НЕШІВСЬКА РІВНОВАГА В ІГРАХ З РОЗПОДІЛУ КАПІТАЛУ

Доповідач: Глуховський П.О.
Науковий керівник: Чорней Р.К.

Національний Університет «Києво-Могилянська Академія»

ІГРИ ВИДОБУТКУ РЕСУРСІВ

- - Єдиний ресурс у спільному доступі
- - Ресурс із часом відновлюється
- - Кожен агент незалежно «видобуває» якийсь об'єм
- - «Видобуток» у дискретні моменти часу
- - Максимізація вигоди (корисності)

ФОРМА ЗАДАЧІ

- \- Кількість учасників довільна більше двох
- \- Простір станів - необмежений інтервал
- \- Функції корисності є необмеженими,
- \- Перехід між станами через стохастичне ядро, залежне від величини спільної інвестиції агентів
- \- Гра симетрична (доступ до рівних частин наявного об’єму)

- \- Функція корисності - логарифмічна
- \- Стохастичний закон – геометричне випадкове блукання

УМОВИ ЗАДАЧІ

- **(I)** Кількість учасників - стала. Кожен гравець має номер від 1 до m.
- **(II)** Кількість ресурсу, доступного для використання в момент часу $t \in T$, називається станом гри в момент t і позначається s_t. Множина всіх можливих обсягів ресурсу називається простором станів і дорівнює $S = [0; +\infty)$.
- **(III)** Гравці незалежно один від одного приймають рішення на кожному з етапів $t \in T$. Простір рішень, доступних для кожного гравця, залежить від поточного стану гри $s_t \in S$ і дорівнює $A(s_t) = [0; s_t/m]$. Позначимо $D(s_t) := \underbrace{A(s_t) \times \cdots \times A(s_t)}_{m}$.
- **(IV)** Миттєвою корисністю кожного гравця є неперервна зростаюча функція $u: S \to (0; +\infty)$.
- **(V)** Закон переходу між станами задається рівнянням стану $s_{t+1} = M(s_t, \bar{a}_t, \xi_t)$ де M - неперервна функція, залежна від стану гри $s_t \in S$ та вектору рішень гравців $\bar{a}_t \in D(s_t)$ в момент часу $t \in T$, а також від випадкового збурення ξ_t, що набуває значень в деякому просторі Q. Областю значень функції M п простір S, причому виконується властивість $M(0, (0, \dots, 0), \cdot) = 0$, тобто $s = 0$ є поглинаючим станом.
- **(VI)** Спільний множник дисконтування $\beta \in (0; 1)$.
- **(VII)** Загальний виграш гравця $i \in [m]$ дорівнює $\sum_{t \in T} \beta^{t-1} u(a_{ti})$ де $a_{ti} - i$-та координата $\bar{a}_t$.

Припущення A1:

Функція корисності

$$u(x) = c \log_a(x)$$

де $c \in (0; +\infty), a > 1$

Припущення A2:

Закон переходу між станами

$$s_{t+1} = \left(s_t - \sum_{i=1}^{m} a_{ti}\right) \cdot \xi_t$$

Гра скінченна:

$$T = \{1, \dots, N\}$$

ІСНУВАННЯ МАРКОВСЬКОЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІВНОВАГИ. БАЗА ІНДУКЦІЇ

- \- Метод зворотньої індукції
- \- На останньому кроці $t = N$ - одноетапна підгра
- \- для знаходження рівноваги за Нешем у цьому випадку достатньо просто окремо максимізувати прибутки
- \- стратегії всіх гравців є $f^{(1)}(s) = \frac{s}{m}$
- \- виграш кожного з гравців $v^{(1)}(s) = c\log_a(\mathrm{s}) - c\log_a(m)$

ІСНУВАННЯ МАРКОВСЬКОЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІВНОВАГИ. ПЕРЕХІД ІНДУКЦІЇ

- $T_i: \bar{F} \times B_0(S) \to B_0(S)$ для гравця $i \in [m]$ $\qquad T_i(\bar{f}, v)(s) = u(f_i(s)) + \beta\mathbb{E}[v(M(s, f_1(s), \dots, f_m(s), \xi))]$
- T_i - очікуваний виграш i-го гравця в цій грі

- Для $\forall v \in B_0(S)$ - допоміжна одноетапна симетрична гра $\Gamma(v)$
- Очікуваний виграш гравця $i \in [m]$ в$\Gamma(v)$ дорівнює $\qquad w_i(\bar{x}) := c\log_a(x_i) + \beta\mathbb{E}\left[v\left(\left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j\right)\xi\right)\right]$ (3)

- $V -$ простір всіх функцій $v: S \to (-\infty; +\infty)$ виду $v(x) = k\log_a(x) + b$

- **ЛЕМА 1.** Для кожного $v \in V$ у грі $\Gamma(v)$, коли $\beta k > 1$, існує симетрична рівновага за Нешем. Більше того, виграші гравців у ситуації рівноваги також належать простору V, якщо розглядати їх як функції від стану гри $s \in S$.

ІСНУВАННЯ МАРКОВСЬКОЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІВНОВАГИ. ПЕРЕХІД ІНДУКЦІЇ

- частинні похідні першого

$$\frac{\partial}{\partial x_i} w_i(\bar{x}) = c\frac{1}{x_i \ln a} - \frac{\beta k}{\left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j\right) \ln a}$$

- і другого порядку

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} w_i(\bar{x}) = c\frac{-1}{{x_i}^2 \ln a} + \frac{\beta k}{\left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j\right)^2 \ln a}$$

- Кандидат на екстремум $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m)$, де $x_1 = \dots = x_m = \frac{s}{m+\lambda} = f(v)$ та $\lambda = \frac{\beta k}{c}$
- При $\beta k > 1$ всі частинні другі похідні в $\tilde{x}$ – від'ємні, отже $\tilde{x}$ - точка локального максимуму для всіх $w_i(\bar{x})$
- Отже, профіль рішень $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m)$ – рівновага за Нешем
- Заув.1: $w_i(\tilde{x}) \in V$
- Заув.2: При $v \in V$ гра $\Gamma(v)$ є «опуклою» -> це єдина рівновага за Нешем у цій грі

ІСНУВАННЯ МАРКОВСЬКОЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІВНОВАГИ. ПЕРЕХІД ІНДУКЦІЇ

- **Теорема 1.** Кожна N-етапна гра видобутку ресурсів з m гравцями, що задовольняє умови (i)-(vii) та припущення A1-A2, і для якої $\beta k > 1$, має єдину Марковську Ідеальну Рівновагу. Дов.:
- Визначимо $\bar{f}^{(t)} \in \bar{F}$ та $v^{(t)} \in V$ для $t \in [1, N]$:

$$\bar{f}^{(t)} := \mathrm{SNE}\big(\Gamma(v^{(t-1)})\big) \qquad (4)$$

$$v^{(t)}(s) := T_i\big(\bar{f}^{(t)}, v^{(t-1)}\big)(s) \qquad (5)$$

- належність функції $v^{(t)}$ простору V для окремого $t \in \{2, \dots, N\}$ випливає з Леми 1 і того, що $v^{(t-1)} \in V$
- Розглядаємо Марковську стратегію $\pi^{(N)} := \left(f^{(N)}, f^{(N-1)}, \dots, f^{(1)}\right)$
- Нехай $\bar{\pi}^{(N)} \in \Pi -$ профіль стратегій, що скл. із $\pi^{(N)}$ для всіх грацв. Тоді з побудови функцій $f^{(t)} \in F$ та $v^{(t)} \in V$, згідно з принципом оптимальності й рівнянням Беллмана в стохастичному динамічному програмуванні зі скінченним горизонтом, $\bar{\pi}^{(N)}$ - Марковська Ідеальна Рівновага заданої гри

ДОСЛІДЖЕННЯ НА ОПТИМАЛЬНІСТЬ

- Означення. Будемо говорити, що профіль стратегій $\pi \in \Pi$ домінує за Парето інший профіль стратегій $\sigma \in \Pi$, якщо для всіх $s \in S$ та $i \in [m]$ виконуються нерівності про очікувані дисконтовані виграші
$$\gamma_i(\pi)(s) \geqslant \gamma_i(\sigma)(s)$$
причому існують такий гравець $i \in [m]$ та стан $s \in S$, для яких нерівність є строгою.
- Означення. Профіль стратегій $\pi \in \Pi$ називається Парето-оптимальним, якщо він не домінується за Парето жодним іншим профілем стратегій $\sigma \in \Pi$.
- Означення. Профіль стратегій $\pi \in \Pi$ називається соціально-оптимальним (або оптимальним у кооперації), якщо він максимізує сукупність очікуваних виграшів усіх гравців, тобто для всіх $s \in S$ та $\sigma \in \Pi$ виконуються нерівності
- $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\pi)(s) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(\sigma)(s)$

СОЦІАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНІСТЬ

- **ЛЕМА 2.** Для кожного $v \in V$, коли $\beta k > 1$, гра $\Gamma(v)$ має єдиний соціально-оптимальний профіль стратегій. Більше того, відповідні для нього виграші гравців є однаковими і належать простору V як функції від стану гри $s \in S$.
- Нехай $v(x) = k \log_a(x) + b$ для всіх $x \in S$, де $k \in (0; +\infty)$. Тоді $w_i(\bar{x})$ набуває вигляду (3).
- Знайдемо вектор рішень, що максимізує вираз $w_i(\bar{x}) := c \log_a(x_i) + \mathrm{m}\beta k \log_a\left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j\right) + mkl$
- $u(x)$ є строго опуклою вгору функцією на області визначення -> за нерівністю Єнцена маємо, що $u\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \geqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u(x_i)$ та $\sum_{i=1}^{m} u(x_i) \leqslant mu\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right)$. Тому

$$\sum_{i=1}^{m} w_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} u(x_i) + mkl\left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j\right)^{\alpha} \leqslant \sum_{i=1}^{m} w_i(\tilde{x}, \dots, \tilde{x})$$

де $\tilde{x} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$

СОЦІАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНІСТЬ

- Отже, нам достатньо розглядати лише випадок коли $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$

$$W(x) := \sum_{i=1}^{m} w_i(x, \dots, x) = c \log_a(x) + \mathrm{m}\beta k \log_a(s - mx) + mkl$$

- Похідні першого і другого порядку функції $W(x)$ дорівнюють

$$\frac{\partial}{\partial x} W(x) = \frac{m}{lna}\left(\frac{c}{x} - \frac{\mathrm{m}\beta k}{s - mx}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x) = \frac{-m}{lna}\left(\frac{c}{x^2} - \frac{\mathrm{m}\beta k}{(s - mx)^2}\right)$$

- друга похідна функції $W(x)$ є від'ємною – отже $W(x)$ строго опукла вгору на (**0**,s/m**]**
- Знаходимо точку максимуму, де $\frac{\partial}{\partial x} W(x) = 0$. Отримаємо $x = \frac{cs}{m(c+\beta k)}$
- Профіль стратегій, утворений такими однаковими стратегіями гравців є єдиним соціально-оптимальним

ОПТИМАЛЬНІСТЬ ЗА ПАРЕТО

- **Лема 3.** Кожна N-етапна гра видобутку ресурсів з m гравцями, ,що задовольняє умови (i)-(vii) та припущення A1-A2, має єдиний соціально-оптимальний профіль стратегій.
- **Теорема 2.** В N-етапній (де $N \geqslant 2$) грі видобутку ресурсів з m учасниками, що задовольняє умови (i)-(vii) та припущення A1 і A2, Марковська Ідеальна Рівновага $\bar{\pi}^{(N)}$ не є оптимальною за Парето.

- Очікувані дисконтовані виграші гравців, що перебувають у Марковській Ідеальній Рівновазі N-етапної гри видобутку ресурсів, визначаються виразом $v^{(N)}(s_1)$
- Функція $\tilde{v}^{(N)}(s)$ відображає очікуваний дисконтований виграш кожного гравця в соціально-оптимальному положенні $\bar{\sigma}^{(N)}$ заданої N-етапної гри видобутку ресурсів
- для всіх $s > 0$ та $t \in \{2, \dots, N\}$: $f^{(t)}(s) \neq \phi^{(t)}(s)$, що випливає з визначення зазначених функцій
- Тоді для всіх $s \in S$ справедливо, що $v^{(N)}(s) \leqslant \tilde{v}^{(N)}(s)$ причому існують такі $s > 0$, для яких нерівність є строгою, оскільки згідно з Лемою 3 профіль стратегій $\bar{\sigma}^{(N)}$ є єдиним соціально-оптимальним у заданій N-етапній грі видобутку ресурсів.
- Отже, що у визначеній моделі N-етапної гри видобутку ресурсів Марковська Ідеальна Рівновага $\bar{\pi}^{(N)}$ домінується за Парето профілем стратегій $\bar{\sigma}^{(N)}$.

ДЖЕРЕЛА

- Силенко І. В. Марковська Ідеальна Рівновага у грі видобутку ресурсів зі степеневими перевагами агентів : дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю "Прикладна математика" / Силенко Ілля Володимирович ; науковий керівник: Чорней Р. К. ; Національний університет "Києво-Могилянська академія". - Київ : НаУКМА, 2023. - 186 с.
- Balbus, L. and Nowak, A. S. (2008). Existence of perfect equilibria in a class of multigenerational stochastic games of capital accumulation. Automatica, 44(6):14711479.
- Bertsekas, D. P. and Shreve, S. E. (1978). Stochastic optimal control : the discrete time case. Academic Press New York.
- Levhari, D. and Mirman, L. J. (1980). The great sh war: An example using a dynamic Cournot-Nash solution. The Bell Journal of Economics, 11(1):322334.