтом* функції f у точці $\vec{x}^{\,0}$.

Означення 4

Точка $\vec{x}^{\,0} \in M$ називається *точкою умовного (відносного) локального мінімуму* функції $f : A \to \mathbb{R}$ за умов зв'язку

$$\varphi_i(\vec{x}) = 0, \ \ i = 1, \ldots, s, \tag{2.4}$$

якщо для деякого додатного числа r :

1) $B(\vec{x}^{\,0}; r) \subset A$; 2) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}; r) \cap M : \ f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^{\,0})$.

Означення 5

Точка $\vec{x}^{\,0} \in M$ називається *точкою строгого умовного (відносного) локального мінімуму* функції $f : A \to \mathbb{R}$ за умов зв'язку (2.4), якщо для деякого додатного числа r :

1) $B(\vec{x}^{\,0}; r) \subset A$; 2) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}; r) \cap M \setminus \{\vec{x}^{\,0}\} : \ f(\vec{x}) > f(\vec{x}^{\,0})$.

Основні теореми

Теорема 1

Необхідні умови *суворого* локального екстремуму (правило множників Лагранжа). Нехай $f \in C^1(A)$, $\phi_i \in C^1(A)$, $i = 1, \ldots, s$. Припустимо, що у точці $\mathbf{x}^0$ локального екстремуму за умови (2.4) матриця

$$\left(\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j}\right)_{i=1}^{s} \quad m_{j=1} \tag{2}$$

має ранг s. Тоді існують такі числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ (множники Лагранжа), що точка $\mathbf{x}^0$ є критичною точкою функції Лагранжа

$$F = f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \ldots + \lambda_s\phi_s.$$

Теорема 2

Достатні умови відносного локального екстремуму. Припустимо, що виконані умови:

а) $\{f,\ \varphi_i,\ i=1,\ldots,s\} \subset C^{(2)}(A)$;

б) $\vec{x}^{\,0} \in M$ – критична точка функції Лагранжа $F = f + \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i$ для деякого набору чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$;

в) матриця $\left(\dfrac{\partial \varphi_i(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_j}\right)_{i=1}^{s}\,{}_{j=1}^{m}$ має ранг s.

Покладемо $Q(\vec{a}) := \vec{a}^{\,t} F''(\vec{x}^{\,0})\vec{a}$, де вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ задовольняє систему рівнянь

$$(\operatorname{grad} \varphi_i(\vec{x}^{\,0}), \vec{a}) = 0,\ \ i=1,\ldots,s.$$

Якщо для кожного такого вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ функція $Q(\vec{a}) < 0$, то $\vec{x}^{\,0}$ є точкою строгого умовного локального максимуму, якщо ж $Q(\vec{a}) > 0$, то $\vec{x}^{\,0}$ є точкою строгого умовного локального мінімуму.

Поточний стан задач

- Розв'язано задачі т ипу "рівняння"

Знайти умовні локальні екстремуми функцій при вказаних рівняннях зв'язку

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 12x_1x_2 + 2x_2^2, \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad 4x_1^2 + x_2^2 = 25$$

Після розв'язання системи:

Маємо точки:

$$a_1 = \left(-\frac{3}{2}, -4, -\frac{17}{4}\right)$$
$$a_2 = \left(\frac{3}{2}, 4, -\frac{17}{4}\right)$$
$$a_3 = (-2, 3, 2)$$
$$a_4 = (2, -3, 2)$$

Оскільки $4x^2 + y^2 = 25$ є компактним, бо обмеженим, критичні точки будуть точками екстремума.

$$f(a_1, a_2) = \frac{361}{4} = 90.25 \Rightarrow a_1, a_2 - \text{точки максимума}$$
$$f(a_3, a_4) = -50 \Rightarrow a_3, a_4 - \text{точки мінімума}$$
$$f_{\min} = -50$$
$$f_{\max} = 90.25$$

Розв'язано задачі типу "рівняння"

Знайти умовні локальні екстремуми функцій при вказаних рівняннях зв'язку

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad x_1 + 4x_3 = 1, \; x_1x_2 = 1.$$

Після розв'зання системи:

Отже, маємо дві точки:

$$a_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$
$$a_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$
$$\lambda_1 = -\frac{1}{4}$$
$$\lambda_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Для точки $a_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$Q(a_1) = -\frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot a_1 \cdot a_2 = -\sqrt{3} \cdot a_1 \cdot a_2$$

$$\operatorname{grad}(\varphi_1(a_1)) = (1, 0, 4)$$
$$\operatorname{grad}(\varphi_2(a_2)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$$
$$\operatorname{grad}(\varphi_1(a_1), a) = a_1 + 4a_3 = 0$$
$$\operatorname{grad}(\varphi_2(a_1), a) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a_1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) a_2 = 0$$

Розв'язано олімпіадні нерівності (Всеукраїнська олімпіада 2018)

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$$

$$(i)\ c + ab \le 2, \quad a, b, c \ge 0$$

Нехай $a, b, c > 0$:

$\nabla g = 0 \Rightarrow (2a + bc + ca, 2b + ca + ab, 2c + ab + bc) \neq (0, 0, 0)$

Нехай $\nabla f = \lambda \nabla g$

$\nabla f = (b, a, 1) = \lambda(2a + bc, 2b + ca, 2c + ab)$

$\lambda(2a + bc) = b$

$\lambda(2b + ca) = a$

$\lambda(2c + ab) = 1$

$c + 2 = 2c + a^2, \quad a^2 = 2 - c, \quad c = 2 - a^2$

$2a^2 + (2 - a^2) + a^2(2 - a^2) = 2a^2 + 2(2 - a^2) = 4 -$ тому будь яка трійка $(t, t, 2 - t^2)$ є претендентом на екстремум, зокрема максимум де t є $(0, \sqrt{2})$

Розв'язано олімпіадні нерівності

Відомо, що $xy + yz + zx + 2xyz = 1$, $x, y, z \geq 0$. Довести, що

$$\sum x^2y \geq xy + yz + zx$$

$F(x, y, z) = \sum(x^2y - xy - yz - zx)$

$g(x, y, z) = xy + yz + zx + 2xyz - 1 = 0$

g - компактна $\Rightarrow$ існують max та min.

Нехай $x = 0 :\quad yz = 1,\quad y^2z + yz^2 \geq yz,\quad y + z \geq 1$

Нехай $y = 0 :\quad zx = 1,\quad x^2z + xz^2 \geq zx,\quad x + z \geq 1$

Нехай $z = 0 :\quad xy = 1,\quad x^2y + xy^2 \geq xy,\quad x + y \geq 1$

Тепер розглянемо випадок коли $\lambda = 0$:

$(2x^2 + y^2 + 2x^2 + z^2 - x^2 = 0)$

$(x^2 + 2x^2 + y^2 + z^2 - x^2 = 0)$

$(x^2 + 2x^2 + y^2 + z^2 - x^2 = 0)$

$(x^2 + y^2 + 2x^2 + z^2 = 1)$

$\Rightarrow 2x^2 + y^2 + 2x^2 + z^2 - x^2 = 2x^2 + y^2 + 2x^2 + z^2 - x^2 =$

$= x^2 + 2x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - x^2 = x^2 + y^2 + 2x^2 + z^2$

$= y^2 + 2x^2 - x^2 = z^2 + 2x^2 - x^2$

$= y^2 + 2x^2 = z^2 + 2x^2 = \frac{1}{2}$

$= x^2 + x^2 + 2x^2 - x^2 = (x+1)^2 - (2x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$= (x + y + z) = (z^2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ точка максимума

$F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$ максимум.

Олімпіадні задачі, які в процесі розв'язку

- Determine the greatest possible value of $\sum_{i=1}^{10} \cos(3x_i)$ for real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ satisfying $\sum_{i=1}^{10} \cos(x_i) = 0$.

William Lowell Putnam Mathematical Competition Saturday, December 1, 2018

- Let $a, b, c \in \mathbb{R}$ such that $a + b + c = 1$. Prove that

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} + \frac{e^c - e^b}{c - b} + \frac{e^a - e^c}{a - c} > 4.$$

Crux Mathematicorum, Vol. 44(10), December 2018

- If x and y are real numbers such that $2xy + 2x^2 = 6 + x^2 + y^2$ find the minimum value of $(x^2 + y^2)^2$.

American Invitational Mathematics Examination

The **American Invitational Mathematics Examination** (**AIME**) is the second exam in the series of exams used to challenge bright students on the path toward choosing the team that represents the United States at the International Mathematics Olympiad (IMO). While most AIME participants are high school students, some bright middle school students also qualify each year.

Очікувані результати та висновки

- Зробила огляд основних означень та тверджень, що пов’язані з темою “Метод множників Лагранжа”
- Показала на прикладах методи та поняття, що використовуються в доведенні понять та тверджень
- Продемонструвала застосування методу на класичних задачах та олімпіадних задачах різного виду

У результаті роботу можна буде використовувати в навчальних цілях для школярів та студентів, що планують брати участь у математичних олімпіадах різного рівня як навчально-методичний посібник для підготовки

Література

- 1.М.О.Денисьєвський, А.В.Чайковський. ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ Функції кількох змінних. — 2012
- 2. Григорій Михайлович Фіхтенгольц. Курс диференціального та інтегрального числення. — 2023. — 1900+ с.
- 3. Wyatt, John (7 April 2004) [19 November 2002]. ["Legrange multipliers, constrained optimization, and the maximum entropy principle"]

Дякую за увагу!