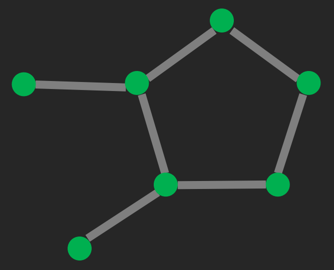
# ОРІЄНТАЦІЇ ГРАФІВ
# І ПРОБЛЕМА ОБХОДУ СТОРОЖА

# Неорієнтовані графи

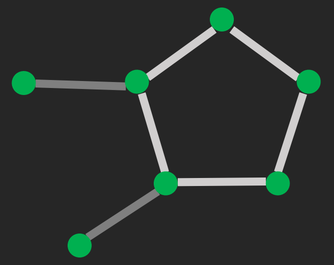
$G = (V, E)$



## Обхід сторожа

мінімальний замкнений домінуючий шлях

$W = u_1 - \ldots - u_m - u_1 \quad \forall\, v \in V \;\; \exists\, 1 \le i \le m \;:\; uv \in E$



*Обхід сторожа існує тоді і тільки тоді, коли $G$ – зв'язний.*

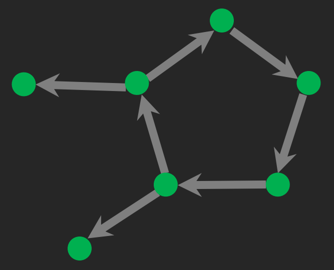
# Орієнтовані графи

$D = (V, A)$

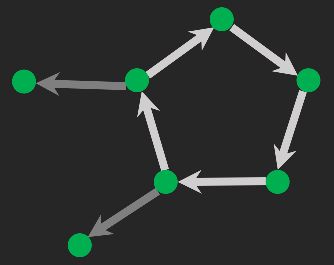
## Обхід сторожа

мінімальний замкнений домінуючий шлях

$W = u_1 - \ldots - u_m - u_1 \quad \forall\, v \in V \;\; \exists\, 1 \le i \le m \; : \; (u, v) \in A$



*Якщо $D$ – слабкозв'язний, то обхід сторожа не обов'язково існує.*



*Ациклічний орграф $D$ містить обхід сторожа $\leftrightarrow$ $D$ містить універсальну вершину.*

*Кожен сильнозв'язний орграф містить обхід сторожа.*

# Орієнтовані графи

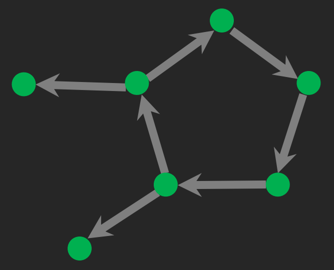
$D = (V, A)$

## Конденсація

$D^* = (V^*, A^*)$

Вершини $D^*$ – сильнозв'язні компоненти $D$.

Дуга $(u^*, v^*) \in A^*$, якщо для деякої $v \in v^*$ існує така $u \in u^*$, що $(u, v) \in A$

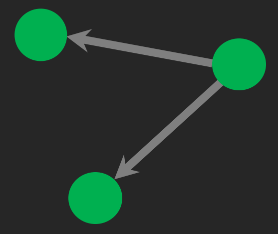


## Сюр'єктивна конденсація

$D^*_{sur} = (V^*_{sur}, A^*_{sur})$

Вершини $D^*$ – сильнозв'язні компоненти $D$.

Дуга $(u^*, v^*) \in A^*$, якщо для всіх $v \in v^*$ існує така $u \in u^*$, що $(u, v) \in A$

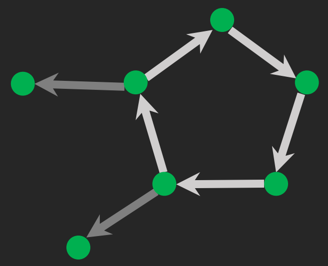


## Лема 1

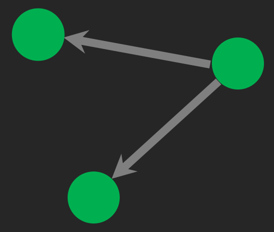
Орграф $D$ містить обхід сторожа $\leftrightarrow$ $D^*_{sur}$ *містить універсальну вершину*

# Орієнтовані графи

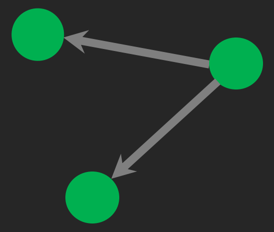
$D = (V, A)$



$D = (V, A)$



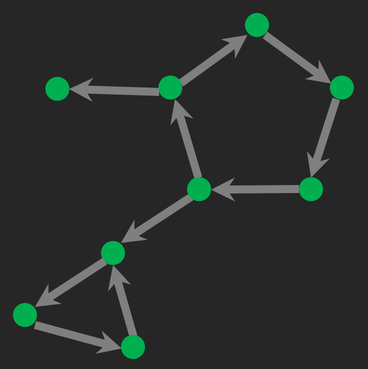
$D^* = (V^*, A^*)$



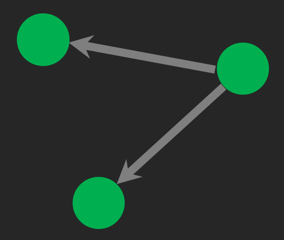
$D^*_{sur} = (V^*_{sur}, A^*_{sur})$

# Орієнтовані графи

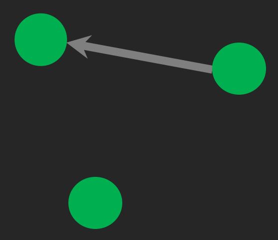
$D = (V, A)$



$D = (V, A)$



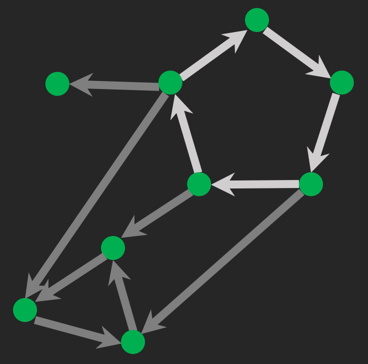
$D^* = (V^*, A^*)$



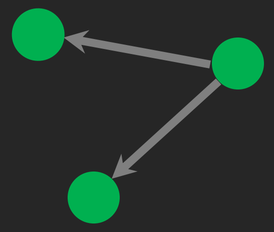
$D^*_{sur} = (V^*_{sur}, A^*_{sur})$

# Орієнтовані графи

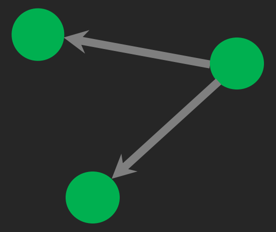
$D = (V, A)$



$D = (V, A)$



$D^* = (V^*, A^*)$



$D^*_{sur} = (V^*_{sur}, A^*_{sur})$

# Повні мультичасткові орграфи

$D = (V, A)$

## Повний мультичастковий граф

$G = (V, E)$

Множина вершин розбивається на $k$ неперетинних множин: $V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$.

$\forall\, u, v \in V_i \quad \forall\, w \in V \setminus V_i \ : \quad uv \notin E, \quad uw \in E, \quad vw \in E$

## Проста орієнтація

$(u, v) \in A \rightarrow (v, u) \notin A$

## Узагальнена орієнтація

$(u, v) \in A \nrightarrow (v, u) \notin A$

# Повні мультичасткові орграфи

$D = (V, A)$

**Теорема 1**

Для зв'язного графа $G$ наступні умови еквівалентні:

1) $G$ – повний мультичастковий
2) кожна узагальнена орієнтація $G$ без джерел має обхід сторожа
3) кожна узагальнена орієнтація $G$ без одновершинних СЗК має обхід сторожа

**Твердження 1**

Нехай $G$ – зв'язний граф. Розглянемо наступні умови:

1) $G$ – повний мультичастковий
2) кожна проста орієнтація $G$ без джерел має обхід сторожа
3) кожна проста орієнтація $G$ без одновершинних СЗК має обхід сторожа

Тоді $1 \to 2 \to 3$, причому жодну імплікацію не можна обернути.

# Повні мультичасткові орграфи

$D = (V, A)$

**Теорема 2**

Нехай $D$ – повний мультичастковий орграф. Якщо $D$ не містить джерел і його найменша домінуюча множина утворює турнір, то

$$w(D) \leq \gamma(D) + 3$$

**Теорема 3**

Нехай $D$ – повний мультичастковий орграф. Якщо $D$ не містить джерел, то

$$w(D) \leq \gamma(D) + 3\alpha(D)$$

# Орграфи з обходом сторожа

$D = (V, A)$

**Твердження 2**

Кожна проста орієнтація G без джерел містить обхід сторожа тоді, і тільки тоді, коли в G кожен цикл домінуючий.

# Література

[1] L. Ŕedei, Ein kombinatorischer satz, Acta Litteraria Szeged 7 (1934), 39–43.

[2] D. Dyer, The watchman's walk problem on directed graphs, Australas. J. Comb. 80(2) (2021), 197–216.

[3] Hartnell, B.L., Rall, D.F., and Whitehead, C.A., The watchman's walk problem: An introduction, Cong. Numer. 130 (1998), 149–155.

[4] Tarjan, R.E., Depth-first search and linear graph algorithms, SIAM Journal on Computing. Vol. 1, no. 2 (13 May) (1972), 146–160.

[5] Micha Sharir, A strong-connectivity algorithm and its applications to data flow analysis., Computers and Mathematics with Applications. 7(1) (1981), 67–72.

[6] B. L. Hartnell, D. F. Rall and C. A. Whitehead, The watchman's walk problem: An introduction, Congr. Numer. 130 (1998), 149–155.