

Потоки в мережі. Теорема Форда- Фалкерсона

ВЕРБІВСЬКА ЮЛІЯ

ТРАВЕНЬ 2024

Мета

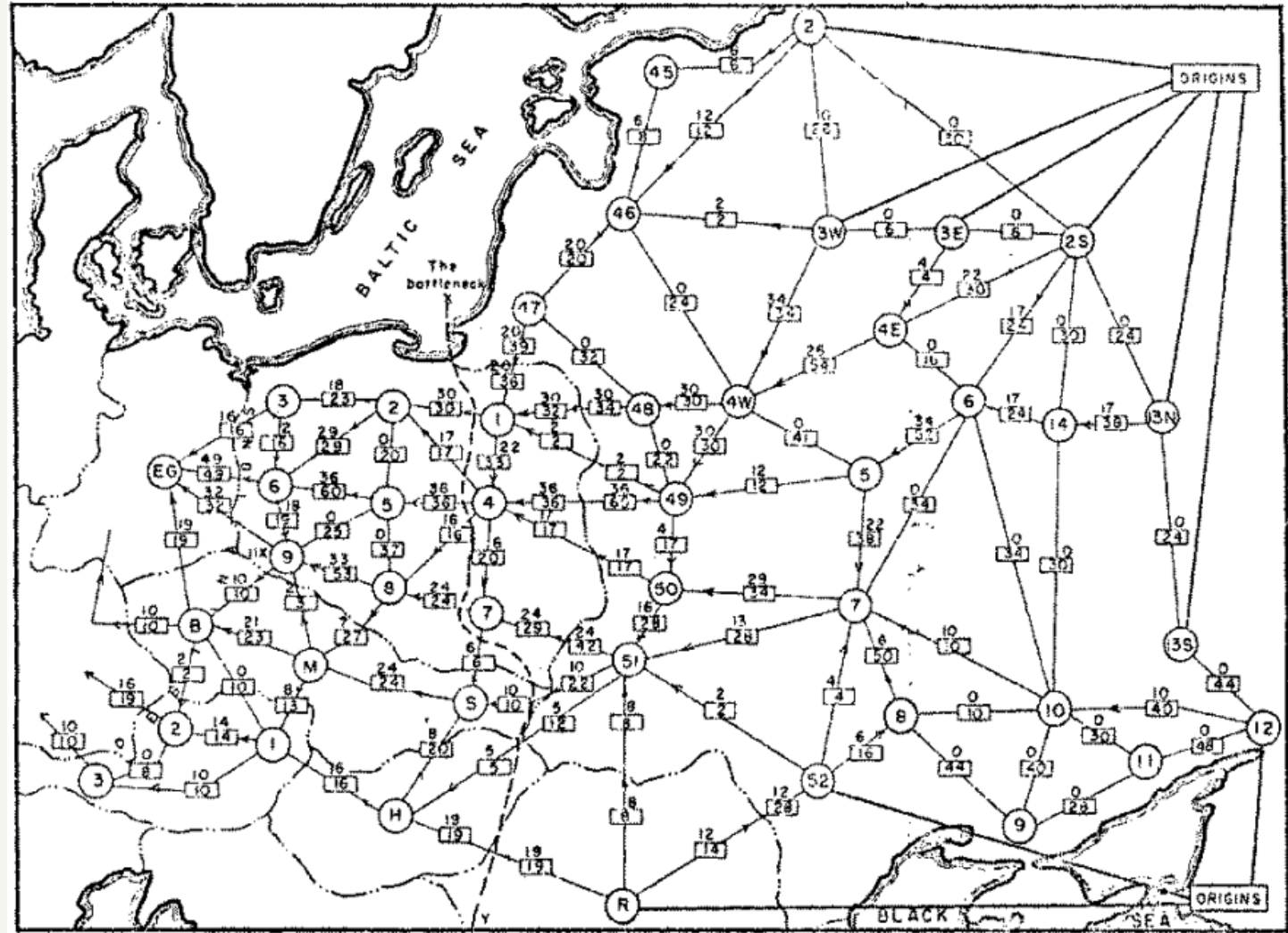
- Вивчення основних означень та понять теорії графів, що необхідні для розуміння подальшої теорії
- Вивчення основних означень теорії потоків у мережі, зокрема мережа, пропускна спроможність та ін.
- Огляд теореми Форда-Фалкерсона та її застосування для доведення мінімакських теорем теорії графів
- Огляд та аналіз алгоритму Форда-Фалкерсона для знаходження максимального потоку у мережі

Актуальність

Теорія потоків у мережі – це розділ теорії графів, що досліджує ефективну передачу та оптимізацію ресурсів або інформації через мережеві структури. Ця галузь займається моделюванням та аналізом різних систем, включаючи транспортні мережі, мережі зв'язку та розподіл енергії, використовуючи такі поняття, як максимальний потік, пропускна спроможність та мінімальний розріз.

Коротко про теорему

Саме з теоремою Форда-Фалкерсона пов'язують початок теорії потоків. Теорема була сформульована Лестером Фордом Молодшим та Делбертом Фалкерсоном у 1956 році. Уперше задача про максимальний потік була сформульована, як запитання, спрямоване на пошук максимального потоку в залізничній мережі, що пов'язувала СРСР та країни-супутники, а також було визначено додаткову задачу, що полягала у пошуку мінімізації перекриття радянської залізничної системи.



From Harris and Ross [1955]: Schematic diagram of the railway network of the Western Soviet Union and Eastern European countries, with a maximum flow of value 163,000 tons from Russia to Eastern Europe, and a cut of capacity 163,000 tons indicated as "The bottleneck"

Потоки у мережі

Означення. Нехай задано множину вершин V , у якої виділено дві вершини: s (витік, вхід або джерело) і t (вихід або стік), інші вершини *називатимемо проміжними вузлами*.

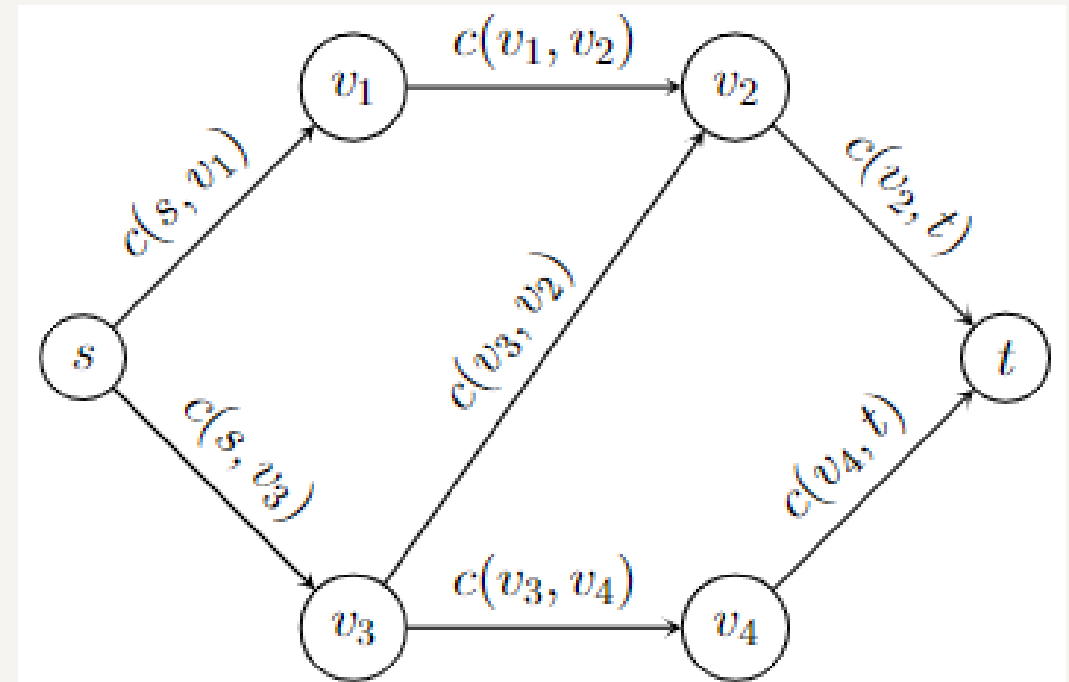
Нехай визначена функція $c : V \times V \rightarrow R$, яка задовольняє співвідношенням

$$c(x, y) \geq 0,$$

$$c(x, s) = 0,$$

$$c(t, y) = 0$$

для будь-яких вершин $x, y \in V$. Тоді $G = (V, s, t, c)$ – **мережа**, функція $c(s, t)$ – **пропускна спроможність мережі G** , а функція $c(x, y)$ – **пропускна спроможність ребра (x, y)** .



Потоки у мережі

Означення. Нехай G – мережа, а функція $f : V \times V \rightarrow R$ задовольняє наступним умовам:

$$\forall x, y \in V \quad f(x, y) \leq c(x, y),$$

$$\forall x, y \in V \quad f(x, y) = -f(y, x),$$

$$\forall v \in V, v \neq s, t \quad \sum_{x \in V} f(v, x) = 0$$

Тоді f – **потік** в мережі G . Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ називають **величиною потоку**. Поток в мережі G з максимальною величиною називається **максимальним**.

Означення. Нехай G – мережа, а множина її вершин V розбита на дві множини, що не перетинаються, $s \in S, t \in T$. Тоді (S, T) – **розріз** мережі G . Величина $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ називається **пропускною спроможністю розрізу**. Будь-який розріз мережі G з мінімальною пропускною спроможністю називається **мінімальним**.

Теорема. У цілочисельній мережі G (у такій, що має цілочисельні пропускні спроможності) існує максимальний потік, при чому серед максимальних потоків даної мережі знайдеться цілочисельний.

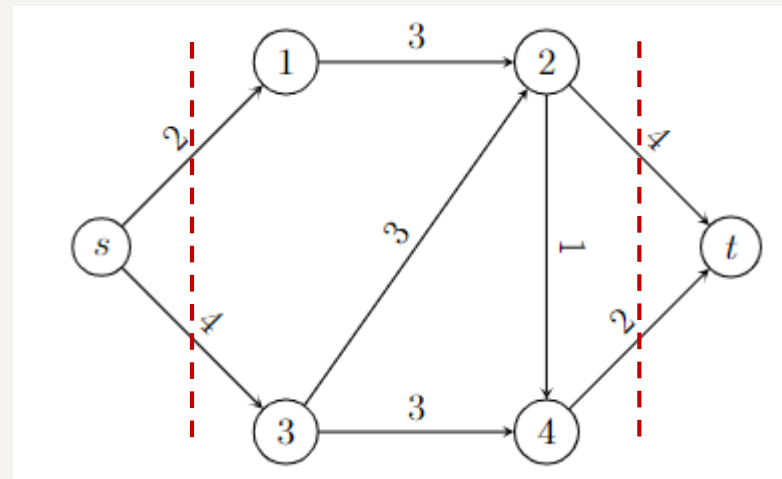
Теорема Форда-Фалкерсона

Теорема (L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956)

У мережі $G = (V, s, t, c)$ заданий потік f . Тоді три наступні твердження є рівносильними:

1. Потік f максимальний
2. Існує такий розріз (S, T) , що $|f| = c(S, T)$
3. У залишковій мережі G_f немає доповнюючого шляху

Іншими словами, *величина максимального потоку із джерела s у стік t дорівнює пропускній спроможності мінімального розрізу, що відокремлює ці дві вершини.*

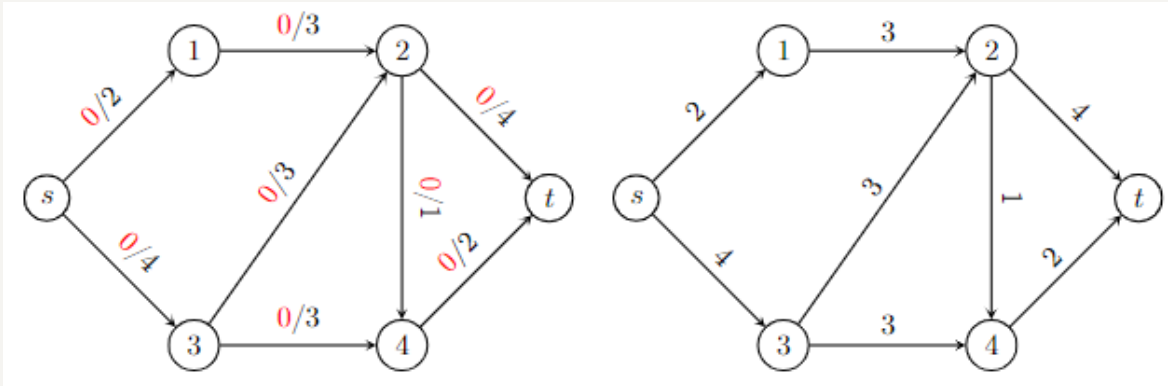


Алгоритм Форда-Фалкерсона

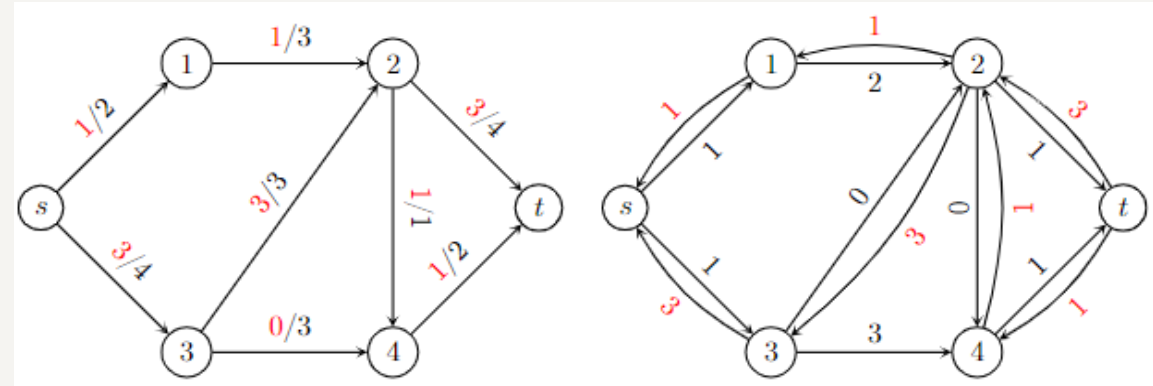
Алгоритм або метод Форда-Фалкерсона – це жадібний алгоритм, що обчислює максимальний потік у мережі. Запропонований у 1956 році, він відноситься до класу **недетермінованих**, тобто кожен його наступний крок не визначається однозначно.

1. Вважаємо, що початковий потік мережею є нульовим: $\forall e(x, y) \in E \ f(x, y) = 0$
2. У залишковій мережі шукаємо будь-який шлях з джерела до стоку, дуги якого задовольняють умову: $f(x, y) \leq c(x, y)$. У разі, якщо такого потоку не існує, то наявний у мережі потік і є максимальним.
3. Через знайдений шлях (будемо називати **збільшувальним шляхом**) пускаємо максимальний можливий потік
4. На знайденому збільшуваному шляху в залишковій мережі шукаємо ребро з мінімальною пропускну здатністю c_{min} .
5. Для кожного ребра на знайденому збільшувальному шляху збільшуємо потік на c_{min} , а на протилежному – зменшуємо на c_{min}
6. Модифікуємо залишкову мережу: для усіх ребер на знайденому збільшувальному шляху, а також для протилежних їм ребер, обчислюємо нову пропускну спроможність. Якщо нова пропускну спроможність не дорівнює нулю, додаємо ребро до залишкової мережі, а якщо дорівнює нулю, стираємо його.
7. Повертаємося на крок 2

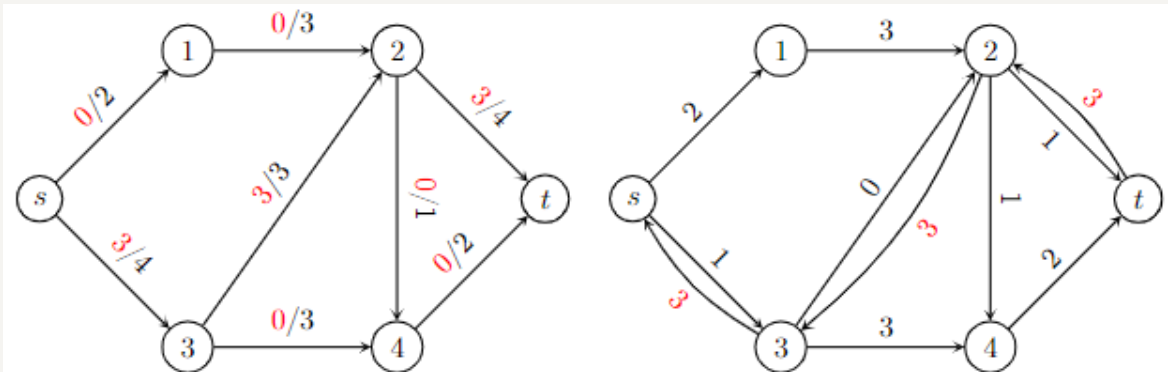
Алгоритм Форда-Фалкерсона



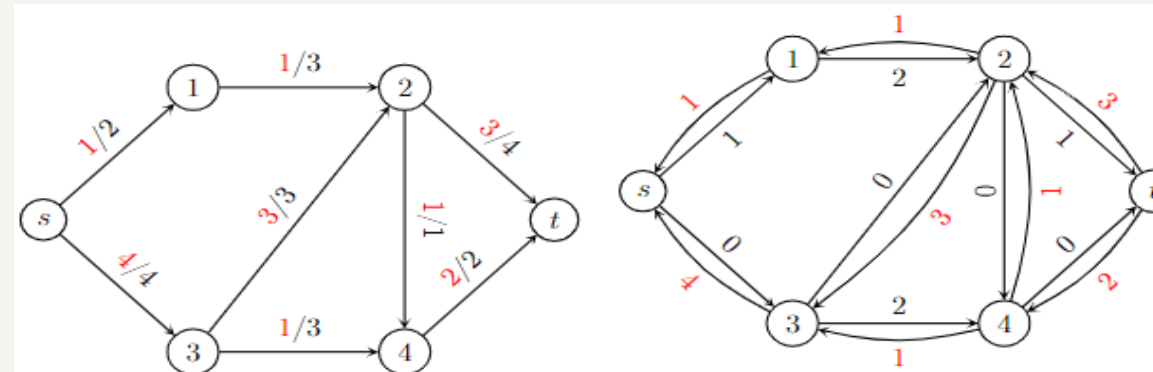
Крок 1. Ліворуч потік, праворуч – залишкова мережа. $|f| = 0$



Крок 3. Пускаємо 1 одиницю потоку збільшувальним шляхом $s-1-2-4-t$

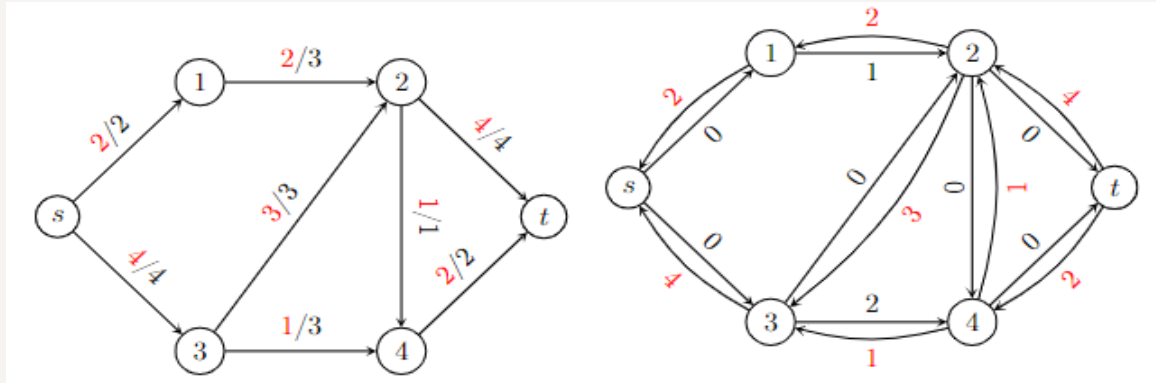


Крок 2. Пускаємо 3 одиниці потоку збільшувальним шляхом $s-3-2-t$



Крок 4. Пускаємо 1 одиниці потоку збільшувальним шляхом $s-3-4-t$

Алгоритм Форда-Фалкерсона



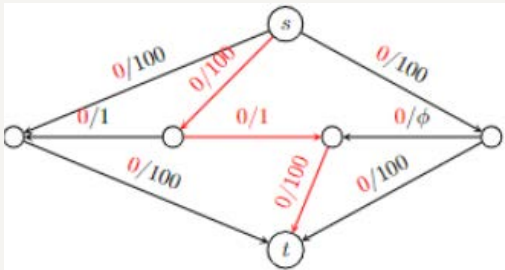
Крок 5. Пускаємо 1 одиницю потоку збільшувальним шляхом $s - 1 - 2 - t$.

Бачимо, що збільшувальних шляхів не лишилося, а отже маємо максимальний потік, що рівний 6.

Аналіз алгоритму

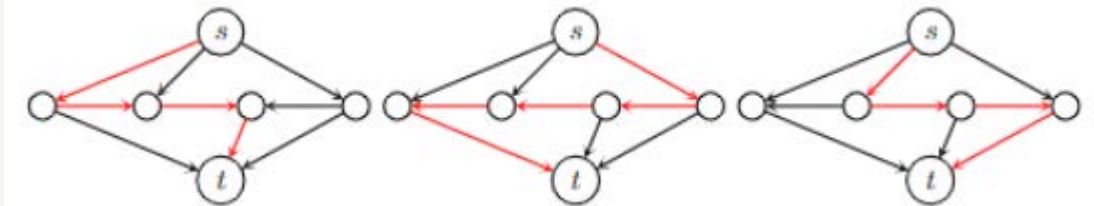
Часова складність для цілочисельної мережі - $O(E * F)$, де E – кількість ребер, F – максимальний потік у мережі. У випадку ірраціональних пропускних спроможностей або у погано структурованих мережах алгоритм може обирати такі шляхи, що кожної ітерації до потоку додаватиметься дуже малий приріст і часова складність у такому разі може сягати **експоненційної**.

Алгоритм може зациклюватися при ірраціональних пропускних спроможностях



$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618034 \quad 1 - \phi = \phi^2$$

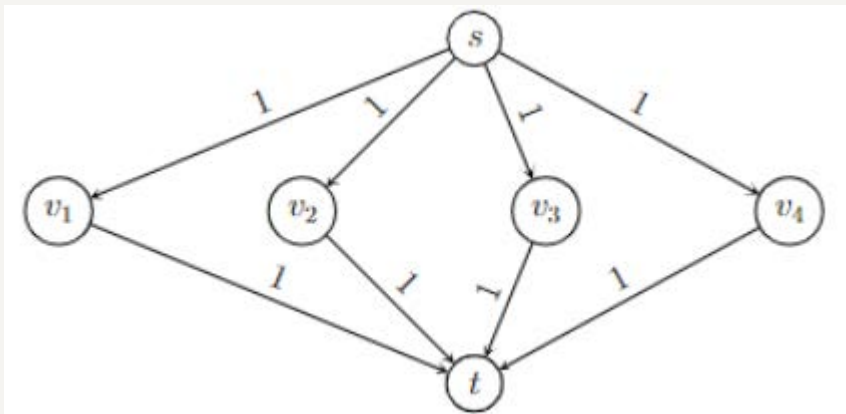
Для деякого невід’ємного числа ітерацій k пропускні спроможності становлять $\phi^{k-1}, 0, \phi$, якщо алгоритм обиратиме шляхи вказані на рисунку.



Аналіз алгоритму

У разі, якщо у цілочисельній мережі усі пропускні спроможності **парні**, то існує такий максимальний потік, що має потужність, що є парним числом.

У разі, якщо у цій мережі усі пропускні спроможності **непарні**, то може існувати максимальний потік, що має парну або непарну пропускну спроможність, залежно від того, як структуровано мережу.



Застосування теореми Форда-Фалкерсона до доведення мінімакських теорем теорії графів

Лема Холла

Лема Холла (P. Hall, 1935) (також відома як теорема про одруження)

Є n хлопців і декілька дівчат. Відомо, що для кожного $1 \leq k \leq n$ довільні k юнаків у сукупності знайомі принаймні з k дівчатами. Тоді всі юнаки можуть обрати по нареченій зі своїх знайомих дівчат.

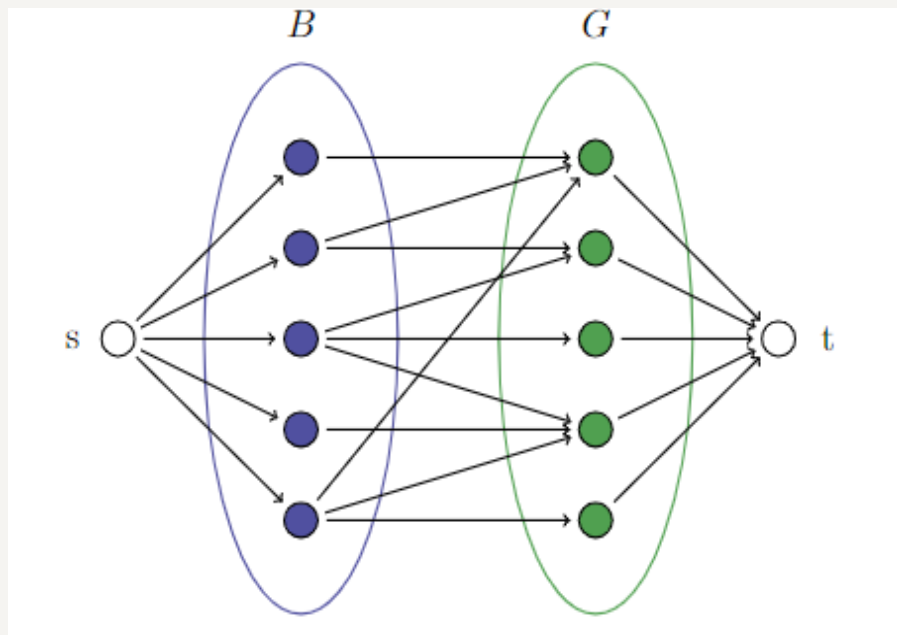
Доведення.

У відповідність хлопцям та дівчатам ставимо вершини відповідних часток двочасткового графу B і G . Вводимо витік (s) та стік (t). Стрілки зі стоку входять у вершини B , а з вершин G входять у t . Стрілки між B і G означають факт знайомства хлопця з дівчиною, пропускна спроможність кожної стрілки – 1, наявність потоку в ній – факт одруження хлопця з дівчиною.

З леми випливає, що дівчат також не менше, ніж n . Тоді маємо

$$\begin{cases} |B| = n, \\ |G| = m, \quad m \geq n \end{cases}$$

Маємо цілочисельну мережу. За теоремою у цілочисельній мережі існує максимальний потік, при чому серед максимальних потоків даної мережі знайдеться цілочисельний.



Застосування теореми Форда-Фалкерсона до доведення мінімакських теорем теорії графів

Лема Холла

Доведення.

Розглянемо отриману мережу і доведемо, що для будь-якого розрізу $\forall(S, T)$, $c(S, T) \geq n$.

Позначимо вершини S і T різними кольорами.

$$S = \{s\} \cup B' \cup G', \quad T = \{t\} \cup (B \setminus B') \cup (G \setminus G')$$

$$|B'| = k, k \leq n, |G'| = l, l \leq m, |B \setminus B'| = n - k, |G \setminus G'| = m - l$$

Використовуючи наступне рівняння

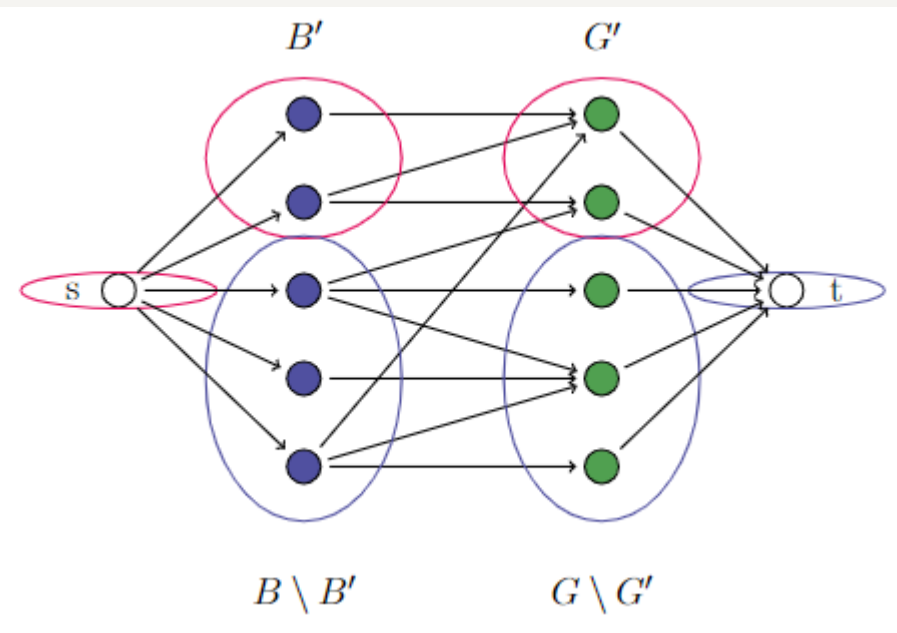
$$\sum_{u \in S, v \in T} c(u, v) = c(S, T)$$

маємо

$$\begin{aligned} c(S, T) &= \sum_{b \in B \setminus B'} c(s, b) + \sum_{g \in G'} c(g, t) + \sum_{b \in B', g \in G \setminus G'} c(b, g) \\ &= n - k + k - l + l = n \end{aligned}$$

Оскільки з s виходить усього n стрілок з $c(s, v) = 1$, то максимальний потік мережі не може бути більший за n .

Таким чином, маємо нижню і верхню межу для потоку даною мережею, що рівні n .



Висновки

У роботі було проведено всебічний аналіз теореми Форда-Фалкерсона. Було розглянуто основні аспекти теореми, а також її було застосовано для доведення деяких мінімаксних теорем теорії графів, а саме теореми Кьоніга, леми Холла та теореми Менгера.

Було розглянуто алгоритм Форда-Фалкерсона та проведено аналіз його ефективності. Було розглянуто, як алгоритм працює з ірраціональними пропускними спроможностями, у яких випадках він може зациклюватися, або працювати нефективно, а також було розглянуто його часову складність та задачі на його застосування.

Список використаної літератури

- [1] L. R. Ford Jr. and D. R. Fulkerson (1956) “Maximal Flow Through A Network” , Canadian Journal of Mathematics 8: 399-404
- [2] Schrijver, Alexander. (2004). On the History of the Transportation and Maximum Flow Problems. Mathematical Programming. 91. 10.1007/s101070100259.
- [3] Карпов Д. В. Теорія графів. 2017
- [4] Reinhard Diestel. Graph Theory. GTM 173, 5th edition 2016/17. Springer-Verlag, Heidelberg Graduate Texts in Mathematics, Volume 173
- [5] Трохимчук Р. М., Нікітченко , М. С. (2017) Дискретна математика у прикладах і задачах: навч. посібник. - Київ : Київський університет, - 248 с.
- [6] А. В. Стьопкін, Д. А. Пластун (2016). Алгоритм Форда-Фалкерсона. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ, 0(6), 84-91.
- [7] Flow Network. Brilliant.org. Retrieved from <https://brilliant.org/wiki/flow-network/>
- [8] Daniel García Solla (2023) Discovering the Maxflow Mincut Theorem: A Comprehensive and Formal Approach. Retrieved from <https://towardsdatascience.com/discovering-the-maxflow-min-cut-theorem-a-comprehensive-and-formal-approach-e2402ce935c7>
- [9] Luca Trevisan (2011). Lecture 9. Stanford University — CS261: Optimization

Список використаної літератури

- [10] Daniel Anderson (2023). Lecture 11. Carnegie Mellon University - 15-451/651: Algorithm Design and Analysis.
- [11] Phillip. Hall (1935). On representatives of subsets. J. London Math. Soc. 10, 26–30
35
- [12] Big O Notation. Brilliant.org. Retrieved 18:56, May 19, 2024, from <https://brilliant.org/wiki/big-o-notation/>
- [13] Uri Zwick (1995). The smallest networks on which the Ford-Fulkerson maximum flow procedure may fail to terminate. Theoretical Computer Science. Volume 148, Issue 1, 165-170
- [14] Kevin Wayne (2004). Princeton University. COS 226: Algorithms and Data Structures
- [15] Graph Theory. Brilliant.org. Retrieved from <https://brilliant.org/wiki/graph-theory/>
- [16] Robin J. Wilson (1996) Introduction to Graph Theory (4th edition). Longman publishing
- [17] Allan Borodin (2013). CSC 373: Algorithm Design and Analysis. Lecture 12