Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"

Кафедра математики факультету інформатики

Кваліфікаційна робота на тему:
Проблема обходу сторожа на графах і орграфах

Керівник кваліфікаційної роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(прізвище та ініціали)

____
(підпис)
"____"__________________ 2023 р.

Виконав студент
4-го року навчання спеціальності
112 "Прикладна математика"
Романчук Богдан Юрійович
(ПІБ)

Київ – 2023

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"

Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедри математики,
доц. к. ф.-м. н.
__________________ Р. К. Чорней
(підпис)
"____"__________________ 2023 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на кваліфікаційну роботу
студенту 4-го курсу факультету інформатики
Романчуку Богдану Юрійовичу

Тема: Проблема обходу сторожа на графах і орграфах.
Вихідні дані: Досліджено зв'язок числа сторожа з іншими параметрами графів.
Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання
Анотація
Вступ
1 Основні означення
2 Неорієнтовані графи
2.1 Число сторожа для різних класів графів
3 Орієнтовані графи
3.1 Орієнтації повних мультичасткових графів
3.2 Число сторожа для турнірів
3.3 Число сторожа для повних мультичасткових орграфів
4. Алгоритми
Висновки
Література

Дата видачі "____"____________ 2023 р. Керівник ________________________
(підпис)
Завдання отримав ________________
(підпис)

Тема: Проблема обходу сторожа на графах і орграфах.
Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу кваліфікаційної	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	вересень	
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної.	вересень	
3.	Розробка плану та структури роботи.	жовтень	
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень теорії графів.	листопад	
5.	Дослідження основних властивостей обходу сторожа.	листопад-грудень	
6.	Обхід сторожа на неорієнтованих та орієнтованих графах. Одержання основних результатів.	січень-березень	
7.	Робота над текстовим оформленням результатів.	квітень	
8.	Попередній аналіз курсової. Виправлення помилок.	початок травня	
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	середина травня	

Зміст

Анотація

Нехай G – зв'язний неорієнтований граф. Обходом сторожа на G називається мінімальний замкнений домінуючий шлях. Довжину такого шляху позначають $w(G)$ і називають числом сторожа. У цій роботі ми розглядаємо обхід сторожа на неорієнтованих та орієнтованих графах. Особливу увагу приділяємо повним мультичастковим орграфам, даємо характеризацію цьому класу графів, а також знаходимо верхню оцінку числа сторожа через домінуюче число $\gamma(D)$ і число незалежності $\alpha(D)$.

Ключові слова: обхід сторожа, число сторожа, повні мультичасткові графи, орграфи

Вступ

В музеї потрібно регулярно оглядати кімнати. Кожна кімната з'єднана коридором (коридорами) з однією або кількома іншими. Будемо називати такі кімнати *сусідніми*. З кожної кімнати в музеї можна побачити всі її сусідні кімнати.

У музеї працює сторож, обов'язком якого є обхід музей і оглядання усіх його кімнат. Задача сторожа – знайти оптимальний шлях (з поверненням в початкову кімнату), який дозволить йому оглянути всі кімнати в музеї.

Проблему обходу сторожа була запропонована в статті Гартнелла, Рола та Вайтгеда [6], яка вийшла у 1998 році.

Позаяк метою цієї роботи є дослідження повних мультичасткових орграфів, велику увагу приділено статті Даєра [2], що була опублікована у 2021 році. У цій статті знайдена верхня оцінка числа сторожа для турнірів, сформульовано і доведено ряд теорем про повні мультичасткові орграфи.

У даній роботі ми показуємо і доводимо характеристику повних мультичасткових орграфів, показуємо верхню оцінку числа сторожа для повних мультичасткових орграфів, а також, даємо характеризацію класу графів, для яких будь-яка проста орієнтація, що не має джерел, містить обхід сторожа.

В кінці роботи наведена реалізація (на мові Python) алгоритмів знаходження сильнозв'язних компонент, сюр'єктивної конденсації орграфа, та деякі інші базові алгоритми, необхідні для знаходження замкненого домінуючого шляху в орієнтованому графі.

У першому розділі ми наводимо основні означення з теорії графів.

У другому розділі показуємо основні відомі результати дослідження проблеми обходу сторожа на неорієнтованих графах.

У третьому розділі ми також показуємо основні відомі результати дослідження проблеми обходу сторожа на орієнтованих графах, а також заглиблюємось у дослідження повних мультичасткових орграфів. Крім цього, у цьому розділі, ми даємо характеристику класу графів, для якого будь-яка проста орієнтація без джерел містить обхід сторожа.

У четвертому розділі ми показуємо ряд алгоритмів, необхідних для знаходження замкненого домінуючого шляху у орієнтованому графі. Серед них: алгоритм знаходження сильнозв'язних компонент Тар'яна [4], а також, знаходження сюр'єктивної конденсації орграфа.

Частину результатів, описаних у цій роботі нами було презентовано і доведено на XI Всеукраїнській конференції молодих математиків [7] у травні 2023.

1 Основні означення

Означення 1.1. *Неорієнтований граф* G — це впорядкована пара (V, E), де V — множина вершин, E — множина невпорядкованих пар вершин з V, які називаються *ребрами*.

Означення 1.2. *Орієнтований граф* D — це впорядкована пара (V, A), де V — множина вершин, A — множина впорядкованих пар вершин з V, які називаються *дугами*.

Означення 1.3. Пара вершин неорієнтованого графа u, v графа G називається *суміжними*, якщо $\{u, v\} \in E$.

Означення 1.4. Вершина u орієнтованого графа D називається *суміжною* з v, якщо $(u, v) \in A$.

Означення 1.5. Граф H є *породженним підграфом* графа G, якщо $V(H) \subseteq V(G)$, та $\forall\ u, v \in V(H) : \{u, v\} \in E(H) \Leftrightarrow \{u, v\} \in E(G)$.

Означення 1.6. Орграф H є *породженним підграфом* орграфа D, якщо $V(H) \subseteq V(G)$, та $\forall\ u, v \in V(H) : (u, v) \in A(H) \Leftrightarrow (u, v) \in A(D)$.

Означення 1.7. Граф називається *зв'язним*, якщо між будь-якими його двома вершинами існує шлях.

Означення 1.8. Послідовність вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$ називають *шляхом*.

Означення 1.9. Шлях $v_1, v_2, \ldots, v_n$ називається *ланцюгом*, якщо він містить вершину графа не більше одного разу. Тобто $v_i \neq v_j,\ 1 \leq i < j \leq n$.

Означення 1.10. Ланцюг називають *гамільтоновим*, якщо він містить всі вершини графа.

Означення 1.11. Граф є *деревом*, якщо він не містить циклів.

Означення 1.12. Висячі вершини дерева називають *листками*.

Означення 1.13. Граф, у якого кожна пара вершин з'єднана ребром, називається *повним* і позначається K_n, де n — кількість вершин.

Означення 1.14. Повний орієнтований граф називають *турніром*.

Означення 1.15. *Числом незалежності* $\alpha(G)$ графа G називають потужність максимальної за включенням множини взаємно несуміжних вершин.

2 Неорієнтовані графи

Означення 2.1. *Відкритим околом* вершини $v \in V$ графа $G(V, E)$ називають множину
$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}.$$

Означення 2.2. *Замкненим околом* вершини $v \in V$ графа $G(V, E)$ називають множину
$$N[v] = N(v) \cup \{v\}.$$

Означення 2.3. Вешина v графа G називається *універсальною*, якщо $N[v] = V(G)$.

Означення 2.4. *Відкритим околом множини* $U \subseteq V$ графа $G(V, E)$ називають сукупність околів усіх вершин, що входять в U і позначають $N(U)$.

Означення 2.5. *Замкненим околом множини* $U \subseteq V$ графа $G(V, E)$ називають множину
$$N[U] = N(U) \cup U.$$

Означення 2.6. *Мінімальною домінуючою множиною* графа $G(V, E)$ називають мінімальну за включенням множину $\Gamma \subseteq V$, для якої $N[\Gamma] = V$. При цьому *домінуючим числом* $\gamma(G)$ називають потужність Γ.

Означення 2.7. *Обходом сторожа* на графі називають найкоротший замкнений домінуючий шлях. При цьому його довжину називають *числом сторожа* $w(G)$.

Означення 2.8. *Кістяковим деревом* графа G називають максимальний за включенням його зв'язний ациклічний підграф.

Теорема 2.9. [3] *Нехай T — кістякове дерево графа G, а $T'(V', E')$ — дерево, що одержується з T видаленням листків. Тоді $w(G) \leq 2|E'|$.*

2.1 Число сторожа для різних класів графів

Теорема 2.10. [3] *Нехай T — дерево, а $T'(V', E')$ — дерево, що одержується з T видаленням листків. Тоді $w(T) = 2|E'|$.*

Теорема 2.11. [3] *Нехай C_n — цикл на n вершинах. Тоді*

$$w(C_n) = \begin{cases} 2(n-3), & 3 \leq n < 6 \\ n, & n \geq 6 \end{cases} . \tag{1}$$

Теорема 2.12. [3] *Нехай G — граф. $w(G) = 0$ тоді і тільки тоді, коли G містить домінуючу вершину (тобто $\gamma(G) = 1$).*

Наслідок 2.13. *Нехай K_n — повний граф на n вершинах. Тоді $w(K_n) = 0$.*

Теорема 2.14. [3] *Нехай G — повний мультичастковий граф. Якщо він не містить універсальної вершини, то $w(G) = 2$. Інакше, $w(G) = 0$.*

3 Орієнтовані графи

На відміну від неорієнтованих графів, в орграфах не завжди існує обхід сторожа. Одним з найпростіших прикладів може слугувати орієнтація P_2.

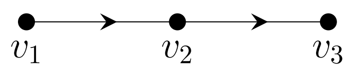

Рис. 1: Приклад орграфа, на якому немає обходу сторожа.

Означення 3.1. *Відкритим вхідним околом* вершини $v \in V$ орграфа $D(V, A)$ називають множину
$$N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in A\}.$$
Замкненим вхідним околом v називають множину
$$N^-[v] = N^-(v) \cup \{v\}.$$

Означення 3.2. *Відкритим вихідним околом* вершини $v \in V$ орграфа $D(V, A)$ називають множину
$$N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in A\}.$$
Замкненим вихідним околом v називають множину
$$N^+[v] = N^+(v) \cup \{v\}.$$

Означення 3.3. *Відкритим вхідним (вихідним) околом множини* $U \subseteq V$ орграфа $D(V, A)$ називають сукупність відкритих вхідних (вихідних) околів усіх вершин, що входять в U і позначають $N^-(U)$ $(N^+(U))$.

Означення 3.4. *Замкненим вхідним (вихідним) околом множини* $U \subseteq V$ орграфа $D(V, A)$ називають сукупність замкнених вхідних (вихідних) околів усіх вершин, що входять в U і позначають $N^-[U]$ $(N^+[U])$.

Означення 3.5. Вешина u *домінує* вершину v, якщо $v \in N(u)$ (тобто є *домінуючою* для v). При цьому v є вершиною, *домінованою* вершиною u.

Означення 3.6. Вешина v орграфа D називається *джерелом*, якщо $N^{-}(v) = \varnothing$.

Означення 3.7. Вешина v орграфа D називається *стоком*, якщо $N^{+}(v) = \varnothing$.

Означення 3.8. *Мінімальною домінуючою множиною* орграфа $D(V, A)$ називають мінімальну за включенням множину $\Gamma \subseteq V$, для якої $N^{+}[\Gamma] = V$. При цьому *домінуючим числом* $\gamma(D)$ називають потужність Γ.

Означення 3.9. *Обходом сторожа* на орієнтованому графі називають найкоротший замкнений домінуючий шлях. При цьому його довжину називають *числом сторожа* $w(D)$.

Означення 3.10. Нехай D — орграф, і A — деяка підмножина його вершин. *Множиною унікально домінованих вершин* орграфа D вершиною $v \in A$ називається множина

$$U_A(v) = N^{+}[v] \setminus N^{+}[A \setminus \{v\}].$$

Лема 3.11. *У кожної вершини з мінімальної домінуючої множини існує непорожня множина унікально домінованих вершин.*

Означення 3.12. Орграф називається *сильнозв'язним*, якщо між будь-якими двома вершинами існує шлях.

Означення 3.13. *Сильнозв'язною компонентою* орграфа називається максимальний за включенням сильнозв'язний породжений підграф

Означення 3.14. *Конденсацією* $D^{*}(V^{*}, A^{*})$ орграфа $D(V, A)$ називається орграф, вершинами якого є *сильнозв'язні компоненти* D, а $(u^{*}, v^{*}) \in A^{*}$, якщо у сильнозв'язній компоненті u^{*} існує вершина u така, що $(u, v) \in A$ для деякої вершини v сильнозв'язної компоненти v^{*}.

Означення 3.15. *Сюр'єктивною конденсацією* $D^{*}_{sur}(V^{*}_{sur}, A^{*}_{sur})$ орграфа $D(V, A)$ називається орграф, вершинами якого є *сильнозв'язні компоненти* D, а $(u^{*}, v^{*}) \in A^{*}_{sur}$, якщо для кожної вершини v сильнозв'язної компоненти v^{*} існує вершина u з сильнозв'язної компоненти u^{*} така, що $(u, v) \in A$.

Таким чином, сюр'єктивна конденсація є підграфом конденсації.

Лема 3.16. *[7] Орграф D містить обхід сторожа тоді і тільки тоді, коли D^{*}_{sur} містить універсальну вершину.*

Доведення. Нехай $D(V,A)$ — орієнтований граф і $D^*_{sur}(V^*_{sur}, A^*_{sur})$ — його сюр'єктивна конденсація, і $f : V \to V^*_{sur}$ – функція, що ставить у відповідність вершині її сильнозв'язну компоненту.

D містить обхід сторожа тоді і тільки тоді, коли існує послідовність вершин $W = (v_1, v_2, ..., v_m = v_1)$ така, що $(v_i, v_{i+1}) \in A$ і $N^+[W] = V$. Очевидно, що W лежить у сильнозв'язній компоненті $v^* \in V^*_{sur}$ і $\forall\ u \in V \setminus W\ \exists\ v \in W : u \in N^+[v]$. Це еквівалентно тому, що $\forall\ u^* \in V^*_{sur} - v^*\ :\ (v^*, u^*) \in A^*_{sur}$, тобто D^*_{sur} містить універсальну вершину. □

Наслідок 3.17. *Якщо на орієнтованому графі D існує обхід сторожа, то він міститься в сильнозв'язній компоненті, що відповідає домінуючій вершині в D^*_{sur}.*

3.1 Орієнтації повних мультичасткових графів

Теорема 3.18. [2] *Нехай D – повний мультичастковий орграф. Якщо $\delta^-(D) \geq 1$, то конденсація D має джерело і D містить обхід сторожа.*

Доведення. Нехай D – орієнтація повного мультичасткового графа без джерел. Нехай $\{T_1, T_2, ...\ T_k\}$ – сильнозв'язні компоненти D. Розглянемо конденсацію $D^* = \{t_1, t_2, ...\ t_k\}$, де вершина t_i відповідає сильнозв'язній компоненті T_i. Розглянемо довільну вершину t, і нехай P – найдовший ланцюг, що закінчується в t. Нехай u – початкова вершина P. Будь-який цикл у D^* відповідатиме більшій сильнозв'язній компоненті в D, що суперечить вибору $\{T_i\}$. Отже, u не має вхідних сусідніх вершин з P. Позаяк P – найдовший ланцюг, то P також не має вхідних сусідніх вершин з $D^* \setminus P$. Це означає, що кожна вершина в сильнозв'язній компоненті U не має вхідних сусідів з будь-якої іншої сильнозв'язної компоненти. Позаяк кожна вершина має хоча б одну вхідну дугу, то U містить не менше 2 вершин. А отже, U містить вершини з більш, ніж однієї частки, і, звідси, дуги до всіх сильнозв'язних компонент. З цього випливає, що у D^* існує дуга між u та кожною іншою сильнозв'язною компонентою. Позаяк u – джерело в D^*, компонента U є домінуючою. А отже, обхід сторжа міститься у сильнозв'язній компоненті U. □

Ми отримали наступне узагальнення попередньої теореми.

Теорема 3.19. [7] *Для зв'язного графа G наступні умови еквівалентні:*

1) G – повний мультичастковий граф

2) Кожна узагальнена орієнтація G без джерел містить обхід сторожа

3) Кожна узагальнена орієнтація G без одновершинних сильнозв'язних компонент містить обхід сторожа

Доведення.
1) $\Rightarrow$ 2). Нехай G – повний мультичастковий граф. і D – його узагальнена орієнтація без джерел. Розглянемо конденсацію D^* та джерело A в ній. Якщо $|A| = 1$, то D містить джерело, а отже, $|A| = 2$. Оскільки A породжує в D сильнозв'язну компоненту, то A – зв'язна в G. Тому $\exists uv \in E(G[A])$. Оскільки G – повний мультичастковий, то uv – домінуюче в G. Зокрема, $\forall x \in V(G) \setminus A \ : \ x \in N(u) \cup N(v)$. Нехай $xu \in E(G)$. Тоді ребро xu орієнтоване в G лише як $u \to x$. Тому A буде домінуючою вершиною в D^*_{sur}, а отже, за лемою 3.16, D має обхід сторожа.
2) $\Rightarrow$ 3). Очевидно, що якщо кожна узагальнена орієнтація G без джерел містить обхід сторожа, то і кожна узагальнена орієнтація G без джерел і стоків містить обхід сторожа.
3) $\Rightarrow$ 1). Доведемо методом від супротивного. Нехай кожна узагальнена орієнтація G без одновершинних сильнозв'язних компонент містить обхід сторожа, але G – не повний мультичастковий граф. Тоді G містить недомінуюче ребро $uv \in E(G)$ і вершину $w \notin N[u] \cup N[v]$. Побудуємо узагальнену орієнтацію D графа G наступним чином: між вершинами u та v – двостороння орієнтація, $\forall \ x \in N(u) \ : \ (u, x) \in A(D)$, $\forall \ y \in N(v) \ : \ (u, y) \in A(D)$. Якщо для деякої вершини $x \in N(u) \cup N(v) : N(x) \subseteq \{u, v\}$, то орієнтуємо ребра xu та xv в обидва боки. Усі інші ребра в графі орієнтуємо в обидва боки. Таким чином, ми отримали орграф без джерел, на якому немає обходу сторожа. Це суперечить припущенню про те, що G – не повний мультичастковий граф. $\square$

Твердження 3.20. [7] *Нехай G – зв'язний граф. Розглянемо наступні умови:*
1) G – повний мультичастковий
2) Кожна проста орієнтація G без джерел містить обхід сторожа
3) Кожна проста орієнтація G без одновершинних сильнозв'язних компонент містить обхід сторожа
Тоді 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3), причому жодну імплікацію не можна обернути.

Доведення.
1) $\Rightarrow$ 2). За теоремою 3.18.
2) $\Rightarrow$ 3). Очевидно, що якщо кожна проста орієнтація G без джерел містить обхід сторожа, то і кожна проста орієнтація G без джерел і стоків містить обхід сторожа. $\square$

Приклад 3.21. Обернення першої імплікації ($2 \Rightarrow 1$) не працює для циклів на більш, ніж 4 вершинах.

Приклад 3.22. Граф, для якого не виконується обернення другої імплікації ($3 \Rightarrow 2$).

Будь, яка орієнтація такого графа без джерел і стоків містить обхід сторожа, проте існує орієнтація без джерел, в якій немає такого обходу.

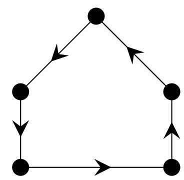

Рис. 2: C_5 – орграф, для якого не працює обернення першої імплікації.

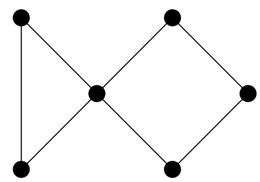

Рис. 3: Граф G, для якого не працює обернення другої імплікації.

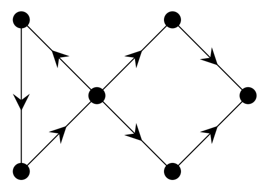

Рис. 4: Орієнтація G без джерел, яка не містить обходу сторожа.

Твердження 3.23. *Кожна проста орієнтація G без джерел містить обхід сторожа тоді, і тільки тоді, коли в G кожен цикл домінуючий.*

Доведення.
($\Rightarrow$) Доведення здійснюватимемо методом від супротивного. Нехай G – граф. Припустимо, що в G існує цикл $C_n = v_1 ... v_n v_1$, який не є домінуючим. Отже, існує така вершина w, що $\forall v \in C_n \ : \ wv \notin V(G)$. Побудуємо орієнтацію D графа G без джерел, при якому не існуватиме обхід сторожа. Орієнтуємо цикл C_n наступним чином: $v_1 \to ... \to v_n \to v_1$, а усі інші ребра орієнтуємо "від"C_n. Очевидно, що в такому разі в D не буде джерел, а обхід сторожа мусить міститись у C_n. Проте, w не з'єднана дугою з жодною з вершиною з C_n. А отже, на D немає обходу сторожа.

($\Leftarrow$) Доведення подібне до доведення теореми 3.18. Нехай G – граф, у якого кожен цикл домінуючий, а D – орієнтація G без джерел. Нехай $\{T_1, T_2, ... \ T_k\}$ – сильнозв'язні компоненти D. Розглянемо конденсацію $D^* = \{t_1, t_2, ... \ t_k\}$, де вершина t_i відповідає сильнозв'язній компоненті T_i. Розглянемо довільну вершину t, і нехай P – найдовший ланцюг, що закінчується в t. Нехай u – початкова вершина P. Будь-який цикл у D^* відповідатиме більшій сильнозв'язній компоненті в D, що суперечить вибору $\{T_i\}$. Отже, u не має вхідних сусідніх вершин з P. Позаяк P – найдовший ланцюг, то P також не має вхідних сусідніх вершин з $D^* \setminus P$. Це означає, що кожна вершина в сильнозв'язній компоненті U не має вхідних сусідів з будь-якої іншої сильнозв'язної компоненти. Позаяк кожна вершина має хоча б одну вхідну дугу, то U містить не менше 2 вершин. А отже, U містить цикл, і, звідси, дуги до всіх сильнозв'язних компонент. З цього випливає, що у D^* існує дуга між u та кожною іншою сильнозв'язною компонентою. Позаяк u – джерело в D^*, компонента U є домінуючою. А отже, обхід сторжа міститься у сильнозв'язній компоненті U. □

3.2 Число сторожа для турнірів

Теорема 3.24. [1] *Кожен турнір містить гамільтонів ланцюг.*

Теорема 3.25. [2] *Нехай T — турнір на більш ніж 2 вершинах. Якщо $\gamma(T) > 1$, то $w(T) = \gamma(T)$ або $w(T) = \gamma(T) + 1$.*

Доведення. Нехай $T(V, A)$ — турнір порядку n. Нехай $\gamma(T) = k$ для деякого $1 < k < n$. Згідно з Теоремою 3.24 кожен турнір містить гамільтонів ланцюг. Очевидно, що мінімальна домінуюча множина $\Gamma = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ також породжує турнір T'. А отже, він теж містить гамільтьонів ланцюг. Без втрати загальності будемо вважати $H = v_1, v_2, ..., v_k$ цим ланцюгом.

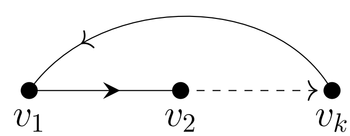

Рис. 5: Обхід сторожа, при якому $w(T) = \gamma(T)$.

Якщо $(v_k, v_1) \in A$, то маємо $w(T) = \gamma(T)$ (Рис. 5).

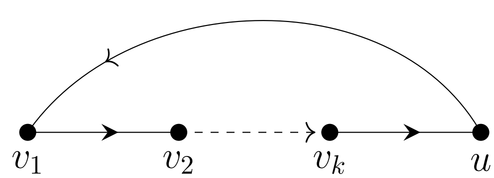

Рис. 6: Обхід сторожа, при якому $w(T) = \gamma(T) + 1$.

Інакше, $\exists u \in U_\Gamma(v_k)$, а отже, $(u, v_1) \in A$ і $w(T) = \gamma(T) + 1$ (Рис. 6).

□

3.3 Число сторожа для повних мультичасткові орграфів

Теорема 3.26. *Нехай D — повний мультичастковий орграф, що не містить джерел. Якщо його найменша домінуюча множина Γ породжує турнір, то*

$$w(D) \leq \gamma(D) + 3.$$

Доведення. Позаяк $\Gamma = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ породжує турнір, то у ній існує гамільтонів ланцюг. Без втрати загальності будемо вважати $H = v_1, v_2, ..., v_k$ цим ланцюгом.

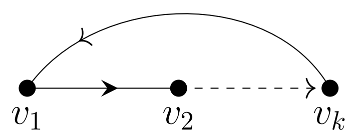

Рис. 7: Обхід сторожа, при якому $w(T) = \gamma(T)$.

Якщо $(v_k, v_1) \in A$, то маємо $w(D) = \gamma(D)$ (Рис. 7).

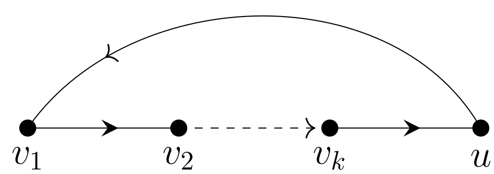

Рис. 8: Обхід сторожа, при якому $w(T) = \gamma(T) + 1$.

Інакше, $\exists u \in U_\Gamma(v_k)$. Якщо v_1 та u належать до різних часток, то $(u, v_1) \in A$ і $w(T) = \gamma(T) + 1$ (Рис. 8).

Якщо v_1 та u належать до однієї частки, то $\exists x \in V : (x, v_1) \in A$.

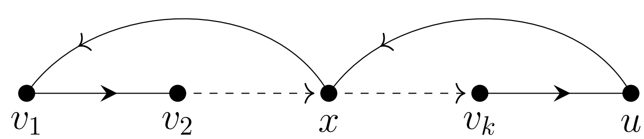

Рис. 9: Обхід сторожа, при якому $w(T) = \gamma(T) + 2$.

Якщо при цьому $x \in \Gamma$, то $(u, x) \in A$ і $w(D) = \gamma(D) + 2$ (Рис. 9).

Якщо при цьому $x \notin \Gamma$, то $\exists v_i, 2 \leq i \leq k-1 : (v_i, x) \in A$ і $w(D) = \gamma(D) + 3$ (Рис. 10). $\square$

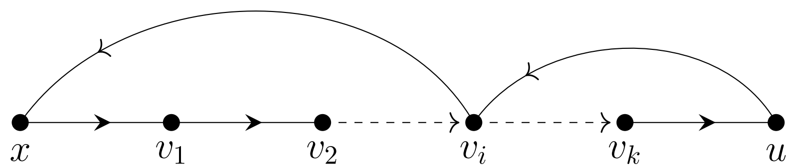

Рис. 10: Обхід сторожа, при якому $w(T) = \gamma(T) + 3$.

Теорема 3.27. *Нехай D — повний мультичастковий орграф. Якщо D не містить джерел, то $w(D) \leq \gamma(D) + 3\alpha(D)$.*

Доведення. Нехай $D(V, A)$ — повний мультичастковий орграф і Γ — його мінімальна домінуюча множина. Очевидно, що при цьому Γ породжує в D повний мультичастковий орграф.

Нехай m — кількість вершин у найбільшій частці $D[\Gamma]$. Очевидно, що $m = \alpha(D[\Gamma]) \leq \alpha(D)$. Тоді Γ можна розбити на m неперетинних частин таким чином, що кожна з них буде породжувати в $D[\Gamma]$ турнір $T_1, T_2, ..., T_m$. Будемо називати ці турніри домінуючими.

Порядок першого турніру T_1 буде дорівнювати кількості часток в $D[\Gamma]$. Порядок T_2 буде дорівнювати кількості часток в $D[\Gamma \backslash V(T_1)]$, порядок T_k дорівнюватиме кількості часток в $D[\Gamma \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} V(T_i))]$ і так далі.

Для доведення теореми нам тепер достатньо показати побудову переходів між турнірами T_i, T_{i+1}, $1 \leq i \leq m-1$, а також між турнірами T_m та T_1. Такі переходи підпадають під наступні класи:

1) перехід від турніру на не менш, ніж 2 вершинах до турніру з будь-якою кількістю вершин;

2) перехід між двома одновершинними турнірами;

3) перехід від одновершинного домінуючого турніру до будь-якого домінуючого турніру.

Спочатку покажемо перехід від турніру T_i на не менш ніж 2 вершинах до будь-якого домінуючого турніру T_{i+1}.

Припустимо, що $|V(T_i)| \geq 2$ і $|V(T_{i+1})| \geq 1$. Нехай

$$V(T_i) = \{u_1, u_2, ..., u_t\},$$
$$V(T_{i+1}) = \{v_1, ..., v_s\},$$

де $t = |V(T_i)|$, $s = |V(T_{i+1})|$.

Згідно з Теоремою 3.24, кожен турнір містить гамільтонів ланцюг. Без втрати загальності будемо вважати, що $u_1, u_2, ..., u_t$ і $v_1, ..., v_s$ — гамільтононові ланцюги T_i і T_{i+1} відповідно (Рис. 11).

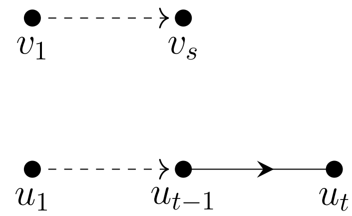

Рис. 11: Гамільтонові ланцюги турнірів T_i та T_{i+1}.

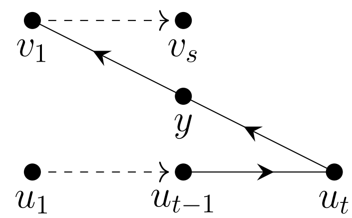

Рис. 12: Перехід від T_i до T_{i+1}.

Згідно з Лемою 3.11, існує непорожня множина унікально домінованих вершин $U_\Gamma(u_t)$. Якщо існує така вершина $y \in U_\Gamma(u_t)$, що y і v_1 лежать в різних частках, то $(y, v_1) \in A$, і ми завершили побудову шляху з T_i до T_{i+1} (Рис. 12).

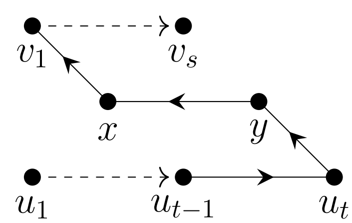

Рис. 13: Перехід від T_i до T_{i+1}.

Розглянемо тепер випадок, коли усі $y \in U_\Gamma(u_t)$ лежать в тій же частці, що і v_1. Згідно з умовою, D не містить джерел, а отже, існує така вершина $x \in V$, що $(x, v_1) \in A$.

Якщо при цьому $x \in \Gamma$, то $\forall\ y \in U_\Gamma(u_t) : (y, x) \in A$, і ми завершили побудову шляху з T_i до T_{i+1} (Рис. 13).

Інакше, якщо $x \notin \Gamma$ та існує така вершина $y \in U_\Gamma(u_t)$, що $(y, x) \in A$, то ми знову завершили побудову шляху з T_i до T_{i+1} (Рис. 13).

Якщо ж $x \notin \Gamma$ але для всіх $y \in U_\Gamma(u_t)$ маємо $(y, x) \notin A$, то, зважаючи, на те, що x та y належать до різних часток, маємо $(x, y) \in A$. В такому разі $U_\Gamma(u_t) \subseteq N^+(x)$ і ми можемо перебудувати мінімальну домінуючу множину:

$$\Gamma' = (\Gamma \setminus \{u_t\}) \cup \{x\}.$$

У новій мінімальній домінуючій множині Γ' існує непорожня множина $U_{\Gamma'}(u_{t-1})$ (Рис. 14).

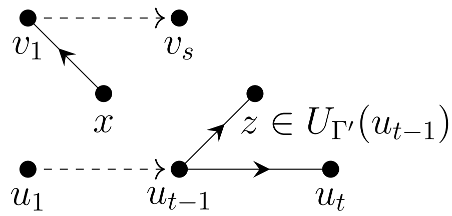

Рис. 14: Перебудова Γ'.

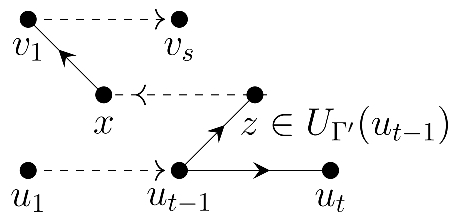

Рис. 15: Шлях від T_i до T_{i+1}.

Оскільки $x \notin \Gamma$, то існує вершина $w \in \Gamma$, що домінує x. Тобто, $(w, x) \in A$. Оскільки w та x належать новій мінімальній домінуючій множині Γ', і вони, очевидно, належать до різних часток, то існує як мінімум одна з дуг $\{(z, w), (z, x)\}$. А отже, ми побудували шлях з T_i до T_{i+1} (Рис. 15).

Таким чином ми показали побудову переходів від турнірів T_i на не менш ніж 2 вершинах до будь-яких домінуючх турнірів T_{i+1}.

Тепер покажемо побудову переходів між одновершинними домінуючими турнірами.

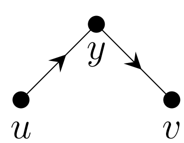

Рис. 16: Шлях від T_i до T_{i+1}.

Припустимо, що $V(T_i) = \{u\}$ і $V(T_{i+1}) = \{v\}$. Очевидно, що u та v лежать в одній частці. Якщо $\exists\, y \in U_\Gamma(u) : (y, v) \in A$, то ми побудували шлях з T_i до T_{i+1} (Рис. 16).

Розглянемо випадок, коли $U_\Gamma(u) = \{u\}$. Згідно з умовою, D не містить джерел, а отже, існує $w \in V : (w, v) \in A$. Якщо $w \in \Gamma$, то $(u, w) \in A$, і ми знову побудували шлях між турнірами.

Якщо ж $w \notin \Gamma$, то $\exists\, s \in \Gamma : (s, w) \in A$ (Рис. 17). Якщо при цьому u та s лежать в різних частках, то $(u, s) \in A$.

Інакше, якщо u та s лежать в одній частці і при цьому $(w, u) \in A$, то розглянемо останню домінуючу вершину t, з якої ми сконструювали шлях до u (Рис. 18).

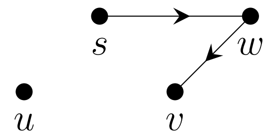

Рис. 17: Шлях від T_i до T_{i+1}.

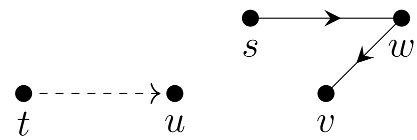

Рис. 18: Шлях від T_i до T_{i+1}.

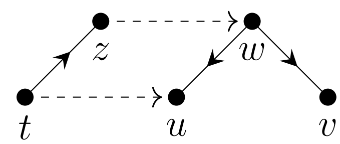

Рис. 19: "Обхідний" шлях від T_{i-1} до T_{i+1}.

Оскільки $U_\Gamma(u) = \{u\}$, ми можемо перебудувати мінімальну домінуючу множину:

$$\Gamma' = (\Gamma \setminus \{u\}) \cup \{w\}.$$

У новій мінімальній домінуючій множині Γ' існує непорожня множина $U_{\Gamma'}(t)$, а отже, $\exists\ z \in U_{\Gamma'}(t) : (z, s) \in A$ або $(z, w) \in A$. Таким чином, ми сконструювали "обхідний" шлях з T_{i-1} до T_{i+1}, при цьому зберігаючи усі УДВ для T_i (Рис. 19).

Таким чином ми показали побудову переходів між одновершинними турнірами. Отже, залишилось розглянути побудову переходу від одновершинного турніру до домінуючого турніру з більш ніж одною вершиною.

Нехай

$$V(T_i) = \{u\},$$
$$V(T_{i+1}) = \{v_1, ..., v_t\},$$

де $t = |V(T_{i+1})|$. Якщо u та v_1 лежать в одній частці, то механізм побудови шляху співпадає з описаним вище. Тому припустимо, що u та v_1 лежать в різних частках.

Якщо $u \in U_\Gamma(u)$, то $(u, v_1) \in A$, і побудову завершено.

Розглянемо випадок, коли $u \notin U_\Gamma(u)$. Якщо $\exists\ y \in U_\Gamma(u) : y$ та v_1 лежать в різних частках, то $(y, v_1) \in A$, а отже, побудову завершено.

Припустимо, що $\forall\ y \in U_\Gamma(u) : y$ та v_1 лежать в одній частці. Згідно з умовою, існує така вершина $w \in V$, що $(w, v_1) \in A$. Якщо $w \in \Gamma$, то $(y, w) \in A$.

Інакше, $\exists\ s \in \Gamma : (s, w) \in A$. Якщо при цьому $\exists\ y \in U_\Gamma(u) : y$ та s лежать в різних частках, то $(y, s) \in A$ і ми побудували шлях з T_i до T_{i+1} (Рис. 20).

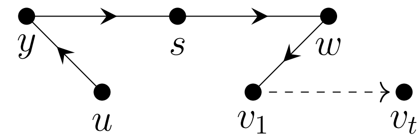

Рис. 20: Шлях від T_i до T_{i+1}.

Якщо при цьому $\forall\ y \in U_\Gamma(u) : y$ та s лежать в одній частці, а також, $\forall\ y \in U_\Gamma(u) : (w, y) \in A$, то ми можемо перебудувати мінімальну домінуючу множину:

$$\Gamma' = (\Gamma \setminus \{u\}) \cup \{w\}.$$

Розглянемо останню домінуючу вершину t^*, з якої ми сконструювали шлях до

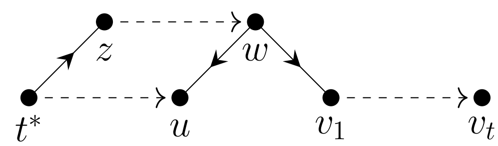

Рис. 21: "Обхідний" шлях від T_{i-1} до T_{i+1}.

u. Очевидно, що існує $z \in U_{\Gamma'}(t^*) : (z, s) \in A$ або $(z, w) \in A$. Ми сконструювали "обхідний" шлях з T_{i-1} до T_{i+1}, при цьому зберігаючи усі УДВ для T_i (Рис. 21).

Таким чином, ми показали усі можливі конструкції шляхів між турнірами. Щоб підрахувати верхню межу числа сторожа на D скористаємось фактом, що кількість переходів між турнірами, які нас цікавлять, дорівнює m. При цьому сумарна довжина гамільтонових ланцюгів цих турнірів дорівнює $\gamma(D) - m$. Легко перевірити, що найдовший перехід між домінуючими турнірами зображений на Рис. 20 і його довжина дорівнює 4. Таким чином, сумарна довжина обходу сторожа на D не перевищує $\gamma(D) - m + 4m$, а отже,

$$w(D) \leq \gamma(D) + 3m = \gamma(D) + 3\alpha(D[\Gamma]) \leq \gamma(D) + 3\alpha(D).$$

$\square$

4 Алгоритми

Згідно з Наслідком 3.17 Леми 3.16, якщо обхід сторожа існує, то він знаходиться в домінуючій вершині сюр'єктивної конденсації орграфа. А отже, знаходження замкненого домінуючого шляху можна розділити на такі етапи:

1) знаходження сильнозв'язних компонент графа;
2) знаходження сюр'єктивної конденсації [3.15];
3) знаходження домінуючої вершини v^* в конденсації;
4) побудова замкненого шляху в сильнозв'язній компоненті, що відповідає v^*.

Слід зазначити, що отриманий замкнений домінуючий шлях не обов'язково буде мінімальним, а отже, можливо, не буде обходом сторожа.

4.1 Знаходження сильнозв'язних компонент

Для початку розглянемо знаходження сильнозв'язних компонент орієнтованого графа. Можна виокремити алгоритми Тар'яна [4] та Косараджу-Шаріра [5].

Тут наведена реалізація пошуку сильнозв'язних компонент алгоритмом Тар'яна (реалізація на мові Python). Функція отримує на вхід орграф в структурі словника і повертає список сильнозв'язних компонент.

```python
def tarjan_scc(graph):
    """
    Finds strongly connected components of a digraph

    Parameters:
    ----------
    graph : a dictionary representing the directed graph

    Return:
    ------
    scc : a list of strongly connected components
    """
    index_counter = [0]
    stack = []
    lowlinks = {}
    index = {}
    scc = []

    def strongconnect(node):
        # set the depth index for this node to the smallest unused index
        index[node] = index_counter[0]
        lowlinks[node] = index_counter[0]
        index_counter[0] += 1
        stack.append(node)

        successors = graph[node]

        for successor in successors:
```

```
            if successor not in lowlinks:
                # Successor has not yet been visited -> recurse on it
                strongconnect(successor)
                lowlinks[node] = min(lowlinks[node],lowlinks[successor])
            elif successor in stack:
                # The successor is in the stack and hence
                # in the current strongly connected component (SCC)
                lowlinks[node] = min(lowlinks[node], index[successor])

        # If ‘node‘ is a root node, pop the stack and generate an SCC
        if lowlinks[node] == index[node]:
            connected_component = []
            while True:
                successor = stack.pop()
                connected_component.append(successor)
                if successor == node: break
            scc.append(connected_component)

    for node in graph:
        if node not in lowlinks:
            strongconnect(node)

    return scc
```

4.2 Знаходження сюр'єктивної конденсації

Наступним ми розглянемо знаходження сюр'єктивної конденсації [3.15]. Функція приймає на вхід орграф та список сильнозв'язних компонент і повертає орграф сюр'єктивної конденсації.

```
def digraph_sur_condensation(digraph, strongly_connected_components):
    # create a new directed graph
    surjective_condensed_digraph = dict()

    # add each strongly connected component as a node in the new graph
    for component in strongly_connected_components:
        surjective_condensed_digraph[component] = []

    # add edges between the strongly connected components
    for component_i in surjective_condensed_digraph:
        for vertex in component_i:
            successors = digraph[vertex]
            for component_j in surjective_condensed_digraph:
                if component_i != component_j and all(succ in component_j for
    succ in successors):
                    # add edge from component_i to component_j
                    surjective_condensed_digraph[component_i].append(component_j)

    return surjective_condensed_digraph
```

4.3 Знаходження домінуючого сильнозв'язного підграфа

Далі нам потрібно визначити домінуючу вершину в сюр'єктивній конденсації. Наступна функція приймає на вхід орграф і повертає домінуючу вершину.

```
def get_universal_vertex(digraph):
    for node in digraph:
        if len(digraph[node]) == len(digraph)-1:
            return node
    return None
```

Щоб визначити домінуючу сильнозв'язну компоненту, нам потрібно знайти підграф, який відповідає домінуючій вершині в сюр'єктивній конденсації. Наступна функція отримує на вхід орграф та множину вершин шуканого підграфа.

```
def subdigraph(digraph, subvertices):
    subdigraph = {}
    for node in subvertices:
        if node in digraph:
            subdigraph[node] = []
            for succ in digraph[node]:
                if succ in subvertices:
                    subdigraph[node].append(succ)
    return subdigraph
```

Висновки

В роботі досліджено проблему обходу сторожа на орієнтованих і орієнтованих графах. Показано і доведено характеристику повних мультичасткових орграфів, показано верхню оцінку числа сторожа для повних мультичасткових орграфів, а також, охарактеризовано клас графів, для яких будь-яка проста орієнтація, що не має джерел, містить обхід сторожа. В кінці роботи наведена реалізація (на мові Python) алгоритмів знаходження сильнозв'язних компонент, сюр'єктивної конденсації орграфа, та деякі інші базові алгоритми, необхідні для знаходження замкненого домінуючого шляху в орієнтованому графі.

У першому розділі були введені основні означення з теорії графів, у другому розділі показано основні відомі результати дослідження проблеми обходу сторожа на неорієнтованих графах, у третьому розділі ми також показуємо основні відомі результати дослідження проблеми обходу сторожа на орієнтованих графах, а також заглиблюємось у дослідження повних мультичасткових орграфів. Крім цього, даємо характеристику класу графів, для якого будь-яка проста орієнтація без джерел містить обхід сторожа. У четвертому розділі ми показуємо ряд алгоритмів, необхідних для знаходження замкненого домінуючого шляху у орієнтованому графі. Серед них: алгоритм знаходження сильнозв'язних компонент Тар'яна **??**, а також, знаходження сюр'єктивної конденсації орграфа.

Література

[1] L. Rédei, *Ein kombinatorischer satz*, Acta Litteraria Szeged **7** (1934), 39–43.

[2] D. Dyer, *The watchman's walk problem on directed graphs*, Australas. J. Comb. **80(2)** (2021), 197–216.

[3] Hartnell, B.L., Rall, D.F., and Whitehead, C.A., *The watchman's walk problem: An introduction*, Cong. Numer. **130** (1998), 149–155.

[4] Tarjan, R.E., *Depth-first search and linear graph algorithms*, SIAM Journal on Computing. **Vol. 1, no. 2 (13 May)** (1972), 146–160.

[5] Micha Sharir, *A strong-connectivity algorithm and its applications to data flow analysis.*, Computers and Mathematics with Applications. **7(1)** (1981), 67–72.

[6] B. L. Hartnell, D. F. Rall and C. A. Whitehead, *The watchman's walk problem: An introduction*, Congr. Numer. **130** (1998), 149–155.

[7] С.О. Козеренко, Б.Ю. Романчук, *Орієнтації графів і проблема обходу сторожа*, XI Всеукраїнська конференція молодих математиків, травень 2023, Київ, Україна.