Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Курсова робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«ДОСКОНАЛІ ГРАФИ»**

Виконала: студентка 3-го року навчання
освітньої програми «Прикладна математика»,
спеціальності 113 Прикладна математика

Лучка Катерина Романівна

Керівник: Тимошкевич Л. М.
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Курсова робота захищена
з оцінкою ____________________________

Секретар ЕК__________________________
(підпис)

«________» _________________20___р.

Київ – 2023

Графік підготовки курсової роботи до захисту

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Підпис
1.	Отримання теми курсової роботи.	26.10.2022	
2.	Ознайомлення з темою курсової роботи.	27.10.2022	
3.	Огляд та аналіз літератури за темою.	10.01.2023	
4.	Дослідження проміжних результатів та обговорення питань з керівником.	02.03.2023	
5.	Аналіз отриманих результатів.	15.04.2023	
6.	Оформлення курсової роботи та виправлення помилок.	20.04.2023	
7.	Створення презентації курсової роботи.	06.05.2023	
8.	Захист курсової роботи.	22.05.2023	

Зміст

Вступ

Робота Тібора Галаї 1958 року стала поштовхом для розвитку теорії досконалих графів. У сучасній інтерпритації тезу праці можна сформульовати так: доповнення двочасткового графу є досконалим графом.

Термін «досконалий граф» був введений Клодом Берже [2] у 1960 році, де у своїй першій роботі з цієї теми він запропонував сильну гіпотезу досконалого графа, котра мала великий вплив на розвиток теорії графів за останні 40 років. Це призвело до характеризації та вивчення багатьох нових класів графів, для яких була перевірена гіпотеза сильного досконалого графа. Припущення Берже були доведені сильною теоремою про досконалі графи Чудновської, Робертсона, Сеймора та Томаса (2006) [4]. Після того, як сильна гіпотеза Берже залишалася нерозв'язною понад 40 років, тепер її можна назвати сильною теоремою про досконалий граф. Розроблені методи та підтверджені результати застосовуються також поза межами області вивчення досконалих графів. Теорія антиблокуючих многогранників, розроблена Фулкерсоном, і теорія модульної декомпозиції (яка вперше досліджується у статті Галлаї) є такими прикладами.

Досконалі графи мають багато практичних застосувань в різних галузях, таких як операційні дослідження, інформаційна сфера та теорія ігор. Вони можуть бути використані для розподілу ресурсів сукупності завдань та проєктів. Ефективність досягається шляхом знаходження максимальної кліки, що дає найоптимальніший варіант розподілу ресурсів. Досконалі графи також використовуються для планування роботи і моделювання проблем, які можуть виникнути. Наприклад, планування завдань на виробничій лінії або призначення працівників на зміни. Хроматичне число підграфу в досконалому графі можна використовувати для визначення мінімальної кількості часових слотів, необхідних для виконання набору завдань або для призначення змін працівникам. В інформаційній сфері досконалі графи використовуються для моделювання мереж і виявлення аномалій або атак. Це можна зробити шляхом аналізу структури графа для виявлення великих клік або незалежних множин, які можуть свідчити про підозрілу активність. У теорії ігор досконалі графи використовуються для моделювання систем голосування. Хроматичне число підграфу може застосовуватись для визначення мінімальної кількості кандидатів, необхідних для формування переможної коаліції у системі голосування. Загалом досконалі графи мають широкий спектр практичних застосувань у різних галузях і ефективні при вирішенні складних оптимізаційних задач.

1 Графи. Основні поняття

1.1 Поняття графу та його властивостей

Означення 1.1. Неорієнтований граф G – пара множин (V, E), де V — множина вершин, $E \subseteq V^{(2)}$ – множина ребер; позначають $G = (V, E)$.

Нехай існують вершини $v_1, v_2 \in V$. Традиційно ребра, які з'єднують такі дві вершини, записують за допомогою круглих дужок $(v_1, v_2) \in E.$

Означення 1.2. Зображення графа $G = (V, E)$ за допомогою рисунка на площині називають діаграмою графа G. Вершини графа G бієктивно відповідають точки площини. Точки, що відповідають вершинам v і w, з'єднуються лінією (відрізком або кривою) тоді й тільки тоді, коли v і w – суміжні вершини.

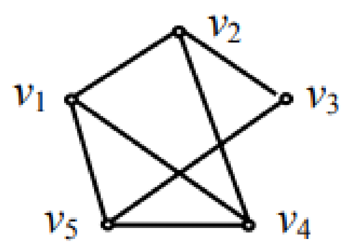

Рис. 1: Діаграма графа G

Означення 1.3. Граф без кратних ребер та петель називається простим.

Означення 1.4. Вершини $v_1, v_2 \in V$ в неорієнтованому графі називають суміжними, якщо існує ребро $e \in E$, яке з'єднує ці вершини.

Означення 1.5. Ребро $e \in E$ є інцидентним вершині v_1 та вершині v_2, якщо воно їх з'єднує, тобто $e = (v_1, v_2)$.

Означення 1.6. Ребра e_1, e_2 в неорієнтованому графі називають суміжними, якщо ці ребра мають спільну вершину.

Означення 1.7. Породжений підграф графа називають інший граф, утворений з підмножини вершин графа разом з усіма ребрами, що з'єднують пари вершин з цієї підмножини.

Означення 1.8. Степенем $\deg(v)$ вершини $v \in V$ називають кількість інцидентних їй ребер.

Означення 1.9. Доповненням простого графа $G = (V, E)$ називається граф $G = (V, E)$, у якого дві довільні вершини суміжні тоді і тільки тоді, коли вони не є суміжними в графі G.

Означення 1.10. Граф, усі ребра якого утворюють простий цикл довжиною n, позначається C_n.

Означення 1.11. Граф називається зв'язним, якщо будь-яку пару його вершин можна з'єднати деяким маршрутом.

Означення 1.12. Граф без циклів називається ациклічним.

Означення 1.13. Ациклічний зв'язний граф називається деревом. Дерево є дводольним графом.

Означення 1.14. Кліка графу – підмножина його вершин, в якій будь-які дві з них зв'язані ребром.

Означення 1.15. Множина вершин графу називається незалежною, якщо ніякі дві вершини цієї множини не з'єднані ребром. Породжений підграф складається з ізольованих вершин.

Означення 1.16. Граф $G = (V, E)$ називають повним, якщо будь-які дві його вершини суміжні (тобто $E = V^{(2)}$). Повний граф із n вершинами позначають K_n.

Означення 1.17. Граф $G = (V, E)$ називається порожнім, якщо $V = \emptyset$.

Означення 1.18. Найбільше ціле число r, при якому породжений граф $K^r \subseteq G$, називається щільністю $w(G)$ графа G.

Означення 1.19. Найбільше ціле число r, при якому доповнення до породженого графу $\overline{K^r} \subseteq G$ називається числом незалежності $a(G)$ графа G.

Зрозуміло, що $a(G) = w(\bar{G})$ і $w(G) = a(\bar{G})$.

2 Досконалі графи. Основні поняття

2.1 Розфарбування графа

Означення 2.1. Нехай k – деяке натуральне число. Вершинним k-розфарбуванням, або просто розфарбуванням графа $G = (V, E)$ називається відображення $f: V \to N_k$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність деяке натуральне число $f\ (v) \in N_k$.

Означення 2.2. Розфарбування f графа G називають правильним, якщо $f\ (v) \neq f\ (w)$ для будь-яких його суміжних вершин v і w.

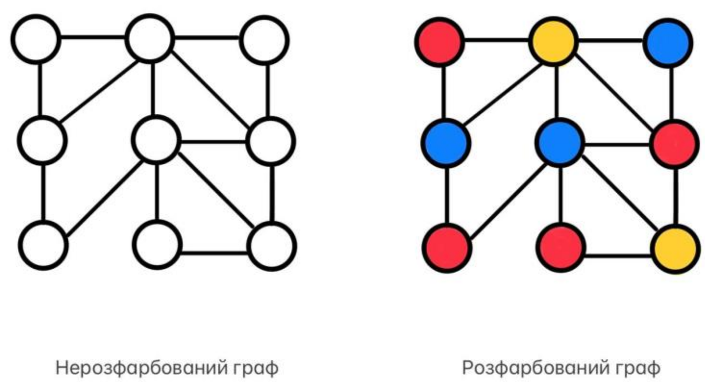

Рис. 2: Розфарбування графа

Означення 2.3. Мінімальне число k, для якого існує правильне розфарбування графа G, називають хроматичним числом графа G і позначають $\chi(G)$.

2.2 Досконалий граф

Означення 2.4. Граф називається досконалим, якщо кожен породжений підграф $H \subseteq G$ має хроматичне число $\chi(H) = w(H)$, тобто якщо тривіальна нижня оцінка в $w(H)$ кольорів для розмальовки вершин графа H досяжна.

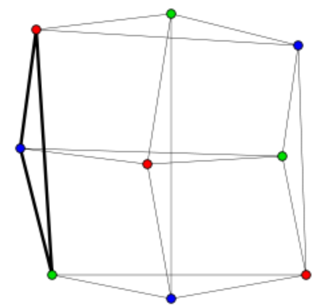

Рис. 3: Досконалий граф

Таким чином доведення того, що $\chi(G) > k$ для досконалого графа G зводиться до встановлення наявності підграфа K^{k+1} як єдиної причини неможливості розфарбування в k кольорів.

Твердження 1. [5] Нехай граф G є досконалим, H – його породжений підграф, $G \supseteq H$. І нехай K – індукований граф H, $H \supseteq K$. Оскільки граф K є індукованим графом графа G ($G \supseteq K$), і G є досконалим, то K є також досконалим графом. Таким чином клас досконалих графів є замкненим відносно індукованих підграфів.

Твердження 2. [5] Клас досконалих графів є незамкненим відносно взяття довільних підграфів. Наприклад, візьмемо досконалий граф G (рис. 4), такий, що при видаленні одного ребра буде утворюватись цикл C довжини 5 ($G \supseteq C$), однак такий підграф не досконалий.

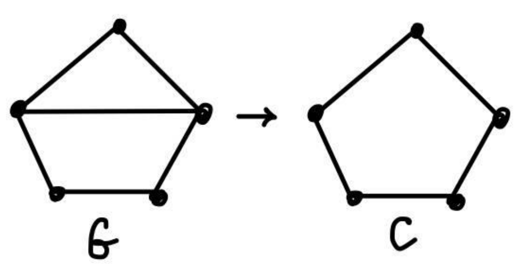

Рис. 4: Видалення ребра у досконалому графі

3 Родини досконалих графів

3.1 Приклади родин досконалих графів

Означення 3.1. Двочастковий граф G – граф, у якому вершини можна розділити на дві непересічні множини так, що кожне ребро з'єднує вершину в одній множині з вершиною в іншій множині.

Якщо двочастковий граф є порожнім, то $w(G) = 1$, $\chi(G) = 1$. Для всіх інших непорожніх двочасткових графів буде виконуватись $w(G) = 2$, $\chi(G) = 2$. А тому для довільного двочасткового графа завжди справджується рівність $w(G) = \chi(G)$.

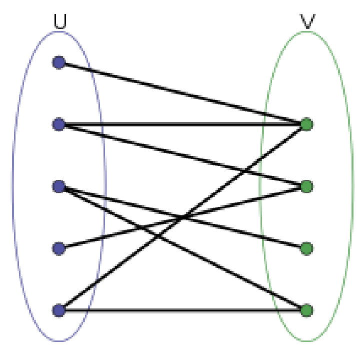

Рис. 5: Двочастковий граф

Твердження 3. [9] Нехай $\bar{G}$ є доповненням до дводольного графа G. Тоді $\bar{G}$ теж досконалий.

Для будь-якого дводольного графа G, $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$ або еквівалентно $\alpha(G) = \bar{\chi}(G)$, де $\alpha(G)$ позначає розмір найбільшої незалежної множини у G, а $\bar{\chi}(G)$ позначає найменшу кількість клік, необхідну для покриття всіх вершин G.

Означення 3.2. Граф $G = (V, E)$ є графом порівнянності, якщо він має ациклічну транзитивну орієнтацію. Тобто граф G є графом порівнянності, якщо його ребра матимуть таку орієнтацію, що отриманий орграф $D = (V, A)$ матиме такі властивості:

1. Транзитивність: якщо (u, v) і (v, w) обидва знаходяться в A, тоді також $(v, w) \in A$.

2. Антисиметрія: якщо $(u, v) \in A$, то (v, u).

Дані властивості гарантують, що орієнтований граф є ациклічним. Крім того, можна інтерпретувати граф порівнянності як частково впорядковану множину вершин G; кожне ребро з'єднує два порівнювані елементи.

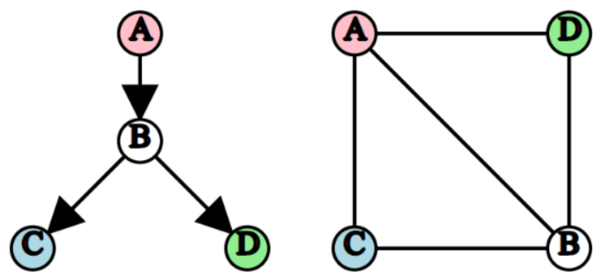

Рис. 6: Частково впорядкована множ-на (ліворуч) і граф порівнянності (праворуч)

У графі порівнянності частково впорядкованої множини кліка представлена як ланцюг, а розфарбування як розбиття на антиланцюги. Індуковані підграфи графів порівнянності самі є графами порівнянності.

Означення 3.3. Граф перестановок — це граф, вершини якого представляють елементи перестановки, а ребра представляють пари елементів, які змінюються в результаті перестановки.

Граф перестановок – це частковий випадок графів порівнянності.

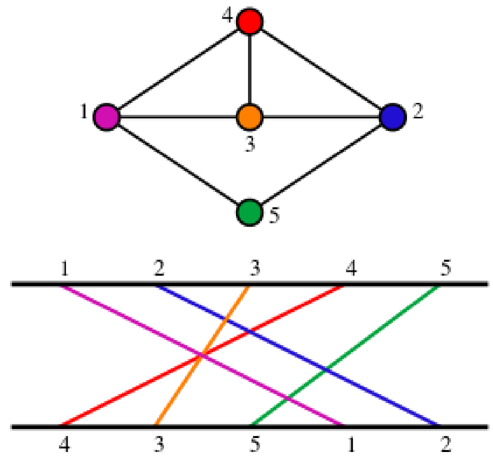

Рис. 7: Граф перестановок

На нижньому рисунку ті лінії, які перетинаються, позначають вершини, які є суміжними у графі.

Означення 3.4. Граф хордальний (або тріангульований), якщо кожен з його циклів з довжиною не менше 4 має хорду, тобто якщо граф не містить породжених циклів, відмінних від трикутника.

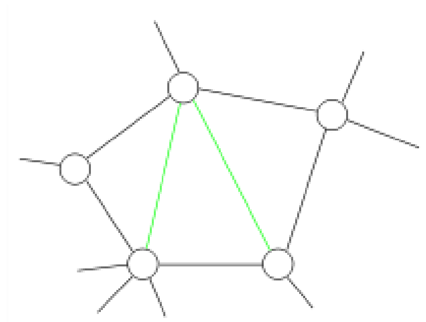

Рис. 8: Хордальний граф

Означення 3.5. Граф $G = (V, E)$ є інтервальним графом, якщо існує відображення між вершинами G та інтервали в дійсній прямій ($\varphi : V \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) такі, що $(u, v) \in E$, якщо $I_v \cap I_u \neq \emptyset$, де I_v, $I_u \subset R$ є відповідно інтервалами, пов'язаними з v і u.

Тобто інтервальний граф — неорієнтований граф, утворений із набору інтервалів на дійсній прямій. Вершини позначають інтервали, а ребра з'єднуть вершини, інтервали яких перетинаються.

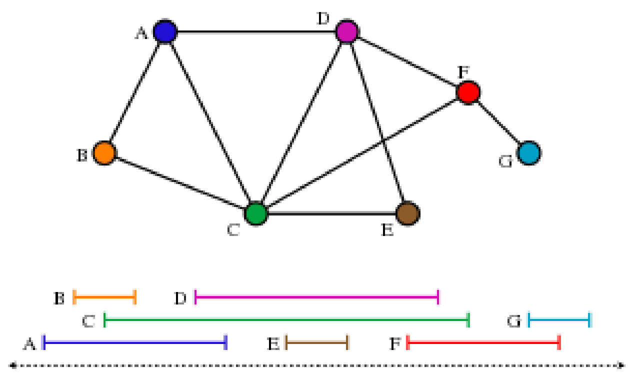

Рис. 9: Інтервальний граф

Означення 3.6. Цілком упорядкований граф – це граф, для якого алгоритм жадібного розфарбовування є оптимальним для будь-яких породжених підграфів.

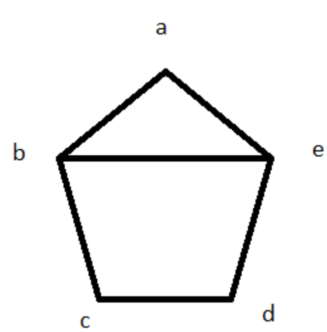

Рис. 10: Цілком упорядкований граф

Означення 3.7. Трапецієдальний граф – це граф, утворений перетином трапецій, основи яких розміщені на паралельних прямих.

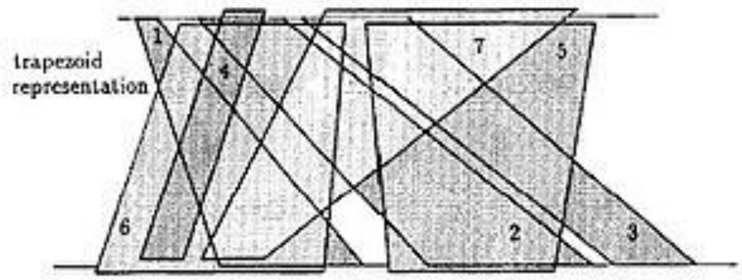

Рис. 11: Трапецієдальний граф

4 Задачі

4.1 Нерівність $|V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Твердження 4. [5] Для довільного графа $G = (V, E)$ виконується нерівність

$|V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Доведення. Нехай $G = (V, E)$– довільний граф, і хроматичне число $\chi(G) = k$. Розіб'ємо множину вершин V на підмножини V_i $(i = 1..k)$, кожна з яких пофарбована в окремий колір: $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup ... \sqcup V_k$. За означенням вершини в одній такій множині несуміжні. Маємо, що для кожної підмножини $|V_i| \leq \alpha(G)$, адже за означенням $\alpha(G)$ – максимальна кількість несуміжних вершин у графі. Тоді для загальної кількісті вершин виконується

$$|V| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| <= k \cdot \alpha(G) = \chi(G) \cdot \alpha(G) \rightarrow |V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G). \quad ■$$

4.2 Теорема Ловаса

Теорема Ловаса. [5] Граф G є досконалим тоді і тільки тоді, коли

$$|H| < \alpha(H) \cdot \omega(H) \quad (*)$$

для всіх індукованих підграфів $H \subseteq G$.

Сильна теорема про досконалі графи. [3] Граф G є досконалим тоді і тільки тоді, ні G ні $\bar{G}$ не містять в якості індукованого підграфа непарного цикла довжиною не менше 5.

Твердження 5. [5] Із сильної теореми про досконалі графи випливає теорема Ловаса.

Доведення. Нехай $F = (V, E)$ – довільний граф, $G = (V, E)$ – досконалий граф, а H – його породжений підграф.

Необхідність даного судження очевидна, і випливає з раніше розглянутого твердження про досконалі графи $|V| \leq \chi(F) \cdot \alpha(F)$. Наведена нерівність виконується для будь-яких графів. Для досконалих графів за означенням $\chi(G) = w(G)$. А тому $|G| < \omega(G) \cdot \alpha(G)$.

Достатність доведемо методом від супротивного. Припустимо, що $\exists k \geq 2$, таке що цикли C_{2k+1} і $\overline{C_{2k+1}}$ є породженими підграфами G. Розглянемо такий C_{2k+1} цикл і послідовно розділимо його вершини на k пар: (1, 2), (3, 4), … (2k-1, 2k) і окрему вершину (2k+1) (рис. 12).

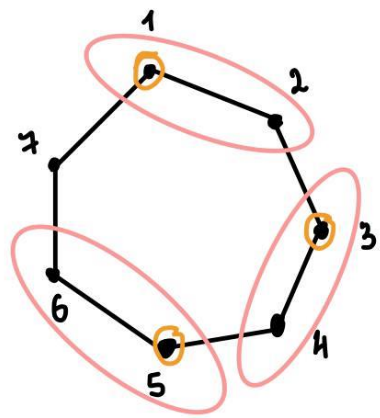

Рис. 12: Непарний цикл

Оберемо по одній вершині з кожної пари: 1,3,5…2k-1. Всього отримаємо k несуміжних вершин з кожної пари $|C_{2k+1}| = 2k + 1$, $\alpha(C_{2k+1}) = k$. Для будь-якого непарного циклу $(k > 1)$ щільність завжди дорівнює $w(C_{2k+1}) = 2$. Маємо, що $|C_{2k+1}| > \alpha(C_{2k+1}) \cdot w(C_{2k+1}) \rightarrow 2k + 1 > k \cdot 2$. Суперечність з умовою завдання, а тому цикл C_{2k+1} не може бути породженим підграфом G.

Тепер розглянемо доповнення до наведеного циклу $\overline{C_{2k+1}}$. За означенням $\alpha(G) = w(\bar{G}) = k$ і $w(G) = \alpha(\bar{G}) = 2$. Тоді маємо

$$2k + 1 = |\overline{C_{2k+1}}| > \alpha(\overline{C_{2k+1}}) \cdot w(\overline{C_{2k+1}}) = 2 \cdot k$$

Суперечність з умовою завдання, а тому доповнення до циклу $\overline{C_{2k+1}}$ не може бути породженим підграфом G.

Отже, із сильної теореми про досконалі графи випливає теорема Ловаса. ■

4.3 Теорема Ділуорса

Означення 4.1. Відношенням часткового порядку називається таке відношення R, для якого виконуються рефлексивність, антисиметричність та транзитивність, а саме:

- Рефлексивність: $a\ R\ a$ для всіх $a \in M$
- Антисиметричність: коли $a\ R\ b$ і $b\ R\ a$, то $a\ =\ b$
- Транзитивність: коли $a\ R\ b$ і $b\ R\ c$, то $a\ R\ c$

Означення 4.2. Множина M називається частково впорядкованою, якщо на ній задано частковий порядок.

Означення 4.3. Ланцюг – це множина елементів (кожні два з яких є порівнюваними) у частково впорядкованій множині.

Означення 4.4. Антиланцюг – це множина елементів (кожні два з яких є непорівнюваними) у частково впорядкованій множині.

Означення 4.5. Розбиттям множини A називають сімейство непустих підмножин $A_i, \ldots, A_k$, для яких виконуються наступні умови:

1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$;

2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$.

Якщо $A_i, \ldots, A_k$ – розбиття множини A, то позначають $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k$.

Теорема Ділуорса. [6] Нехай n – найбільша кількість елементів антиланцюга кінцевої частково упорядкованої множини M. Тоді M можна розбити на n ланцюгів.

Іншими словами, якщо N – найменша кількість ланцюгів, на які можна розбити частково впорядковану множину M, а n – його найбільша кількість попарно непорівнюваних елементів (найбільша потужність антиланцюга), то $n = N$.

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

База індукції: для частково впорядкованої множини, кількість елементів якої не перевищує 2, установлюється методом перебору.

Індукційний крок: нехай для частково впорядкованої множини з потужністю менше m, теорема виконується. Розглянемо частково впорядковану множину $(A; \leq)$, в якій потужність $|A| = m$.

Нехай a – це деякий максимальний елемент даної множини A. Нехай $C_i -$ деякий ланцюг. За припущенням індукції частково впорядковану множину $(A\backslash\{a\}; \leq)$ можна розбити на d ланцюгів, таких що:

$$A = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \dots \sqcup C_d,$$

де d також дорівнює найбільшій кількості елементів серед антиланцюгів в частково впорядкованій множині $A\backslash\{a\}$.

Назвемо елемент правильним, якщо він входить в d-елементний антиланцюг в множині $A\backslash\{a\}$. В кожному ланцюзі C_i знайдеться хоча б один правильний елемент. Нехай для кожного i, $i = 1, \dots, d$, $a_i -$ найбільший із правильних елементів, які входять в ланцюг C_i.

Доведемо, що $D = \{a_1, \dots, a_d\}$ – антиланцюг в множині $A\backslash\{a\}$. Застосуємо метод від супротивного: нехай $a_i < a_j$ для деяких $i \neq j$. Нехай $D_1 -$ деякий довільний антиланцюг в множині $A\backslash\{a\}$ з кількістю елементів d, який містить a_j. Тоді розглянутий антиланцюг не може містити ні a_i, ні будь-який попередній елемент. А тому D_1 взагалі не містить елементів з ланцюга C_i, адже $a_i -$ найбільший правильний елемент в ланцюзі C_i. З цього випливає суперечність $|D_1| < d$. Маємо, що $D = \{a_1, \dots, a_d\}$ – антиланцюг.

1) Якщо $\{a\} \cup D -$ антиланцюг, тоді $S = \{a\} \sqcup C_1 \sqcup C_2 \sqcup \dots \sqcup C_d$.
2) Нехай множина $\{a\} \cup D$ не є антиланцюгом. Тоді $a_k < a$ для деякого k.

Розглянемо ланцюг $K = \{x \in C_k | x \leq a_k\} \cup \{a\}$. Тоді в множині $A \backslash K$ нема d-елементниї антиланцюгів, адже всі правильні елементи ланцюга C_k лежать в множині K.

За припущенням індукції на частково впорядкованій множині $A \backslash K$ можна розбити на $(d-1)$ ланцюгів. Якщо додати до цих ланцюгів ще ланцюг K, то отримаємо розбиття частково впорядкованої множини на d ланцюгів. ■

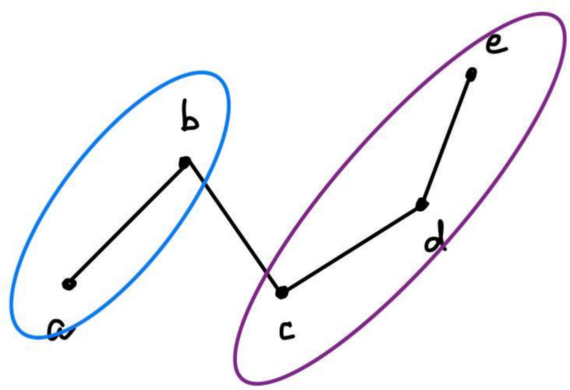

Рис. 13: Діаграма частково впорядкованої множини A

Зображено діаграму частково впорядкованої множини $\mathrm{A} = \{a, b, c, d, e\}$. Ланцюги: $C_1 = a < b$; $C_2 = c < d < e$.

4.4 Досконалість графа порівнянності

Твердження 6. Граф порівнянності є досконалим.

Доведення. Щоб довести, що граф порівнянності є досконалим, потрібно показати, що для кожного індукованого підграфа H графа порівнянності G, хроматичне число дорівнює розміру найбільшої кліки.

Нехай G - граф порівнянності, а H - індукований підграф G. За визначенням, H також є графом порівнянності. Нехай M є частково упорядкованою множиною, пов'язаною з G, де елементи M - вершини G, і є ребро між двома вершинами в G тоді і тільки тоді, коли відповідні елементи в M є порівнюваними.

За теоремою Ділуорса, існує розбиття M на n ланцюгів, де n - розмір найбільшого антиланцюга в M. Нехай C - це множина ланцюгів в цьому розбитті, які перетинаються з H, а S - множина елементів в H, які не належать жодному ланцюгу з C. Також C є покриттям ланцюгів H, оскільки кожен елемент у H належить певному ланцюгу в C. Крім того, C є антиланцюгом, оскільки жодні два ланцюги з C не перетинаються. Тому $|C| \leq n$, розмір найбільшого антиланцюга в M.

Розглянемо кліку K в H. Нехай S' - це множина елементів в S, які суміжні з усіма елементами в K. Оскільки H - граф порівнянності, всі елементи в K порівнювані, тому S' також є ланцюгом в M. Крім того, оскільки S - це множина елементів в H, які не належать жодному ланцюгу в C, і всі елементи в S' суміжні з усіма елементами в K, маємо S' має непорожній перетин з K. Це означає, що розмір K не менший за розмір S', який є розміром ланцюга в M. Тому розмір найбільшої кліки в H не менший за розмір найбільшого ланцюга в M, тобто не менший за n.

Отже, для кожного індукованого підграфа H графа порівнянності G, хроматичне число H дорівнює розміру найбільшої кліки в H, а тому граф порівнянності є досконалим. ■

4.5 Досконалість графа перестановок

Твердження 7. Граф перестановок – це граф порівнянності.

Для доведення того, що граф перестановок є графом порівнянності необхідно показати, що для будь-якого графа перестановок існує відповідний граф порівнянності, такий що обидва графи мають однаковий набір ребер.

Граф перестановок - це граф, який може бути представлений через порядок перестановки множини об'єктів. Зокрема, для будь-якої перестановки π множини $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ можна визначити граф $G = (V, E)$ наступним чином:

- V − множина елементів у S, тобто $V = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.
- Дві вершини s_i та s_j суміжні в G тоді і тільки тоді, коли $\pi(s_i) < \pi(s_j)$ і не існує елементу s_k такого, що $\pi(s_i) < \pi(s_k) < \pi(s_j)$.

Граф порівнянності - це граф, в якому вершини можуть бути частково упорядковані так, що для будь-яких двох вершин u та v виконується або $u \leq v$, або $v \leq u$. Зокрема, для будь-якої частково впорядкованої множини
$P = (X, \leq)$ можна визначити граф $G = (V, E)$ наступним чином:

- V − множина елементів у X, тобто $V = X$.
- Дві вершини u та v є суміжні в G тоді і тільки тоді, коли u та v є порівнюваними в P, тобто або $u \leq v$, або $v \leq u$.

Розглянемо граф перестановок $G = (V, E)$, визначений перестановкою π. Визначимо часткове упорядкування $\leq$ на V наступним чином:

- Для будь-яких двох вершин s_i та s_j у V, $s_i \leq s_j$ тоді і тільки тоді, коли $\pi(s_i) \leq \pi(s_j)$.

Далі покажемо, що граф, побудований за цим частковим упорядкуванням, є графом порівнянності, і має той же набір ребер, що і граф перестановок G.

Нехай $P = (V, \leq) -$ часткове упорядкування, визначене вище. Необхідно показати, що для будь-яких двох вершин u та v в P, які не є порівнюваними, не існує ребра між ними у графі порівнянності G'. Тобто, якщо u і v не порівнювані, то потрібно показати, що в G' немає ребра між ними.

Нехай u та v - дві вершини в P, які не є порівнюваними, тобто не $u \leq v$ та не $v \leq u$. Оскільки u та v непорівнювані, то вони не можуть бути суміжніми вершинами в G. Якщо вони були б суміжними, то це означало б, що $\pi(u) < \pi(v)$ або $\pi(v) < \pi(u)$, що протирічить тому, що не $u \leq v$ та не $v \leq u$.

Отже, будь-який граф перестановок може бути представлений як граф порівнянності і має той же набір ребер. Це означає, що граф перестановок є графом порівнянності. Оскільки граф порівнянності є досконалим (доведено попередньо), а тому граф перестановок є теж досконалим. ∎

5 Алгоритми на досконалих графах

- *Алгоритм Брона-Кербоша* - це алгоритм для знаходження максимальної незалежної множини і максимальної кліки у досконалих графах. Він базується на рекурсивному переборі усіх підмножин вершин із певними обмеженнями. Алгоритм має складність, що залежить від кількості вершин у графі.

  Псевдокод алгоритму:

```
#R - множина вершин, які вже включені до потенційного максимального кліки;
#P - множина вершин, які можуть бути додані до R для формування більшої кліки;
#X - множина вершин, які вже були розглянуті, але не утворили кліку з R.
#N(v) - це множина сусідніх вершин для вершини v.

bronKerbosch(R, P, X):
    if P is empty and X is empty:
        report R as a maximal clique
    else:
        for v in P:
            bronKerbosch(R ⋃ {v}, P ⋂ N(v), X ⋂ N(v))
            P ← P \ {v}
            X ← X ⋃ {v}
```

  Алгоритм рекурсивний: на кожному кроці вибираємо вершину v з P, додаємо її до R і рекурсивно досліджуємо підграф, що утворюється при з'єднанні P та сусідів v. Після дослідження цього підграфа видаляємо v з P та додаємо його до X, що означає, що він був розглянутий, але не утворив кліку максимального розміру.

- *Алгоритм Чудновського* - це алгоритм для знаходження максимального розрізу у досконалих графах. Він базується на теорії досконалих графів, де кожен максимальний розріз має відповідну кліку у доповненні графу. Алгоритм має часову складність O(n^4), де n - кількість вершин у графі.

- *Алгоритм Ловаса-Шайра-Плелса* - це алгоритм для розв'язання задачі фракційного покриття та фракційного розбиття у досконалих графах.

Алгоритм базується на лінійному програмуванні та використовує теорію дуальності лінійної програми для знаходження максимальної незалежної множини та максимальної кліки.

- *Алгоритм Фалігна* - це алгоритм для знаходження оптимальної стратегії в графі дуелей (досконалий граф, що представляє дві сторони гри). Алгоритм базується на ідеї розв'язання задачі лінійного програмування, де цільова функція описує мінімальну втрату гравця в будь-якому випадку гри. За допомогою цього алгоритму можна знайти оптимальну стратегію для гравців у грі в досконалому графі.
- *Алгоритм Бергера* - це алгоритм для розв'язання задачі побудови останньої вершини гри в досконалих графах. Він базується на ідеї рекурсивного побудови гри від останньої вершини до початкової. Алгоритм має складність, що залежить від кількості вершин у графі.
- *Алгоритм розфарбування досконалого графа* [8] - вершини графа розфарбовуються послідовно, починаючи з однієї вершини та з додаванням кожної наступної вершини з найменшим можливим номером до одного з кольорів, які ще не використовувались для сусідніх вершин. Якщо неможливо розфарбувати вершину за допомогою доступних кольорів, то додається новий колір до списку доступних кольорів.

Реалізація алгоритму розфарбування на Python:

```
def function greedy_coloring(graph):
    color_map = {}
    available_colors = set([1, 2, 3, ..., n])

    # Початкове розфарбування першої вершини
    first_node = graph.nodes[0]
    color_map[first_node] = 1

    # Розфарбовуємо інші вершини
    for node in graph.nodes[1:]:
        neighbor_colors = set()
        for neighbor in node.neighbors:
```

```
            if neighbor in color_map:
                neighbor_colors.add(color_map[neighbor])

        # Знаходимо перший доступний колір
        for color in available_colors:
            if color not in neighbor_colors:
                color_map[node] = color
                break

        # Якщо жоден колір не доступний, додаємо новий колір
        if node not in color_map:
            new_color = max(available_colors) + 1
            color_map[node] = new_color
            available_colors.add(new_color)

    return color_map
```

- *Алгоритм знаходження максимальної незалежної множини* [8]

```
def maximal_independent_set(graph):
    # Починаємо з порожньої множини
    independent_set = set()

    # Проходимося по вершинах графу
    for vertex in graph.nodes():
         # Якщо вершина не має спільних сусідів з вершинами, які уже
вибрані у множину
    if all(vertex not in independent_set and not graph.has_edge(vertex,
v)
      for v in independent_set):
            independent_set.add(vertex)

    return independent_set
```

Цей алгоритм працює за час O(n^2), де n - кількість вершин у графі. Оскільки максимальна незалежна множина є NP-повною задачею, для більш великих графів можуть бути застосовані більш ефективні алгоритми [1].

6 Висновки

У ході роботи було здійснено систематизацію основних теоретичних тверджень про досконалі графи, а також проведено огляд різних типів родин досконалих графів та наведені доведення їхньої досконалості.

Також наведено алгоритми, які базуються на досконалих графах, різні способи їхнього практичного застосування та їхня імплементація. Були сформульовані та доведені твердження та теореми з теорії досконалих графів.

7 Список літератури

[1] Belmonte R., Vatshelle M. Graph classes with structured neighborhoods and algorithmic applications //Theoretical Computer Science. – 2013. – Т. 511. – С. 54-65.

[2] Berge, Claude. Perfect graphs. *Six Papers on Graph Theory*. Calcutta: Indian Statistical Institute. – 1963. – С. 1–21.

[3] Chudnovsky M. et al. On the maximum weight independent set problem in graphs without induced cycles of length at least five //SIAM Journal on Discrete Mathematics. – 2020. – Т. 34. – №. 2. – С. 1472-1483.

[4] Chudnovsky M. et al. The strong perfect graph theorem //Annals of mathematics. – 2006. – С. 51-229.

[5] Diestel R., Diestel R. Extremal graph theory //Graph theory. – 2017. – С. 173-207.

[6] Dilworth R. P. A decomposition theorem for partially ordered sets //Classic Papers in Combinatorics. – 1987. – С. 139-144.

[7] Dushnik B., Miller E. W. Partially ordered sets //American journal of mathematics. – 1941. – Т. 63. – №. 3. – С. 600-610.

[8] Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. Polynomial algorithms for perfect graphs //North-Holland mathematics studies. – North-Holland, 1984. – Т. 88. – С. 325-356.

[9] Hougardy S. Classes of perfect graphs //Discrete Mathematics. – 2006. – Т. 306. – №. 19-20. – С. 2529–2571.