Класифікація деяких сімейств зліченних графів Кокстера відносно значення індексу

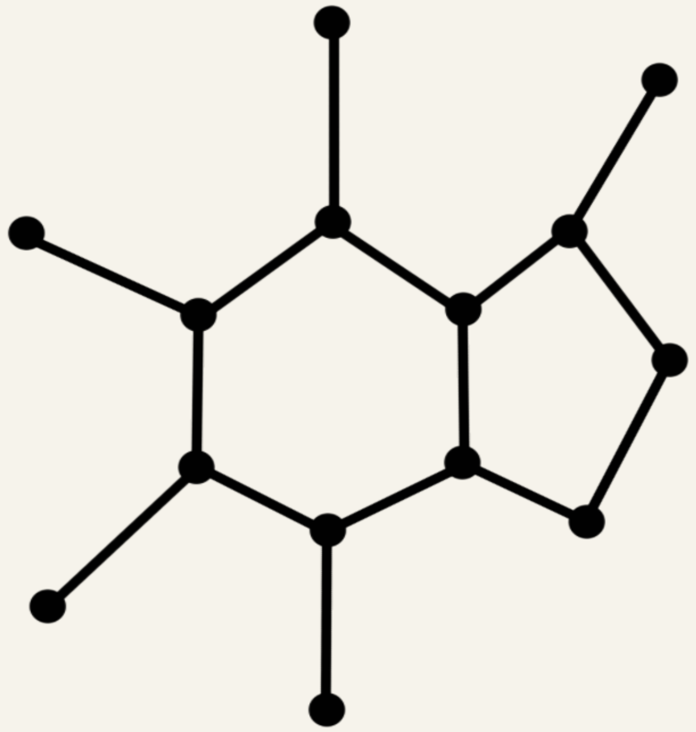
Лучка Катерина

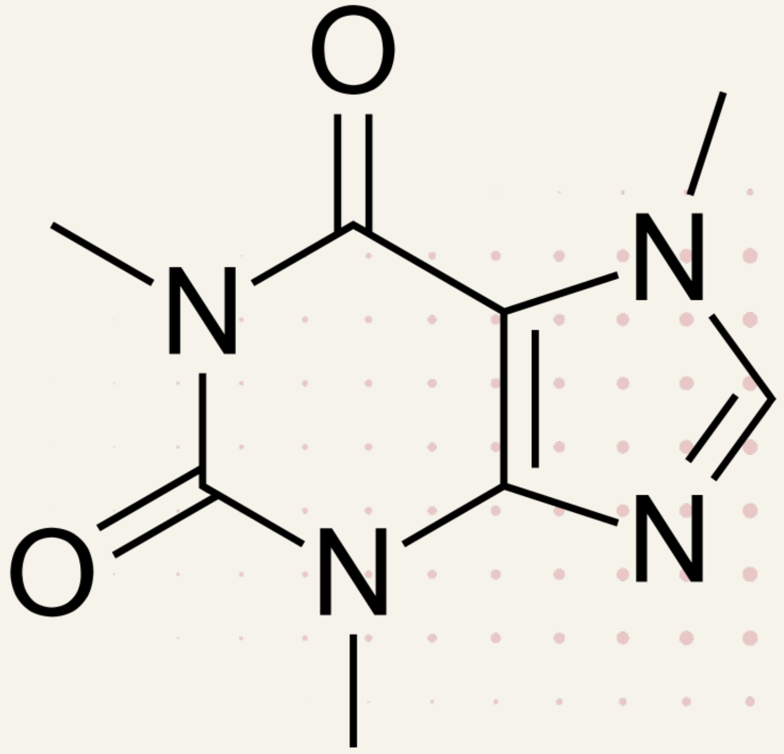
Києво-Могилянська академія | 2024

Вступ

Застосування спектральної теорії графів: [2]

- ✓ У численних науках: хімії, фізиці, комп'ютерних науках, біології, економіці, соціальних науках
- ✓ Теорія представлення





Основні поняття

Граф Кокстера G — це пара (G, f), де G — граф, f — відображення множини ребер графа G у множину, що складається з натуральних чисел, більших за 2, та символу ∞.
Індекс графа — це максимальне власне значення λ_G матриці суміжності графа G.
Зліченний граф Кокстера — це граф Кокстера зі зліченною множиною вершин.
Індексом зліченного графа називаємо додатне число або символ ∞, визначені рівністю:

$$ind\,\boldsymbol{G} = \sup_{\Gamma \in Fin(\boldsymbol{G})} ind\,\Gamma$$

Основні твердження

Твердження 1[4; 5]
$\boldsymbol{G}$ — зліченний зв'язний граф. При видаленні вершини або ребра, зменшенні мітки на ребрі графа $\boldsymbol{G}$ його індекс не збільшується.

Твердження 2 [4; 5]
Нехай $\boldsymbol{G}$ — зліченний зв'язний граф. При підрозбитті внутрішнього ребра індекс не збільшується.

Наслідок 1[4; 5]
Нехай $\boldsymbol{G_1}, \boldsymbol{G_2}$ — зліченні графи. $\boldsymbol{G_1} \subset \boldsymbol{G_2}$. Тоді $ind\ \boldsymbol{G_1} \leq ind\ \boldsymbol{G_2}$.

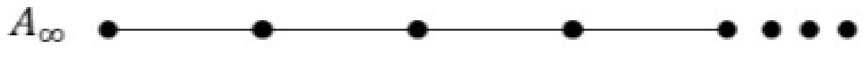
Основні твердження

Твердження 3 [4; 5]

Нехай $\boldsymbol{G}$ - зліченний граф, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність його скінченних підграфів, що задовольняє умовам:

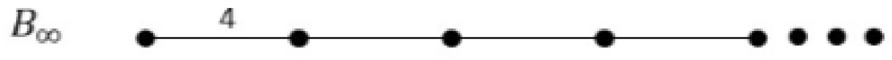
- $G_n \subset G_{n+1}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \boldsymbol{G}$

Тоді $ind\ \boldsymbol{G} = \lim\limits_{n\to\infty} ind\ G_n$



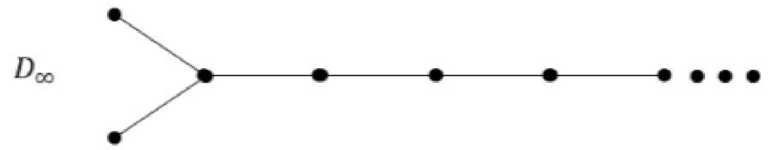
$ind\ A_n = 2\cos\frac{\pi}{n+1}$

$ind\ A_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} 2\cos\frac{\pi}{n+1} = 2$ [4; 5]



$ind\ B_n = 2\cos\frac{\pi}{2n}$

$ind\ B_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} 2\cos\frac{\pi}{2n} = 2$ [4; 5]



$ind\ D_n = 2\cos\frac{\pi}{2(n-1)}$

$ind\ D_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} 2\cos\frac{\pi}{2(n-1)} = 2$ [4; 5]

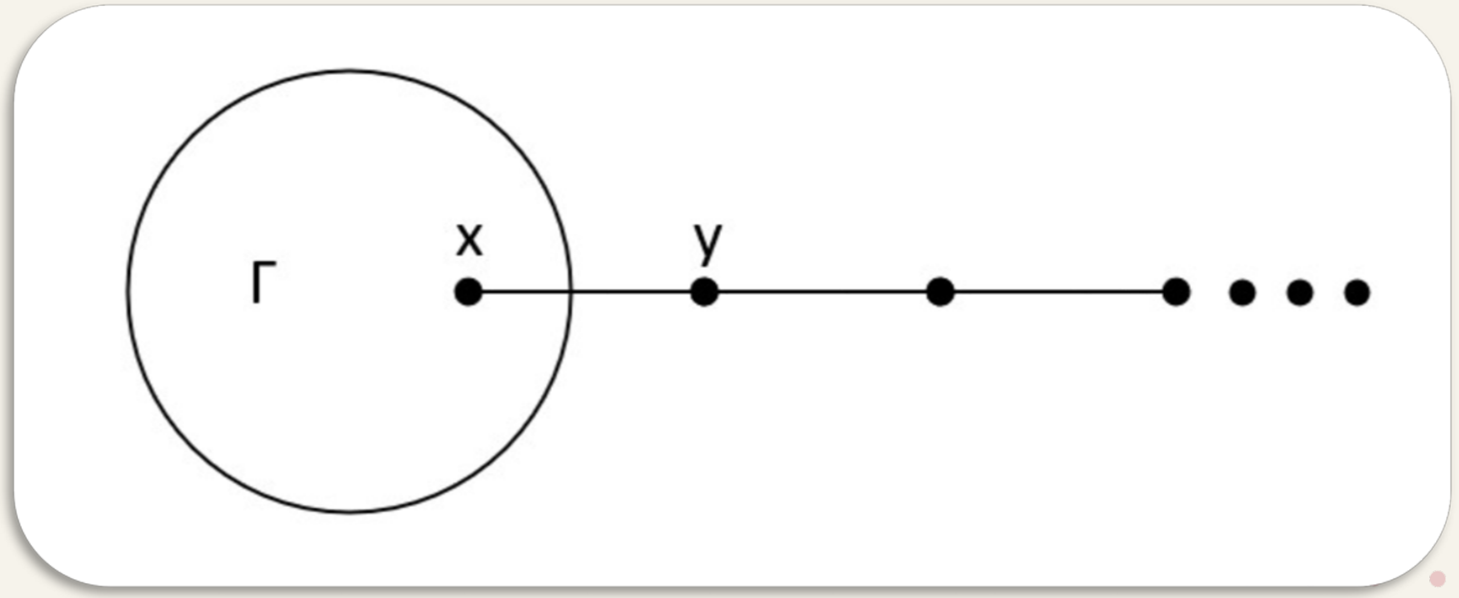
$ind\ A_{\mathbb{Z}} = ind\ A_\infty = 2$ [4; 5]

Індекс графа, що складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга

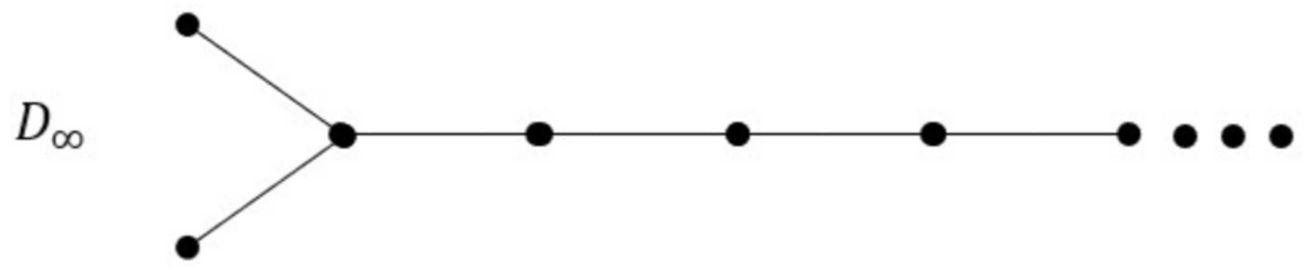
Теорема 1[4; 5]
Нехай зліченний граф (Γ, x) складається з скінченного графа Γ та нескінченного ланцюга. Тоді:

- Якщо $(\Gamma, x) \in \{A_\infty, D_\infty, B_\infty\}$, то $ind(\Gamma, x) = 2$
- Якщо $(\Gamma, x) \notin \{A_\infty, D_\infty, B_\infty\}$, то $ind(\Gamma, x) > 2$ та є максимальним коренем рівняння

$$\frac{P_{\Gamma-x}(\lambda)}{P_\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$



Класифікація зліченних графів Кокстера



Повна класифікація зліченних графів Кокстера у проміжку $\left[2, \sqrt{\sqrt{5}+2}\right]$

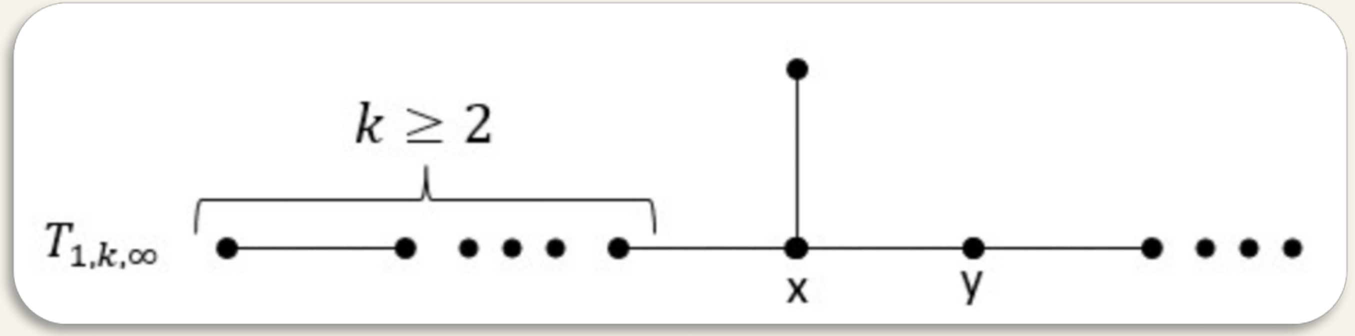
Теорема [4; 5]

Нехай $\boldsymbol{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера, тоді

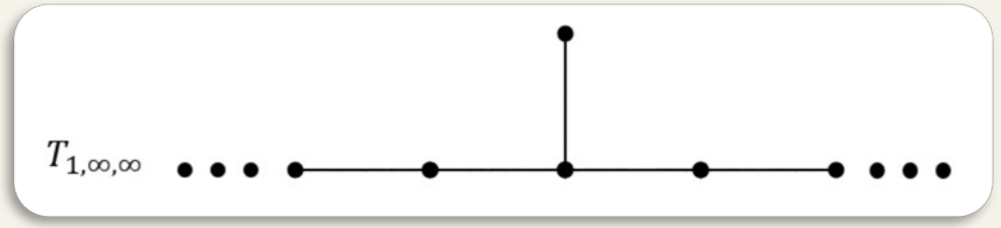
- $ind\, \boldsymbol{G} \geq 2$
- Якщо $ind\, \boldsymbol{G} = 2$, то $\boldsymbol{G}$ – один із наступних графів:

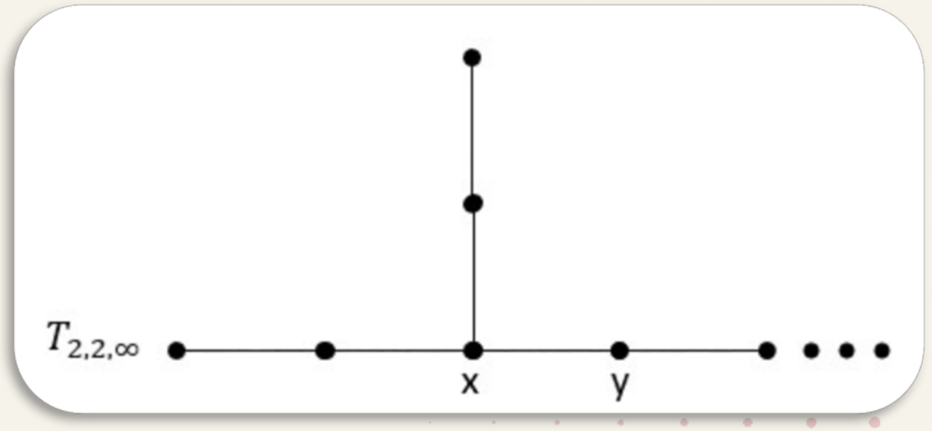
Класифікація зліченних графів Кокстера [6]

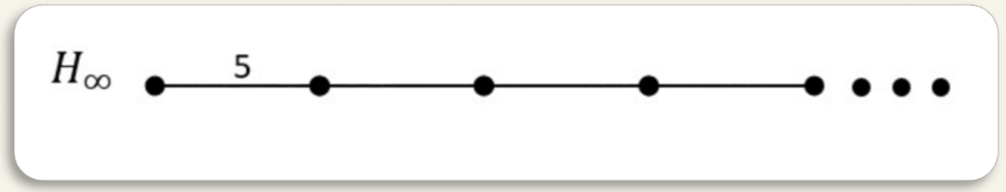
- Якщо $ind\ \boldsymbol{G} \in \left(2, \sqrt{\sqrt{5}+2}\right)$, то $\boldsymbol{G}$ – один із графів серії:

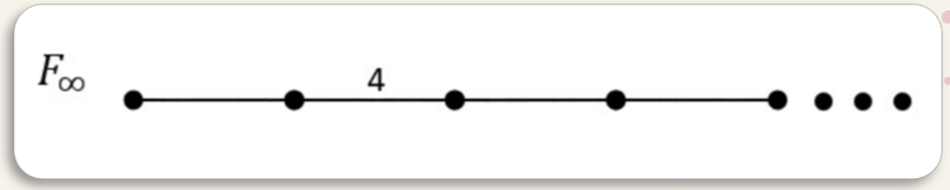


- Якщо $ind\ \boldsymbol{G} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$, то $\boldsymbol{G}$ – один із графів:









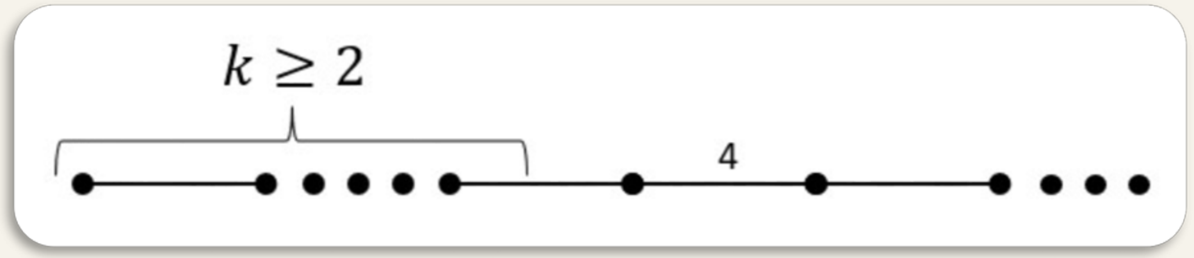
Класифікація зліченних графів Коксте ра

Повна класифікація зліченних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованого графу A_∞

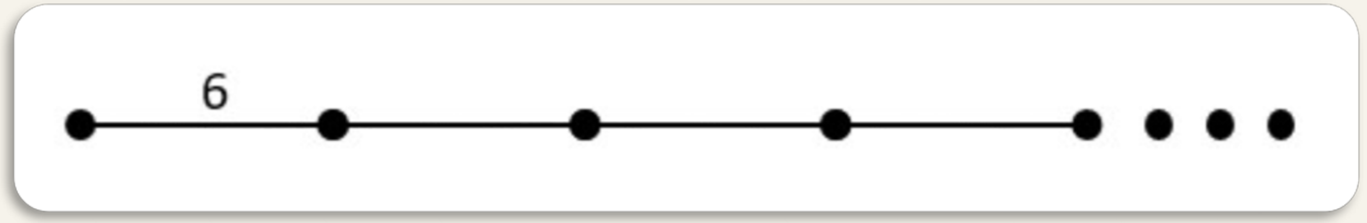
Теорема [6]

Нехай $\boldsymbol{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом A_∞, то

- Якщо $ind\,\boldsymbol{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, то $\boldsymbol{G}$ – один із графів серії:



- Якщо $ind\,\boldsymbol{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то $\boldsymbol{G}$ – граф:

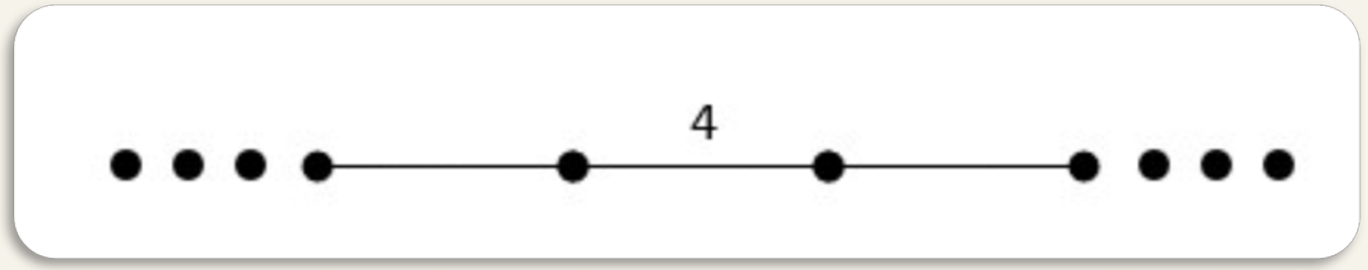


Класифікація зліченних графів Кокстера

Повна класифікація зліченних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованого графа $A_{\mathbb{Z}}$

Теорема [6]

Нехай $\boldsymbol{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом $A_{\mathbb{Z}}$ та його індекс належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, тоді $ind\ \boldsymbol{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ та $\boldsymbol{G}$ – це граф:



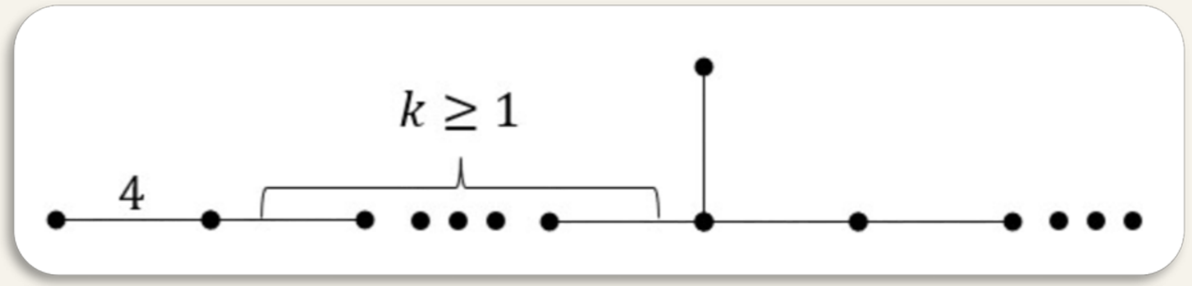
Класифікація зліченних графів Кокстера

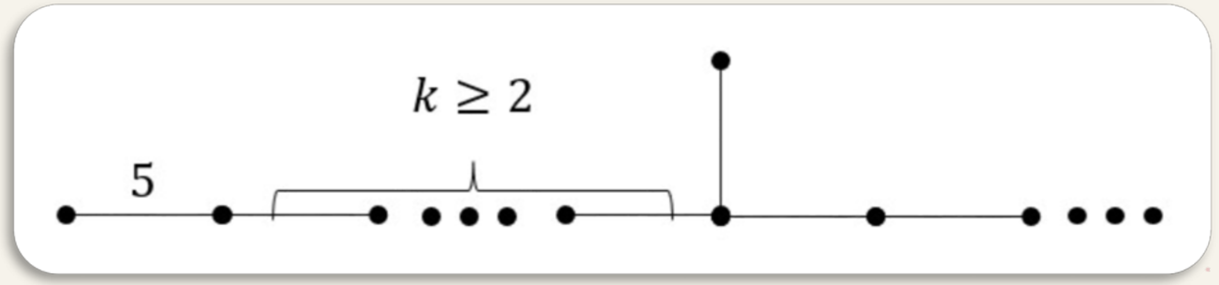
Повна класифікація зліченних графів Кокстера у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих графів $T_{1,k,\infty}$ з позначкою з краю.

<u>Теорема [6]</u>

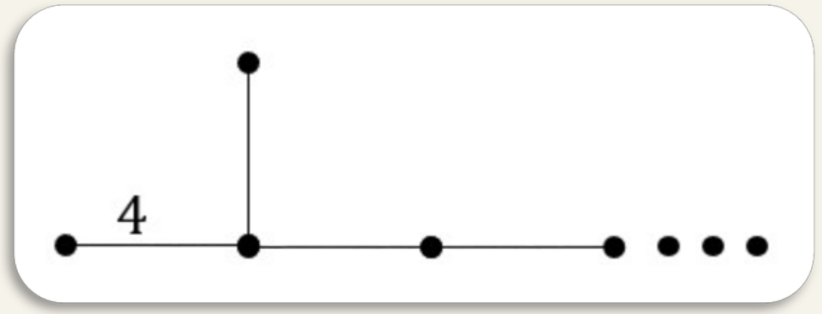
Нехай $\boldsymbol{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими графами $T_{1,k,\infty}$ з позначкою з краю, тоді

Якщо $ind\,\boldsymbol{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, то $\boldsymbol{G}$ – один із графів серії:





Якщо $ind\,\boldsymbol{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то $\boldsymbol{G}$ – граф:

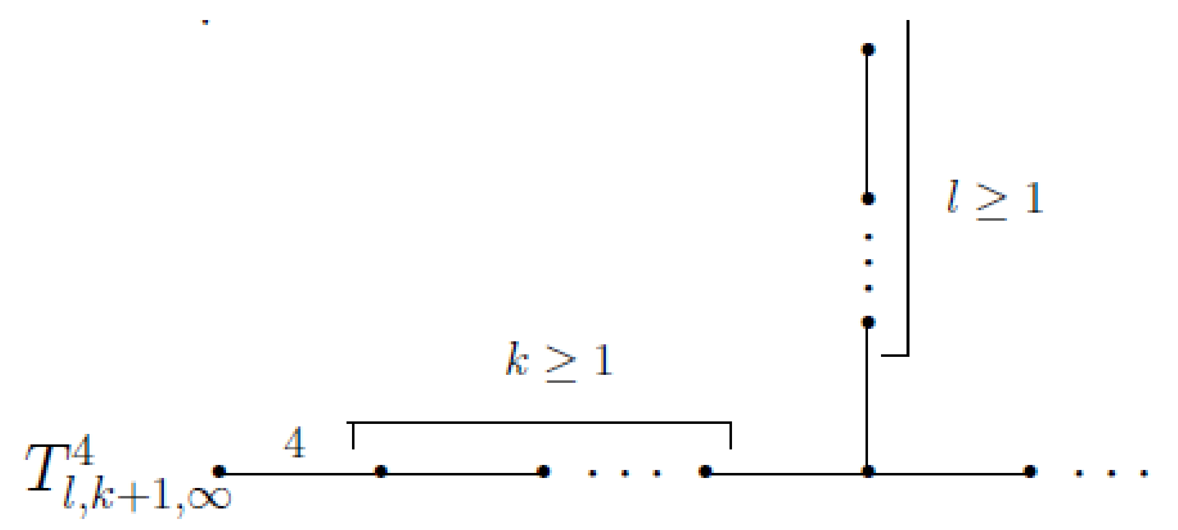


Властивості зліченного графа Кокстера з індексом у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

Теорема

Нехай $\boldsymbol{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом $T^4_{l,k+1,\infty}$, тоді:

- $ind\ \mathrm{T}^4_{l,k+1,\infty} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \iff l \le k.$
- $ind\ \mathrm{T}^4_{l,k+1,\infty} > \frac{3}{\sqrt{2}} \iff l > k.$



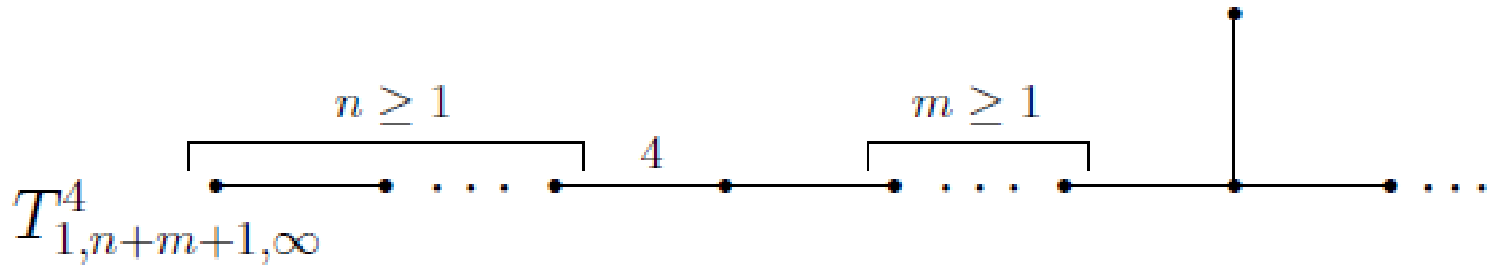
Властивості зліченного графа Кокстера з індексом у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

<u>Теорема</u>

Нехай $\boldsymbol{G}$ – зліченний зв’язний граф Кокстера з підпорядкованим графом $T^4_{1,n+m+1,\infty}$, тоді:

$$ind\ \mathbf{T}^4_{1,n+m+1,\infty} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \iff m \geq n.$$

$$ind\ \mathbf{T}^4_{1,n+m+1,\infty} > \frac{3}{\sqrt{2}} \iff m < n.$$



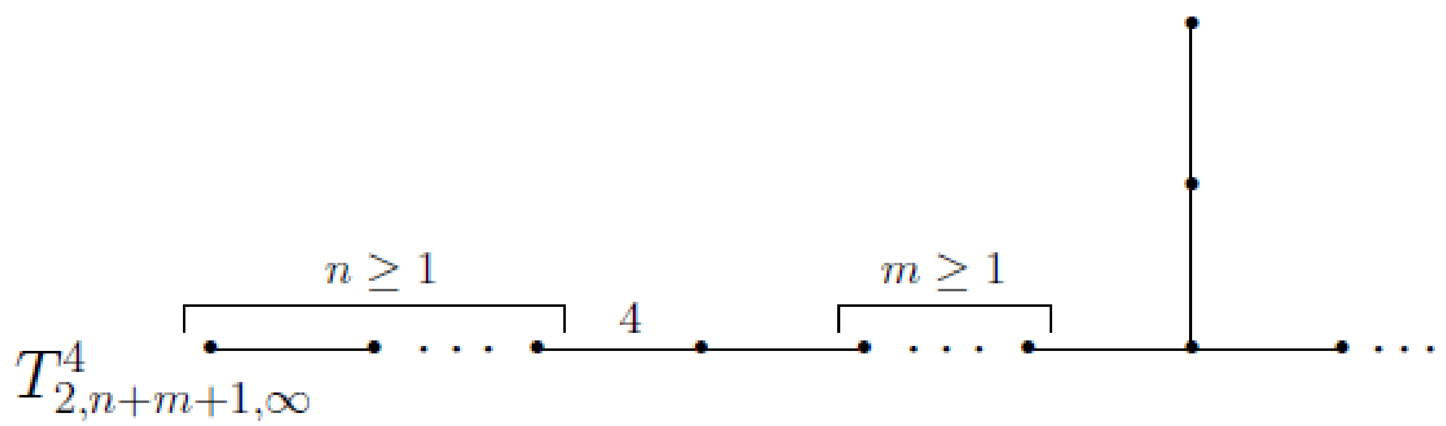
Властивості зліченного графа Кокстера з індексом у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

Теорема

Нехай $\boldsymbol{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом $T^4_{2,n+m+1,\infty}$, тоді:

$$ind\ \mathrm{T}^4_{2,n+m+1,\infty} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \iff n = 1.$$

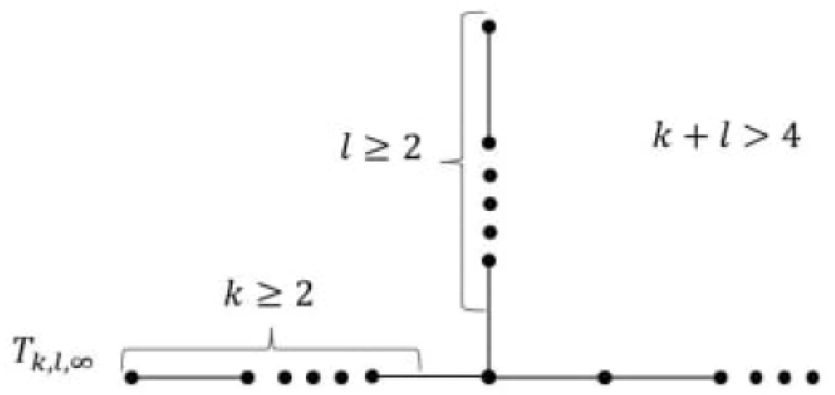
$$ind\ \mathrm{T}^4_{2,n+m+1,\infty} > \frac{3}{\sqrt{2}} \iff n \geq 2.$$

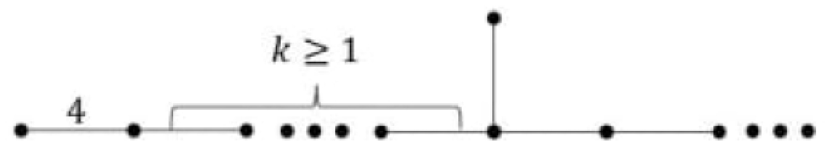


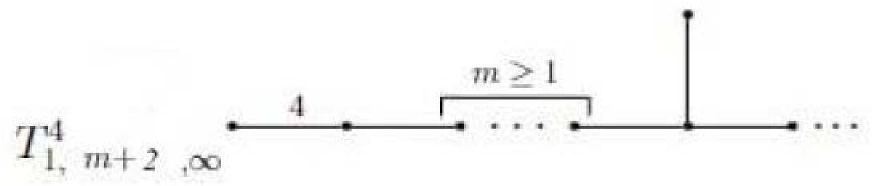
Теорема 5.1. (про класифікацію графів Кокстера з підпорядкованими Т-графами з індексами в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, мітки на яких не перевищують 4.)

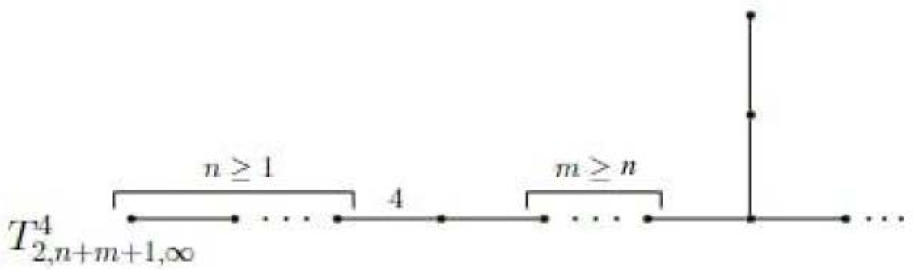
Нехай $\boldsymbol{G}$ – зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими незваженими Т-графами, то

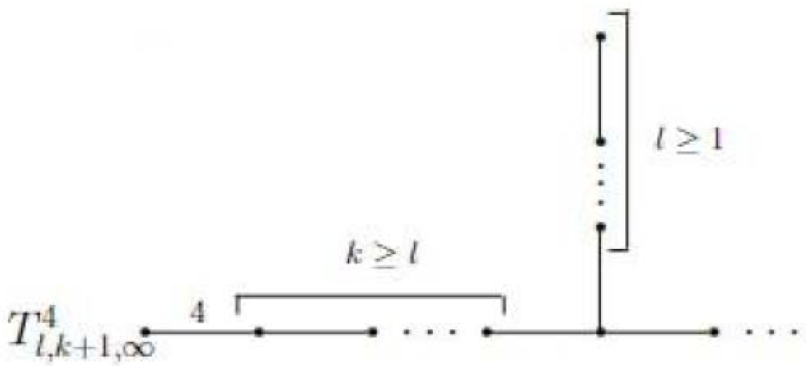
1. Якщо $ind \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, то **G** граф виду:





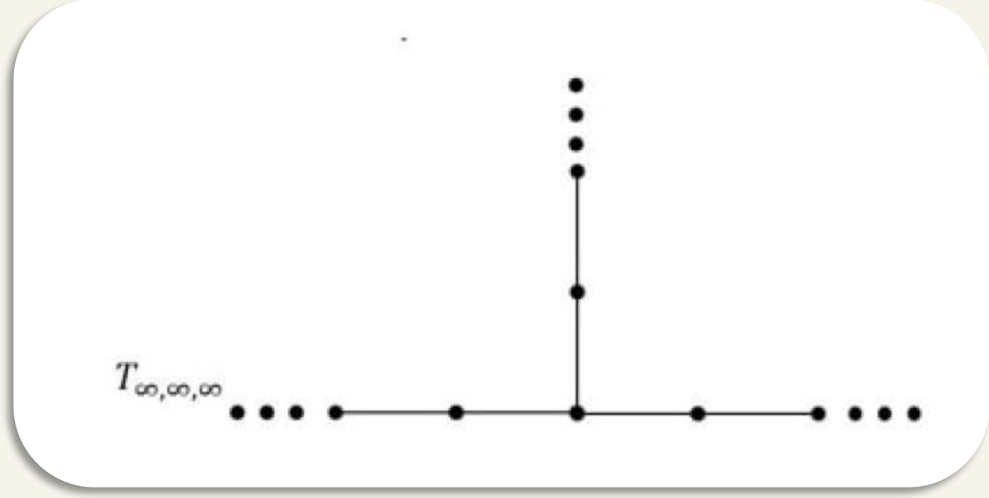


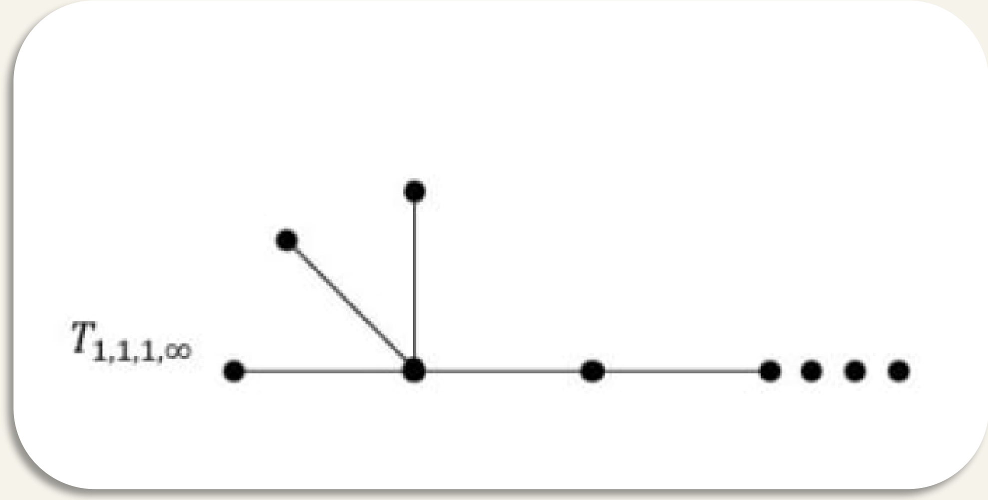


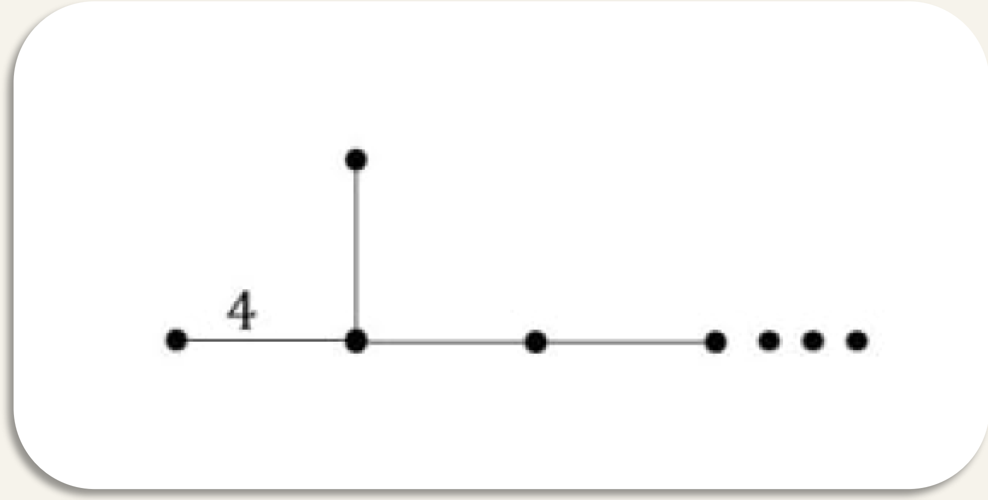


Теорема 5.1. (про класифікацію графів Кокстера з підпорядкованими T-графами з індексами в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, мітки на яких не перевищують 4.)

2. Якщо $ind = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то **G** - граф виду: **[6]**







Список літератури

[1] Mohar B., Woess W. A survey on spectra of infinite. Bull. London Math. Soc. 1989. vol. 21. P. 209-234.

[2] Кириченко А. А., Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М. Структура систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченними деревами Кокстера, Український математичний журнал. 2014. Том. 66, №9. С.1185-1192.

[3] Tymoshkevych L. M. On spectral theory of Coxeter graphs and its applications, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки. 2014. випуск №1. С. 27-33.

[4] Коротков А.С., Тимошкевич Л.М. Аналог теореми Сміта для зліченних графів Кокстера, Доповіді Національної академії наук України. 2013. №12. С. 19-24.

[5] Тимошкевич Л.М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і зліченних графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ, 2015. 160 с.

[6] Тимошкевич Л.М., Когут М.В. Класифікація зліченних графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, Могилянський математичний журнал. Том 5, 2022, с.19-25.

[7] Cvetkovic D. M,. Applications of graph spectra, Cvetkovic D. M., Gutman I., Zbornik radova. - 2009. - 13(21). - 138 pp.

[8] Ключарьов П.Г., Чесноков В. О., Исследование спектральных свойств социального графа сети LiveJournal, Машиностроение и компьютерные технологии, 2013

[9] Ключарьов П.Г., Басараб М.А., Спектральные методы анализа социальных сетей, Машиностроение и компьютерные технологии, 2017

[10] Salim A., Sumitra S., Spectral Graph Convolutional Neural Networks in the Context of Regularization Theory, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. - 2022.

Дякую за увагу!