

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр
на тему: **«ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ
ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ»**

Виконала: студентка 4-го року
навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Нич Катерина Петрівна

Керівник: Крюкова Г. В.
кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент: -

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
(підпис)

«_____» _____ 20__р.

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,
доцент, кандидат фіз.-мат. наук

_____ Чорней Р.К.
(підпис)

“ _____ ” _____ 2026

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

для кваліфікаційної роботи
студентці 4-го курсу, факультету інформатики
Нич Катерині Петрівні

Тема: «Порівняння методів регуляризації обернених задач»

Зміст кваліфікаційної роботи:

Анотація

Вступ

1. Огляд основних означень та тверджень, що пов'язані з методами регуляризації обернених задач
2. Застосування методів регуляризації для відновлення зображень
3. Порівняльний аналіз розв'язків обернених задач отриманих за допомогою методів регуляризації

Висновки

Список літератури

Дата видачі “ _____ ” _____ 2025 Керівник _____
(підпис)

Завдання отримала _____
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «_____» _____ 2025р.

Науковий керівник _____
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____
(ПІБ)

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконан- ня етапу	Підпис наукового керівника	Дата озна- йомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми квалі- фікаційної роботи.	13.10.2025			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	20.10.2025			
3.	Розробка плану та стру- ктури роботи.	27.10.2025			
4.	Робота з науковою лі- тературою, опис основ- них означень. Написан- ня вступу та анотації.	17.11.2025			
5.	Дослідження методів регуляризації оберне- них задач.	21.11.2025			
6.	Робота над текстовим оформленням теорети- чної частини та одержа- них результатів.	18.03.2026			
7.	Попередній аналіз квалі- фікаційної роботи. Виправлення помилок.	01.04.2026			
8.	Попередній захист квалі- фікаційної роботи.	03.04.2026			
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	29.05.2026			

Зміст

Анотація	4
Abstract	5
Вступ	6
1 Основні означення та попередні результати	8
1.1 Поняття оберненої задачі та її математична постановка	8
1.2 Варіаційний метод	9
1.3 Ітерація Ландвебера	10
1.4 Методи спектральної фільтрації	11
2 Застосування методів регуляризації для відновлення зображень	13
2.1 Опис набору даних та критерії оцінювання якості	13
2.2 Моделювання прямої задачі та генерація шуму	14
2.3 Пряме відновлення зображень та ефект підсилення шуму	17
2.4 Реалізація варіаційних методів	18
2.5 Реалізація ітерації Ландвебера	20
2.6 Реалізація методів спектральної фільтрації	21
3 Порівняльний аналіз результатів відновлення обернених за- дач	24
3.1 Відновлення за допомогою варіаційного методу	24
3.2 Відновлення за допомогою ітерації Ландвебера	30
3.3 Відновлення за допомогою методів спектральної фільтрації . . .	32
Висновки	39
Використання інструментів штучного інтелекту	42

Анотація

Кваліфікаційна робота присвячена порівняльному аналізу методів регуляризації обернених задач. У роботі розглянуто теоретичні аспекти некоректно поставлених задач за Адамаром та необхідність застосування методів регуляризації для їх вирішення.

Об'єктом дослідження є лінійні алгебричні моделі деградації зображень під впливом гаусового та рухомого розмиття в умовах адитивного білого гаусівського шуму. У роботі програмно реалізовано та детально досліджено дві великі групи методів: спектральні алгебричні підходи (усічений та вибірко-вий сингулярні розклади, метод Ландвебера, спектральний метод Тихонова) та нелінійні варіаційні підходи (L_1 -регуляризація на основі ітераційного алгоритму стиснення та порогоування ISTA, а також TV-регуляризація з використанням квазіньютонівської оптимізації L-BFGS-B).

Ключові слова: обернені задачі, некоректність за Адамаром, регуляризація Тихонова, сингулярний розклад, TV-регуляризація, алгоритм ISTA, метрика PSNR, набір даних MNIST.

Abstract

The qualification work is devoted to the comparative analysis of regularization methods for inverse problems. The paper considers the theoretical aspects of Hadamard ill-posed problems and the necessity of applying regularization methods for their solution.

The object of the study is linear algebraic models of image degradation under the influence of optical (Gaussian) and dynamic (motion) blur in the presence of additive white Gaussian noise. Two major groups of methods have been programmatically implemented and thoroughly investigated: spectral algebraic approaches (truncated and selective singular value decompositions, Landweber iteration, spectral Tikhonov method) and non-linear variational approaches (L_1 -regularization based on the Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA), and Total Variation (TV) regularization using L-BFGS-B quasi-Newton optimization).

Keywords: inverse problems, International ill-posedness, Tikhonov regularization, singular value decomposition, Total Variation regularization, ISTA algorithm, PSNR metric, MNIST dataset.

Вступ

Актуальність

Обернені задачі мають широке застосування в багатьох сферах життя, починаючи від медичної діагностики (томографії), і закінчуючи геофізичною розвідкою та астрофізикою.

Математична модель оберненої задачі часто зводиться до розв'язку лінійних операторних рівнянь першого роду, які мають вигляд $Kx = y$, де за вихідними даними y потрібно відновити вхідні дані x . Такі рівняння характеризуються некоректністю за Адамаром. Особливо важливо, що їх розв'язок є нестійким до малих похибок у вхідних даних.

У роботі увагу зосереджено на задачі відновлення пошкоджених цифрових зображень (image restoration). В умовах війни ця тема набуває неабиякого значення. Сучасні засоби аеророзвідки часто працюють у несприятливих умовах, що призводить до низької якості отриманих матеріалів через зашумлення чи розмиття. Застосування ефективних методів регуляризації може допомогти суттєво покращити якість зображень для більш точної ідентифікації об'єктів, зображених на них.

Мета та завдання дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є проведення порівняльного аналізу ефективності, точності та швидкості методів регуляризації при розв'язанні задачі відновлення цифрових зображень під впливом різних типів деградації.

Об'єктом дослідження є процес розв'язання некоректних задач математичної фізики та обробки сигналів.

Предметом дослідження є варіаційні, ітераційні та спектральні методи регуляризації, зокрема: L_1 -регуляризація, метод Тихонова (L_2), TV-регуляризація (Total Variation), ітерація Ландвебера, а також спектральні підходи — усічений сингулярний розклад (TSVD), вибіркового сингулярний розклад (SSVD) та спектральний метод Тихонова.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

1. Проаналізувати основні теоретичні відомості про некоректні обернені за-

дачі та математичні засади методів регуляризації.

2. Описати алгоритмічну реалізацію варіаційних, ітераційних та спектральних методів відновлення зображень.
3. Програмно реалізувати кожен із запропонованих методів та дослідити вплив їхніх внутрішніх параметрів (параметрів регуляризації, кроку, кількості ітерацій чи сингулярних чисел) на якість відновлення.
4. Провести обчислювальні експерименти на тестових зображеннях із різними типами спотворень (гаусів шум, втрата пікселів, рухоме розмиття).
5. Виконати порівняльний аналіз методів за обчислювальною складністю та за точністю відновлення на основі метрики PSNR.

Практичне значення одержаних результатів полягає у розробці та порівнянні алгоритмів, що можуть бути використані для покращення якості зображень, пошкоджених за умов реальних перешкод. Це має безпосереднє застосування в аеророзвідці для якісного аналізу візуальних даних (виявлення об'єктів, техніки чи позицій противника), а також у медичній візуалізації (наприклад, томографії), де точність і чіткість контурів є критично важливими.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі розглянуто основні означення, пов'язані з оберненими задачами та теорією регуляризації. Також наведено детальний теоретичний опис кожного із запропонованих методів.

Другий розділ присвячено алгоритмічній реалізації методів регуляризації (L_1 , L_2 , TV, ітерації Ландвебера та спектральних фільтрів) й опису методології та умов проведення обчислювальних експериментів.

У третьому розділі наведено результати експериментів, аналіз графіків залежностей метрики PSNR від параметрів та порівняльний аналіз ефективності розглянутих методів для різних типів спотворення зображень.

1 Основні означення та попередні результати

1.1 Поняття оберненої задачі та її математична постановка

У класичному розумінні задачі, в яких за відомими початковими даними (причинами) необхідно знайти наслідок, називають *прямими задачами*.

Означення 1 *Оберненою задачею називають таку задачу, де за відомими наслідками (вихідними даними) потрібно відтворити невідомі причини (вхідні дані), що їх викликали.*

Розв’язки обернених задач часто зводяться до розв’язання операторних рівнянь першого роду

$$Kx = y, \quad (1)$$

де $K : X \rightarrow Y$ — лінійний оператор, що діє в гільбертових просторах. Нехай замість точного y відомі лише наближення y^δ , такі що $\|y - y^\delta\| \leq \delta$.

Методи регуляризації покликані виправити те, що обернені задачі — некоректно сформульовані. Для того аби зрозуміти, що означає термін “некоректно поставлена задача” необхідно розглянути поняття коректно поставленої задачі.

Означення 2 *Задача називається **коректно поставленою** за Ж. Адамаром тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

- *Існує розв’язок $x \in X$ задачі для будь-якого $y \in Y$*
- *Розв’язок єдиний*
- *Розв’язок неперервно залежить від вхідних даних*

*Отже, задачу називають **некоректно поставленою**, якщо не виконується хоча б одна з умов.*

Для операторів у випадку існування оберненого оператора K^{-1} він є необмеженим, тобто порушується умова стійкості. Тому пряме розв’язання $x = K^{-1}y^\delta$ є неможливим, оскільки помилка може бути занадто великою.

1.2 Варіаційний метод

Найпоширеніший підхід до регуляризації полягає у заміні рівняння (1) задачею мінімізації функціонала

$$x_\alpha = \arg \min_{x \in X} \{ \|Kx - y^\delta\|^2 + \alpha \Omega(x) \}, \quad (2)$$

де перший доданок — це залишок, $\alpha > 0$ — параметр регуляризації, $\Omega(x)$ — стабілізатор.

L_2 -регуляризація

Найбільш поширеним випадком є L_2 -регуляризація (або *регуляризація Тихонова*, або *Ridge regression*), де $\Omega(x) = \|x\|^2$.

Теорема 1 Для будь-якого $\alpha > 0$ існує єдиний розв'язок варіаційної задачі з L_2 -стабілізатором, який задовольняє рівняння Ейлера-Лагранжа

$$(K^*K + \alpha I)x_\alpha = K^*y^\delta, \quad (3)$$

де K^* — спряжений оператор, а I — тотожний оператор.

Цей метод дозволяє отримати гладкий розв'язок, проте як зазначається в [1], квадратичний штраф призводить до згладжування різких переходів (edges), що є недоліком для відновлення чітких зображень.

L_1 -регуляризація

Альтернативою використанню L_2 -регуляризації є використання L_1 , де $\Omega(x) = \|x\|_1 = \sum |x_i|$. Цей підхід є основою методу стиснених вимірювань (Compressed Sensing).

Теорема 2 Оскільки функція модуля $|x|$ є недиференційованою в нулі, мінімізація функціонала (2) з L_1 -регуляризатором призводить до розв'язків, які мають багато нульових коефіцієнтів, тобто є розрідженими [2, ст. 113].

TV-регуляризація

Окремим випадком є **TV-регуляризація** (англ. Total Variation, укр. повна варіація), де мінімізується L_1 -норма градієнта зображення. Це дозволяє відновлювати розривні функції, зберігаючи чіткі межі об'єктів, на відміну від Ridge (L_2 -регуляризації).

Означення 3 Функціонал повної варіації (TV) для функції $x(\xi)$ визначається як L_1 -норма її градієнта

$$\Omega_{TV}(x) = \int_{\Omega} d|Dx|, \quad (4)$$

де Dx — градієнтна міра функції $x(\xi)$.

1.3 Ітерація Ландвебера

Окрім варіаційного методу регуляризації розглядають також ітераційні методи, серед яких метод Ланвебера. Метод полягає у побудові послідовності наближень

$$x_{k+1} = x_k + \omega K^*(y - Kx_k), \quad (5)$$

де ω — довжина кроку ітераційного процесу, що гарантує його збіжність. Для обґрунтування збіжності ітераційного процесу за умови точних вхідних даних параметр ω має задовольняти нерівність

$$0 < \omega < \frac{2}{\|K\|_2^2}, \quad (6)$$

де $\|K\|_2$ — спектральна норма лінійного оператора K , що відповідає його найбільшому сингулярному числу. Відповідно до [5], кожна наступна ітерація цього алгоритму поступово включає в розв'язок компоненти, що відповідають усе меншим сингулярним числам σ_i . Оскільки найменші сингулярні числа асоціюються з високочастотним шумом, продовження ітерацій неминуче призводить до підсилення похибок вимірювання (явище напівзбіжності). Отже, своєчасне переривання циклу, відоме в теорії машинного навчання як **рання зупинка (early stopping)**, відіграє роль параметра регуляризації. Це дозволяє ефективно відфільтрувати шум без необхідності явного обчислення обернених або псевдообернених матриць.

1.4 Методи спектральної фільтрації

Метод усіченого сингулярного розкладу

Одним із методів спектральної фільтрації є **метод усіченого сингулярного розкладу** (англ. Truncated Singular Value Decomposition, TSVD). У загальному випадку для розв'язання задачі за допомогою SVD враховуються всі сингулярні числа σ_i

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T y}{\sigma_i} v_i, \quad (7)$$

де u_i — лівий сингулярний вектор, v_i — правий сингулярний вектор, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ — сингулярні числа. При сингулярному розкладі виникає проблема з тим, що останні сингулярні числа σ_i близькі до нуля. Ділення на них стрімко підсилює шум, що може призвести до ще більшого спотворення відновленого сигналу. Вирішенням цієї проблеми слугує метод усіченого сингулярного розкладу, оскільки суть методу полягає в тому, що ми розглядаємо компоненти розкладу лише до k -го індексу

$$x_k = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T y}{\sigma_i} v_i. \quad (8)$$

Метод вибіркового сингулярного розкладу

Метод усіченого сингулярного розкладу має свої проблеми, адже зважає лише на номер сингулярного числа σ_i , що може призвести до втрати корисної інформації. Існує інший, більш адаптивний підхід відсіювання шуму, а саме **метод вибіркового сингулярного розкладу** (англ. Selective Singular Value Decomposition, SSVD). Цей метод враховує не індекс i , а безпосередньо величину проекції даних на базисний вектор, тобто значення чисельника $|u_i^T y|$. Метод полягає у встановленні порогу рівня шуму τ , тобто до розв'язку включаються лише ті компоненти, амплітуда яких перевищує τ ($|u_i^T y| \geq \tau$). Отже, розв'язок оберненої задачі матиме вигляд

$$x_\tau = \sum_{|u_i^T y| \geq \tau} \frac{u_i^T y}{\sigma_i} v_i. \quad (9)$$

Метод Тихонова в контексті спектральної фільтрації

У роботі вже згадувався метод Тихонова в контексті варіаційного методу (див. підрозділ 1.2). Згідно з попереднім визначенням, метод Тихонова полягав у розв'язанні варіаційної задачі з L_2 -стабілізатором. Використання сингулярного розкладу дозволяє розглянути цей метод як процес спектральної фільтрації.

На відміну від TSVD та SSVD, які різко відсікають спектральні компоненти, метод Тихонова м'яко згладжує шум. У термінах сингулярного розкладу регуляризований розв'язок записується за допомогою фільтр-факторів ϕ_i :

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{u_i^T y}{\sigma_i} v_i, \quad \text{де} \quad \phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha}, \quad (10)$$

де α — параметр регуляризації.

Згідно з формулою, фільтр-фактор $\phi_i \approx 1$, коли сингулярні числа великі ($\sigma_i^2 \gg \alpha$), за рахунок чого важливі елементи зображення залишаються з мінімальними змінами. У той час як для малих сингулярних чисел ϕ_i прямує до нуля ($\phi_i \approx 0$), тобто високочастотний шум плавно згладжується алгоритмом.

2 Застосування методів регуляризації для відновлення зображень

У цьому розділі описано практичну реалізацію досліджених методів регуляризації. Також, розглядається процес підготовки даних, створення спотворених зображень, або іншими словами, моделювання деградації зображень (пряма задача).

Усі методи реалізовано мовою програмування Python 3 з використанням бібліотек NumPy [7], SciPy [8] та scikit-learn [9]. Обчислювальні експерименти проводились у середовищі Jupyter Notebook.

2.1 Опис набору даних та критерії оцінювання якості

Для побудови експериментів та порівняння методів було обрано набір даних MNIST [10] (англ. Modified National Institute of Standards and Technology) — базу зображень із рукописними цифрами. Розмір зображень 28×28 , тобто загальна кількість пікселів — 784. Загальна кількість зображень, представлених у наборі даних, становить 70 000. Початкова інтенсивність кожного пікселя задається цілими числами від 0 до 255, а після проведення нормалізації (ділення на 255) набуває дійсних значень від 0 до 1. MNIST — один з базових наборів даних для машинного навчання та задач комп'ютерного зору, на прикладі якого доцільно продемонструвати роботу обраних методів.



Рис. 1: Приклади зображень з набору MNIST

Основним показником для оцінки відновлення зображень у цій роботі є пікове співвідношення сигналу до шуму (англ. PSNR, Peak Signal-to-Noise Ratio) [14]. Ця метрика базується на середньоквадратичній помилці (англ. MSE, Mean Squared Error) і обчислюється за формулою

$$PSNR = 20 \lg \frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{MSE}}, \quad MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2, \quad (11)$$

де MAX_I — максимальне значення пікселя (після нормалізації $MAX_I = 1$, n — кількість пікселів, x_i та $\hat{x}_i$ — значення оригінального та відновленого пікселів відповідно.

Також для порівняння виконується візуальний аналіз схожості відновленого зображення з оригіналом.

2.2 Моделювання прямої задачі та генерація шуму

Пряма задача моделюється за допомогою лінійного операторного рівняння

$$y = Kx + \varepsilon, \quad (12)$$

де K — матриця спотворення, x — вектор довжиною 784, який представляє оригінальне зображення, ε — адитивний шум, y — вектор, що представляє спотворені дані.

Для перевірки методів регуляризації у цій роботі використовуються три види спотворень зображень: гаусівське розмиття, рухоме розмиття та випадково втрачені пікселі.

Моделювання гаусового розмиття та адитивного шуму

Гаусове розмиття є класичним типом оптичного спотворення, що моделює ефекти розфокусування оптичних систем. Для відтворення таких умов у чисельних експериментах конструюється матриця деградації K та додається адитивний білий гаусівський шум.

Спочатку для одновимірного випадку будується матриця розмиття G_x розмірності $N \times N$. Оскільки обчислювальні експерименти проводяться на наборі даних MNIST, розмірність цієї матриці становить 28×28 . Елементи матриці визначаються на основі відстані між пікселями та параметра стандартного відхилення σ

$$G_x(i, j) = e^{-\frac{(i-j)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для збереження загальної яскравості зображення здійснюється нормалізація матриці G_x шляхом ділення кожного її рядка на суму своїх елементів.

У рамках побудованої математичної моделі кожне зображення розглядається як одновимірний вектор довжини $N^2 = 784$. Відповідно до теорії сепар-



Рис. 2: Приклад Гаусівського розмиття при $\sigma = 2$.

рабельної фільтрації зображень [11], повний оператор двовимірного розмиття K розмірності $N^2 \times N^2$ формується як кронекерів (тензорний) добуток одновимірної матриці розмиття самої на себе:

$$K = G_x \otimes G_x.$$

Вектор спотвореного зображення y^δ , який надалі подається на вхід алгоритмам відновлення, моделюється як результат дії оператора деградації на оригінальний вектор x із додаванням вектора випадкового високочастотного шуму n

$$y^\delta = Kx + n, \quad n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\text{noise}}^2 I),$$

де σ_{noise} — заданий рівень дисперсії шуму (візуальний ефект від застосування описаного спотворення продемонстровано на рис. 2).

Генерація рухомого розмиття

Другим типом спотворення, розглянутим у роботі, є рухоме розмиття, що виникає через лінійний зсув об'єкта або камери під час фіксації зображення. Математичне моделювання цього ефекту у частотній області базується на підході, описаному в літературі [16].

Для кожної дискретної частотної координати (u, v) обчислюється коефіцієнт спотворення спектра за формулою:

$$H(u, v) = \frac{T}{c} \sin(c) e^{-ic}, \quad c = \pi(ua + vb),$$

де a та b — параметри зсуву вздовж горизонтальної та вертикальної осей відповідно, а T — час експозиції (прийнято $T = 1$). Для запобігання чисельної невизначеності у точках, де $c = 0$, значення $H(u, v)$ фіксується рівним 1. Безпосереднє замилювання двовимірного зображення здійснюється шляхом його переведення у частотну область за допомогою двовимірного швидкого перетворення Фур'є (англ. FFT, Fast Fourier Transform), покомпонентного

множення на матрицю фільтра H та повернення у просторову область через обернене перетворення.

Оскільки розглянуті в роботі алгоритми відновлення вимагають явного матричного вигляду оператора деградації, було реалізовано алгоритм побудови просторової матриці K розмірності $N^2 \times N^2$, тобто 784×784 . З огляду на лінійність оператора розмиття, повна матриця K формується постовпчиконо: у просторі розмірності N^2 послідовно генеруються одиничні базисні вектори, що містять одиницю в i -й позиції та нулі в усіх інших, які трансформуються у двовимірну матрицю, піддаються частотному розмиттю, а отримані відгуки векторизуються і записуються як i -й стовпець матриці K .

Результат застосування рухомого розмиття наведено на рис. 3.



Рис. 3: Приклад рухомого розмиття з параметрами $a = 0,2$, $b = 0,1$ і $T = 1$.

Генерація випадково втрачених пікселів

Цей вид спотворення імітує ситуацію, коли в матриці сенсора є биті пікселі або коли частина даних втрачається під час передачі.

Математично випадково втрачені пікселі генеруються за допомогою діагональної матриці K . Якщо i -тий піксель залишається без змін, то $K_{ii} = 1$, а якщо піксель втрачено, то $K_{ii} = 0$. Програмна реалізація втрачених пікселів відбувається за допомогою `np.random.choice`, що генерує масив індексів, де значення пікселів зануляються.

У цьому прикладі моделюється втрата 50% пікселів (рис. 4), що відповідає сильному пошкодженню зображення.



Рис. 4: Приклад загублених 50% пікселів на зображенні

2.3 Пряме відновлення зображень та ефект підсилення шуму

Найбільш очевидним підходом до відновлення деградованого зображення є пряме обернення оператора спотворення. Оскільки дискретна модель формування пошкодженого зображення задається лінійною системою $y^\delta = Kx + n$, то за умови існування оберненої матриці K^{-1} формальний розв'язок можна представити у вигляді:

$$x_{\text{naive}} = K^{-1}y^\delta = K^{-1}(Kx + n) = x + K^{-1}n.$$

З отриманого виразу випливає, що результатом прямого обернення є сума істинного зображення x та трансформованого вектора шуму $K^{-1}n$.

Математична специфіка операторів розмиття полягає в тому, що матриця деградації K чутлива до найменшого шуму. Її сингулярні числа зі збільшенням індексу прямують до нуля. Оскільки дія оберненого оператора K^{-1} передбачає ділення на ці сингулярні числа, малий адитивний шум n ділиться на значення, близькі до нуля. Це призводить до неконтрольованого експоненційного підсилення шуму, який повністю придушує корисний сигнал.

Порівняння результату наївного відновлення з оригінальним та розмитим зображеннями наведено на рис. 5. Як можна бачити з ілюстрації, через описаний ефект підсилення шуму розв'язок x_{naive} повністю втрачає будь-який фізичний зміст і візуально перетворюється на "шахову дошку". Це підтверджує чисельну нестабільність прямого обернення та вказує на некоректність задачі за Адамаром, що й зумовлює потребу в застосуванні методів регуляризації.

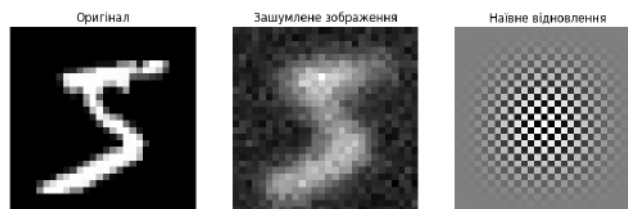


Рис. 5: Приклад наївного відновлення в порівнянні з оригіналом та зображенням створеним за допомогою гаусового розмиття

2.4 Реалізація варіаційних методів

У цій частині роботи розглянуто програмну реалізацію варіаційних методів для розв’язання оберненої задачі відновлення зображень. Реалізація варіаційних алгоритмів передбачає застосування чисельних методів оптимізації для мінімізації функціоналів виду (2).

Ключовим етапом практичного застосування кожного з методів є знаходження значення параметра регуляризації α , який відповідає зображенням з найвищим середнім рівнем PSNR. У даній роботі цей вибір здійснювався емпіричним шляхом на валідаційній вибірці. Такий підхід дозволив для кожного виду спотворення знайти стійке наближення розв’язку, що забезпечує баланс між усуненням спотворення та збереженням структурної цілісності зображення.

Реалізація L_2 -регуляризації

Програмна реалізація методу Тихонова у варіаційному контексті базується на знаходженні розв’язку системи нормальних рівнянь Ейлера-Лагранжа (3), що була детально розглянута у підрозділі 1.2.

З обчислювальної точки зору, матриця системи $A = K^T K + \alpha I$ є симетричною та додатно визначеною. Використання параметра регуляризації $\alpha > 0$ гарантує, що найменше власне значення матриці A буде не меншим за α . Це забезпечує стійкість обернення навіть для сильно розмитих зображень, де сингулярні числа вихідної матриці деградації K стрімко прямують до нуля.

Оскільки вихідні зображення розміром 28×28 пікселів векторизуються у стовпці довжиною $n = 784$, матриця системи A набуває розмірності 784×784 . З огляду на таку розмірність задачі, знаходження розв’язку здійснюється за допомогою прямих методів розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. У програмній реалізації для цього використано функцію `solve` з підпакета лінійної алгебри бібліотеки NumPy [7].

Реалізація L_1 -регуляризації

Наступним методом є L_1 -регуляризація, яка забезпечує отримання розріджених розв’язків відповідно до теореми 2.

Основна логіка методу полягає в мінімізації функціонала (2) з оператором стабілізації $\Omega(x) = \|x\|_1$. Оскільки L_1 -норма є недиференційовною в точці нуля, безпосереднє розв'язання систем лінійних рівнянь, як у попередньому методі, або ж використання класичного градієнтного спуску є неможливим.

Програмна реалізація базується на ітераційному алгоритмі стиснення та порогування (англ. ISTA, Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm) [12]. Алгоритм реалізується за допомогою функції м'якого порогування (англ. Soft Thresholding):

$$\text{ST}_\lambda(x) = \begin{cases} x - \lambda, & \text{якщо } x > \lambda, \\ x + \lambda, & \text{якщо } x < -\lambda, \\ 0, & \text{якщо } |x| \leq \lambda, \end{cases} \quad (13)$$

де λ — поріг відсікання, який в алгоритмі ISTA визначається як добуток кроку градієнтного спуску τ на параметр регуляризації α , тобто $\lambda = \tau \cdot \alpha$.

Для виконання алгоритму обчислюється крок градієнтного спуску τ , що відповідає формулі:

$$\tau = \frac{0,99}{\|K\|_2^2},$$

де K — матриця деградації. Число 0,99 у чисельнику обрано через специфіку процесу машинного округлення в Python. Теоретичною верхньою межею кроку є $\frac{1}{\|K\|_2^2}$, проте якщо через мікропохибки значення $\|K\|_2^2$ буде занижене (наприклад, округлене до 0,999999), то при чисельнику 1 значення кроку τ виявиться вищим за допустиме. Отже, використання множника 0,99 гарантує стабільність алгоритму.

На кожному кроці алгоритму обчислюється вектор градієнта гладкої частини функціонала g , після чого поточне наближення x оновлюється за допомогою функції м'якого порогування (13):

$$g = K^T(Kx - y), \quad x = \text{ST}_\lambda(x - \tau g).$$

Цей ітераційний процес обчислення градієнта та застосування порогування повторюється задану кількість разів, яка визначається параметром `max_iter`.

Реалізація TV-регуляризації

Останнім методом серед варіаційних є TV-регуляризація. Реалізація цього методу полягає в мінімізації цільового функціоналу, де в ролі стабілізатора виступає повна варіація зображення (4). Це дозволяє видаляти шум та зберігати чіткі контури об'єктів.

Оскільки TV-норма обчислюється через модулі градієнтів, вона є недиференційовною в точках з нульовим градієнтом. Для можливості застосування градієнтних методів оптимізації введено малий параметр згладжування $\epsilon = 10^{-6}$

$$\text{TV}_\epsilon(x) = \sum_{i,j} \sqrt{(\nabla_x x)^2 + (\nabla_y x)^2 + \epsilon},$$

де ∇_x та ∇_y — оператори скінченних різниць уздовж горизонтальної та вертикальної осей відповідно.

Реалізація цього методу базується на використанні квазіньютонівського алгоритму оптимізації Бroyдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно L-BFGS-B (англ. Limited-memory BFGS with Box constraints) [13] з бібліотеки оптимізації SciPy [8]. Вибір цього алгоритму зумовлений тим, що він ефективно працює для задач великої розмірності та має можливість врахування фізичних обмежень. Оскільки пікселі початкових зображень було нормалізовано значеннями від 0 до 1, використання даного методу дозволило накласти відповідні обмеження (`bounds=[(0, 1)]`), що запобігло появі недопустимих значень яскравості поза межами проміжку $[0; 1]$.

Підбір оптимального значення параметра регуляризації α здійснювався аналогічно до попередніх методів: шляхом максимізації значення PSNR на валідаційній вибірці з використанням логарифмічної сітки значень.

2.5 Реалізація ітерації Ландвебера

На відміну від варіаційних підходів, метод Ландвебера належить до класу ітераційних методів регуляризації. Як було зазначено у підрозділі 1.3, роль стабілізатора тут відіграє безпосередньо кількість ітерацій (явище ранньої зупинки), а послідовність наближень будується згідно з рекурентною формулою (5).

Програмна реалізація цього алгоритму є обчислювально прямолінійною і не вимагає обернення матриць або застосування сторонніх оптимізаційних бібліотек. Обчислювальний процес стартує з нульового початкового наближення $x_0 = 0$. На кожному кроці поточне наближення коригується на вектор, обчислений за формулою (5). Для оптимізації обчислювальної ефективності транспонована матриця K^T розраховується лише один раз до початку ітераційного циклу.

Ключовими гіперпараметрами алгоритму є довжина кроку ω та кількість ітерацій (`max_iter`). Для забезпечення збіжності методу величина ω має фіксуватися з урахуванням спектральної норми матриці деградації відповідно до умов (6). Кількість ітерацій виступає в ролі параметра регуляризації, тобто значення k підбирається на етапі валідації таким чином, щоб алгоритм зупинився до моменту, коли явище напівзбіжності (англ. *semi-convergence*) почне підсилювати високочастотний шум [5].

2.6 Реалізація методів спектральної фільтрації

Реалізація цього класу методів базується на спектральному аналізі матриці деградації K та вибіркового обмеженні сингулярних чисел у її розкладі [5]. Для отримання сингулярних векторів та чисел у роботі використано функцію `svd` з підпакета лінійної алгебри бібліотеки NumPy [7]. З метою оптимізації використання оперативної пам'яті та обчислювальних ресурсів розклад виконувався у редукованому (економному) форматі з параметром `full_matrices=False`, що є критично важливим для роботи з матрицями великої розмірності.

Реалізація методу усіченого сингулярного розкладу

Відповідно до математичної моделі, описаної у підрозділі 1.4, метод TSVD полягає в усіченні усіх компонентів розкладу, індекс яких перевищує поріг k (згідно з формулою (8)).

У програмній реалізації параметр зрізу k відіграє роль гіперпараметра регуляризації. Його оптимальне значення визначалося емпіричним шляхом на етапі валідації. Для цього було розроблено процедуру сіткового пошуку,

яка ітеративно обчислювала відновлені зображення для усього допустимого спектра значень k та оцінювала їхню якість на валідаційній вибірці. Значення k , що забезпечило глобальний максимум метрики PSNR, фіксувалося як оптимальне для відповідної моделі спотворення і використовувалося для подальшого відновлення тестового набору даних.

Реалізація вибіркового сингулярного розкладу

Обчислювальна схема методу SSVD тісно пов'язана з попереднім підходом, оскільки базою для неї слугують ті самі компоненти сингулярного розкладу матриці K . Однак замість відсікання компонентів за порядковим номером алгоритм реалізує адаптивну спектральну фільтрацію згідно з формулою (9).

У програмному коді ця математична умова реалізується шляхом обчислення проєкцій вектора спотвореного зображення на ліві сингулярні вектори (обчислення амплітуд вигляду $|u_i^T y^\delta|$). Компоненти розкладу, для яких ця величина виявляється меншою за встановлений поріг τ , занулюються за допомогою застосування логічної маски до вектора сингулярних значень.

Як і у випадку TSVD, поріг відсікання τ виступає гіперпараметром регуляризації. Оскільки діапазон значень амплітуд сильно залежить від дисперсії накладеного шуму, пошук оптимального значення здійснювався на логарифмічній сітці параметрів із використанням тієї ж валідаційної процедури (максимізації метрики PSNR). Головна програмна перевага цього підходу полягає в тому, що він дозволяє вибірково зберегти корисні високочастотні деталі, які зазвичай відповідають малим сингулярним числам і відкидаються алгоритмом TSVD, якщо їхня амплітуда достатньо велика.

Реалізація спектрального методу Тихонова

Останнім розглянутим підходом є спектральний метод Тихонова. Для його реалізації, як і для двох попередніх методів, використовуються матриці сингулярного розкладу. Принцип роботи є схожим, однак замість жорсткого відсікання спектральні компоненти згладжуються за допомогою фільтр-факторів ϕ_i відповідно до формули (10).

Гіперпараметром у цьому методі виступає α , так само як і у варіаційному аналогу цього підходу — L_2 -регуляризації. Підбір оптимального параметра α здійснюється емпіричним шляхом: на етапі валідації шукається таке значення, при якому метрика PSNR досягає максимуму. Пошук здійснювався за допомогою логарифмічної сітки; сам процес є аналогічним до варіаційного методу Тихонова, але з використанням попередньо обчисленого сингулярного розкладу.

3 Порівняльний аналіз результатів відновлення обернених задач

У цьому розділі представлено приклади відновлення зображень з різними видами спотворень за допомогою методів регуляризації. Проведено порівняння методів у різних умовах.

3.1 Відновлення за допомогою варіаційного методу

Результати застосування L_2 -регуляризації

Першим етапом тестування стало відновлення зображення, спотвореного гаусовим розмиттям, за допомогою L_2 -регуляризації. Для ефективного тестування була застосована функція підбору оптимального параметра α емпіричним методом шляхом порівняння метрики PSNR на різних рівнях параметра.

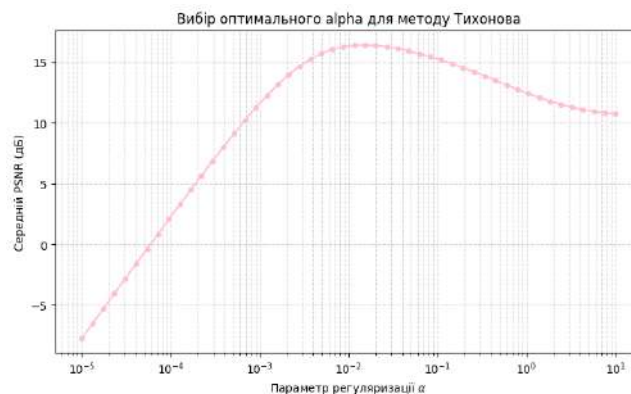


Рис. 6: Графік залежності значення PSNR від параметра α для L_2 -регуляризації

Як можна помітити на графіку (рис. 6), при значеннях α , близьких до нуля, показники PSNR є дуже малими, а чітко виражений пік спостерігається при $\alpha \approx 0,01$. Результати обчислень показали, що оптимальним є значення $\alpha = 0,015264$, яке забезпечує рівень PSNR = 16,43 дБ.

Візуальний аналіз результатів (рис. 8) показує, що за такого типу спотворення L_2 -регуляризація залишає зображення дещо розмитим. Через ефект надмірного згладжування, притаманний квадратичній нормі, втрачаються чіткі високочастотні контури та межі цифр.



Рис. 7: Приклад відновлених зображень за допомогою L_2 -регуляризації

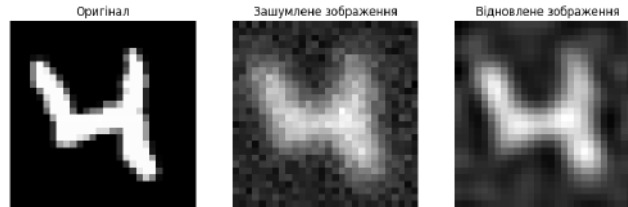


Рис. 8: Порівняння оригінального, зашумленого та відновленого зображень за допомогою L_2 -регуляризації

Наступним прикладом є відновлення зображення з випадково втраченими пікселями. Підбір найкращого значення параметра α відбувався за аналогічною схемою сіткового пошуку.

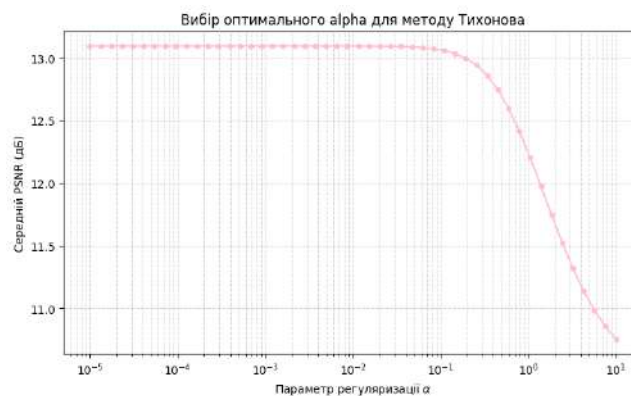


Рис. 9: Графік залежності значення PSNR від параметра α у задачі відновлення втрачених пікселів

Як бачимо на рис. 9, якість зображення залишається незмінною в діапазоні від 10^{-5} до 10^{-1} , після чого значення метрики стрімко падає. Це обчислювально підтверджує, що інформація у втрачених областях не відновлюється.

Візуальний аналіз наведених результатів (рис. 10) показує, що спотворене зображення з втраченими пікселями та спроба його відновлення є практично ідентичними. Отже, можна стверджувати, що класична варіаційна L_2 -регуляризація повністю непридатна для розв'язання задач маскування та відновлення втрачених фрагментів (inpainting).

Причиною цього є математична структура оператора деградації та самого

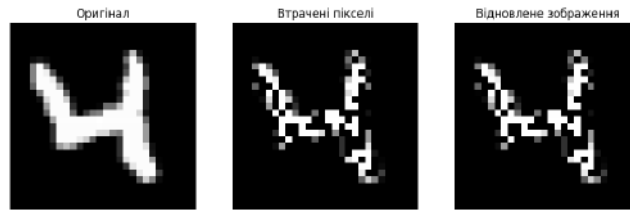


Рис. 10: Приклад відновлення втрачених пікселів за допомогою L_2 -регуляризації

стабілізатора. Матриця деградації K у цій задачі є діагональною маскою, де елементи $K_{ii} = 1$ відповідають збереженим пікселям, а $K_{ii} = 0$ — втраченим. Оскільки оператор стабілізації Тихонова $\Omega(x) = \|x\|_2^2$ штрафувє інтенсивність кожного пікселя незалежно, матриця системи $K^T K + \alpha I$ залишається строго діагональною. Внаслідок цього загальна система рівнянь Ейлера-Лагранжа розпадається на сукупність незалежних скалярних рівнянь для кожного окремого пікселя. Для втраченого елемента ($K_{ii} = 0$) розв'язок набуває вигляду $x_i = 0$, а для збереженого — $x_i = \frac{1}{1+\alpha} y_i$. Таким чином, L_2 -норма не здатна переносити інформацію з відомих сусідніх областей у порожні проміжки, оскільки вона взагалі не враховує просторову зв'язність та гладкість сусідніх пікселів зображення.

Останнім тестом для перевірки варіаційного методу L_2 стало відновлення зображень, що зазнали рухомого розмиття.

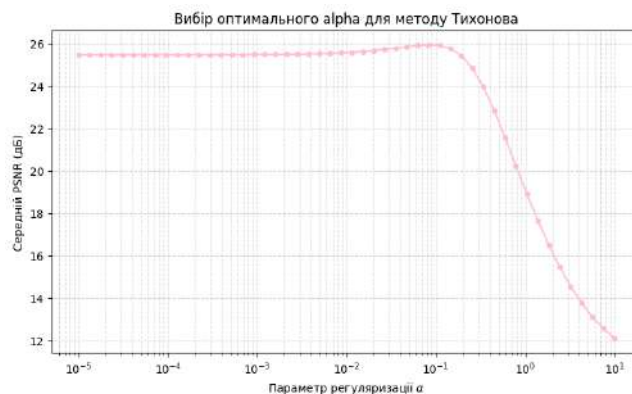


Рис. 11: Графік залежності значення PSNR від параметра α у задачі відновлення рухомого розмиття

На рис. 11 можна помітити чітке пікове значення при $\alpha \approx 0,1$, після чого графік стрімко прямує вниз. Чисельний розрахунок підтверджує цю поведінку: екстремум досягається при $\alpha = 0,082864$, що забезпечує показник

PSNR = 25,92 дБ.



Рис. 12: Приклад відновлення рухомого розмиття за допомогою L_2 -регуляризації

Відновлення за допомогою L_1 -регуляризації

Наступним порівнюваним методом є L_1 -регуляризація. Процедура тестування та налаштування гіперпараметрів проводилася за аналогічною методологією, що й для L_2 -регуляризації, що дозволяє об'єктивно порівняти їхні результати.

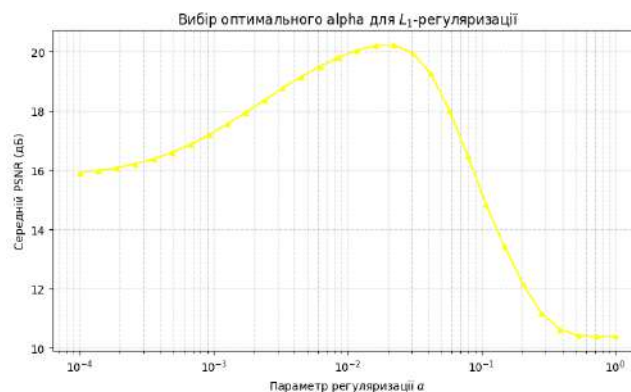


Рис. 13: Графік залежності середнього значення PSNR від параметра α для L_1 -регуляризації

Аналізуючи графік (рис. 13), можна простежити, що при малих значеннях параметра регуляризації α метод L_1 демонструє вищі показники PSNR порівняно з L_2 -регуляризацією. Такі результати є наслідком розрідженості розв'язку через недиференційовність L_1 -норми в точці нуля (див. теорему 2). Оскільки зображення з набору MNIST містять багато чорних (фонових) пікселів, L_1 -регуляризація сприяє їхньому повному зануленню. Натомість L_2 -норма лише зменшує їхню амплітуду, через що фон відновленого зображення залишається більш зашумленим.

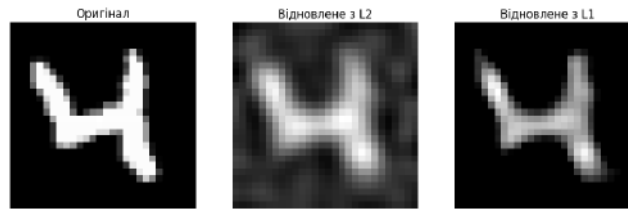


Рис. 14: Порівняння зображень, відновлених за допомогою L_2 та L_1

Візуальний аналіз рис. 14 підтверджує вищі показники PSNR для L_1 -регуляризації: середній рівень PSNR для L_1 становить 20,01 дБ, тоді як для L_2 — 16,33 дБ.

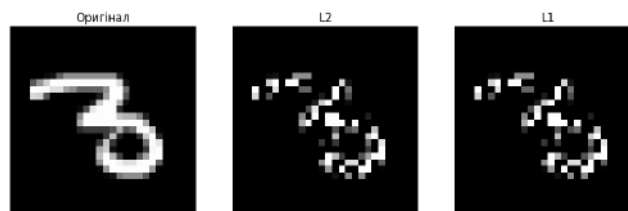


Рис. 15: Порівняння оригінального зображення з відновленими після втрати пікселів за допомогою L_2 та L_1

Як видно з рис. 15, обидва алгоритми не справляються з поставленою задачею маскування. У випадку втрачених пікселів L_1 -регуляризація демонструє результати, ідентичні до L_2 -регуляризації. Тобто L_1 -норма також не здатна відновити втрачені ділянки зображення, оскільки вона штрафувє кожен піксель ізольовано і не враховує просторової інформації від сусідніх збережених пікселів.



Рис. 16: Порівняння методів L_2 та L_1 на задачі рухомого розмиття

Візуальний аналіз результатів відновлення після рухомого розмиття (рис. 16) свідчить, що L_1 -регуляризація залишає значно менше фонового шуму, ніж L_2 . Це підтверджується і чисельно: середній показник PSNR для L_1 становить 31,07 дБ, тоді як для L_2 він дорівнює 25,83 дБ.

Відновлення за допомогою TV-регуляризації

Як показано на рис. 17, найвище середнє значення PSNR становить 19,7 дБ і досягається при значенні параметра регуляризації $\alpha = 0,001624$. Після проходження цієї оптимальної точки спостерігається монотонне спадання функції.

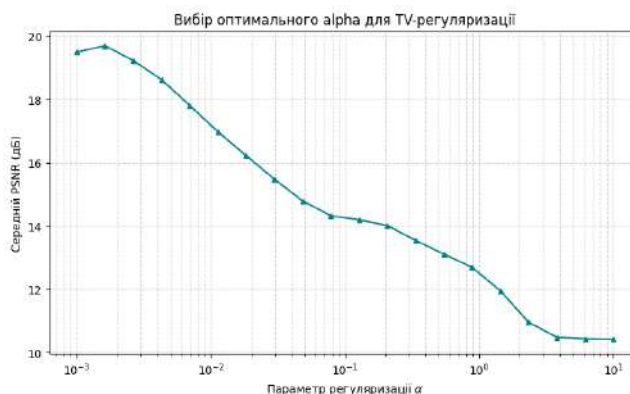


Рис. 17: Графік залежності середнього значення PSNR від параметра регуляризації α для TV-регуляризації при гаусовому розмитті

Візуальний аналіз результатів на рис. 18) показує, що TV-регуляризація успішно відновила контури об'єкта, залишивши лише незначну кількість залишкового шуму. Цей візуальний ефект підтверджується і чисельно: значення метрики PSNR на тестовій вибірці становить 31,14 дБ.

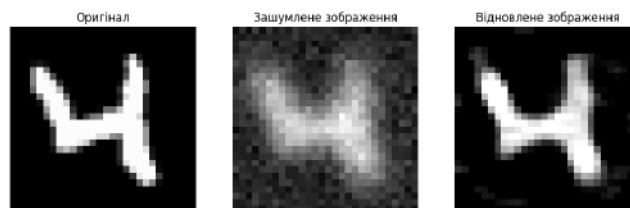


Рис. 18: Порівняння зображення, відновленого за допомогою TV-регуляризації, із зашумленим та оригінальним

Важливою перевагою TV-регуляризації, на відміну від інших розглянутих методів, є її здатність частково відновлювати пропущені пікселі, що наочно продемонстровано на рис. 19. Ця властивість підтверджується метриками: середній показник PSNR для цього методу становить 13,11 дБ, що перевищує результати L_1 - та L_2 -регуляризацій, а також базовий показник для невідновлених зображень.

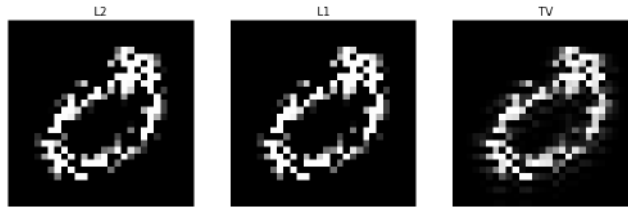


Рис. 19: Порівняння результатів TV-регуляризації з методами L_2 та L_1

При застосуванні алгоритму до зображень, спотворених рухомим розмиттям, показник PSNR на тестовій вибірці також сягнув 31,14 дБ, що підтверджує високу ефективність методу.

3.2 Відновлення за допомогою ітерації Ландвебера

У цьому підрозділі порівняємо результати роботи ітераційного методу Ландвебера з варіаційними підходами, розглянутими раніше.

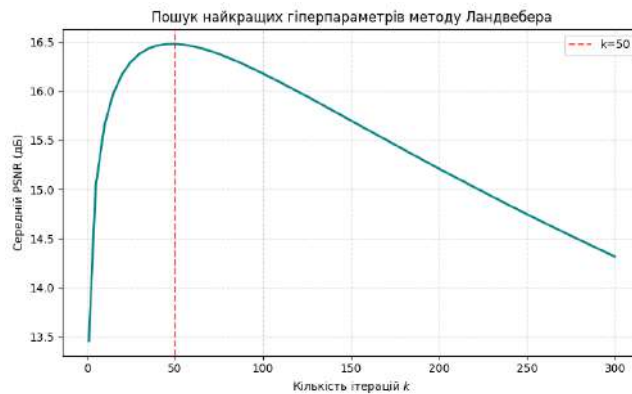


Рис. 20: Графік залежності PSNR від кількості ітерацій k для методу Ландвебера (зашумлене зображення)

Як бачимо з рис. 20, оптимальна кількість ітерацій для методу Ландвебера на зашумленому зображенні становить $k = 50$, що забезпечує PSNR на рівні 16,48 дБ на валідаційній вибірці. Після проходження точки k з найвищим показником PSNR графік стрімко прямує вниз. Це наочно ілюструє явище напівзбіжності, теоретично описане в розділі 1.3.

Як можна помітити на рис. 21, результати роботи ітерації Ландвебера та методу L_2 є майже ідентичними, тоді як L_1 -регуляризація залишає значно менше шуму. Це підтверджується і чисельними метриками: на тестовій вибірці PSNR для методу Ландвебера склав 16,38 дБ. Цей показник лише на

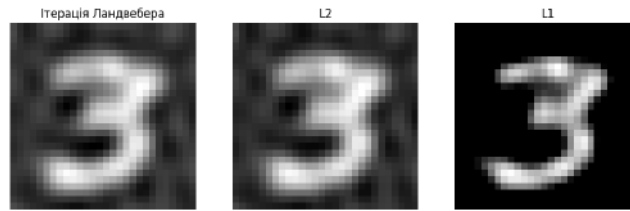


Рис. 21: Порівняння відновлення за допомогою методу Ландвебера, L_2 - та L_1 -регуляризації

0,05 дБ перевищує результат L_2 -регуляризації, проте залишається відчутно нижчим за показники L_1 та TV. Така подібність є закономірною, оскільки ітерація Ландвебера математично тісно пов'язана з мінімізацією L_2 -норми.

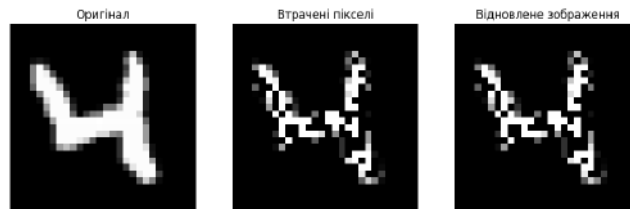


Рис. 22: Порівняння відновлення втрачених пікселів методом Ландвебера з оригіналом та пошкодженим зображенням

Аналіз рис. 22 показує, що відновлення втрачених пікселів не відбулося, що цілком угруповано та узгоджується з результатами класичних варіаційних методів. Про це свідчить незмінне значення PSNR: як для пошкоджених зображень, так і для відновлених методом Ландвебера, показник становить 12,63 дБ.



Рис. 23: Порівняння відновлення рухомого розмиття методом Ландвебера з оригіналом та пошкодженим зображенням

Останнім прикладом застосування ітерації Ландвебера є розв'язання задачі усунення рухомого розмиття, ускладненого адитивним гаусовим шумом. Як видно з рис. 23, відновлене зображення залишається візуально зашумленим порівняно з оригіналом. Проте алгоритм успішно усунув ефект змазуван-

ня контурів: завдяки правильному вибору параметра зупинки ітерацій $k = 10$ на валідаційній вибірці вдалося стабілізувати розв’язок і подолати наслідки деградації. Показник метрики PSNR на тестовій вибірці склав 26,42 дБ, що є вищим за результат класичної варіаційної L_2 -регуляризації для даного типу спотворення. Це підтверджує ефективність алгоритму Ландвебера для розв’язання задач деконволюції за наявності помірного рівня шуму.

3.3 Відновлення за допомогою методів спектральної фільтрації

Наприкінці розглянемо роботу методів спектральної фільтрації в порівнянні з варіаційними та ітераційними (ітерацією Ландвебера).

Відновлення за допомогою усіченого сингулярного розкладу

Для аналізу роботи методу було підібрано параметр k , який відповідає найвищому значенню PSNR (див. рис. 24).

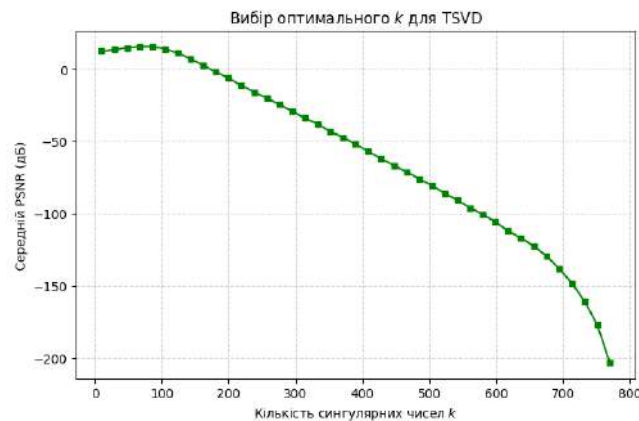


Рис. 24: Графік залежності PSNR від значення параметра k усіченого сингулярного розкладу (TSVD) для зашумленого зображення.

Можемо спостерігати, що початково PSNR повільно зростає, проте згодом швидко прямує вниз. Це відбувається через те, що при виборі великого значення k в розклад додаються компоненти, які відповідають малим сингулярним числам σ_i . Відповідно до формули (8), ділення на ці числа призводить до підсилення шуму, адже він прямуватиме до нескінченності. Це різко погіршує якість зображення (див. рис. 24, де при $k > 200$ значення PSNR стають

від'ємними).

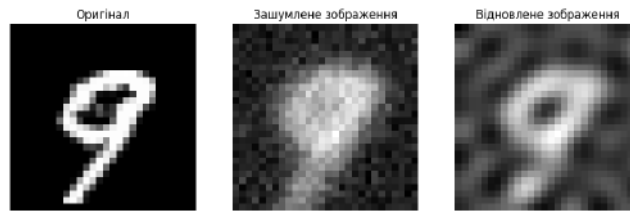


Рис. 25: Порівняння відновленого зображення за допомогою TSVD з оригіналом та зашумленим зображенням.

Візуальний аналіз рис. 25 показує високий рівень залишкового шуму в порівнянні з оригіналом. Це чисельно підтверджує гіршу якість відновлення порівняно з варіаційними методами та ітерацією Ландвебера: PSNR для TSVD становить 15,71 дБ, що є найменшим результатом серед розглянутих раніше методів.

Щодо втрачених пікселів, ситуація повторюється з попередніми методами: TSVD не здатен відновити повністю втрачені ділянки зображення.

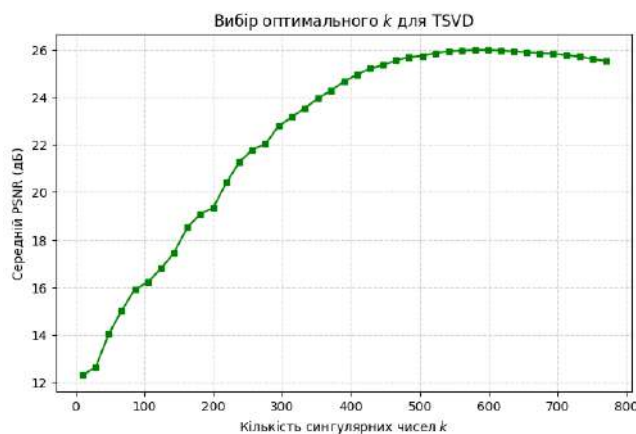


Рис. 26: Залежність середнього PSNR від кількості сингулярних чисел k методу TSVD для відновлення рухомого розмиття.

Для відновлення рухомого розмиття з доданим шумом вибір кількості сингулярних чисел k сильно відрізняється від випадку з гаусовим шумом. Для досягнення найкращого результату знадобилось зберегти 580 сингулярних компонентів (див. рис. 26). Тобто для рухомого розмиття з адитивним шумом, на відміну від гаусового шуму, для методу TSVD збільшення кількості сингулярних чисел покращує середній PSNR. Також для цього виду

спотворення TSVD має середній показник PSNR — 25,97 дБ, який є близьким до ітерації Ландвебера, нижчим за L_1 -регуляризацію та дещо перевищує показники L_2 .



Рис. 27: Порівняння відновленого за допомогою TSVD зображення з оригіналом та спотвореного рухливим розмиттям зображенням.

Як можемо помітити на рис. 27, ознаки шуму залишились на відновленому зображенні, проте ознаки розмиття зникли.

Відновлення за допомогою вибіркового сингулярного розкладу

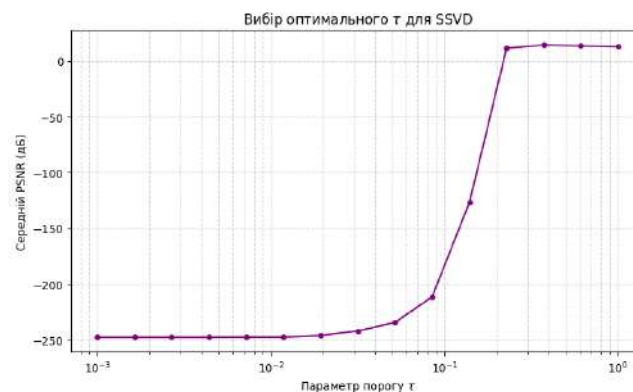


Рис. 28: Графік залежності середнього PSNR від параметра τ для SSVD.

Для оптимізації роботи методу досліджено вплив параметра τ на якість відновлення. Як можна побачити на рис. 28 значення параметра τ нижчі за 10^{-1} не відновлюють зображення, а підсилюють шум, що підтверджують від'ємні значення PSNR для відповідних значень параметра τ .

Як можемо побачити на рис. 29, зображення відновлене з SSVD візуально більш подібне до зашумленого варіанта, ніж до оригіналу. Зображення має розмиті контури, яких не було в спотвореному зображенні, що свідчить про непридатність методу для відновлення зображень з гаусовим шумом. Про це

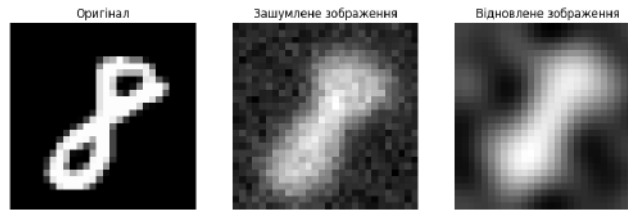


Рис. 29: Порівняння відновленого з SSVD зображення із зображенням спотвореним гаусовим шумом та оригіналом.

також свідчить низький рівень PSNR — 13,98 дБ, що є найнижчим показником серед усіх методів на цьому виді спотворення.

Щодо задачі з втраченими пікселями, ситуація є аналогічною до інших методів: SSVD демонструє рівень PSNR — 13,09 дБ на тестовій вибірці, що повністю збігається з метрикою пошкодженого зображення. Тобто метод SSVD теж не може використовуватись для відновлення втрачених пікселів.

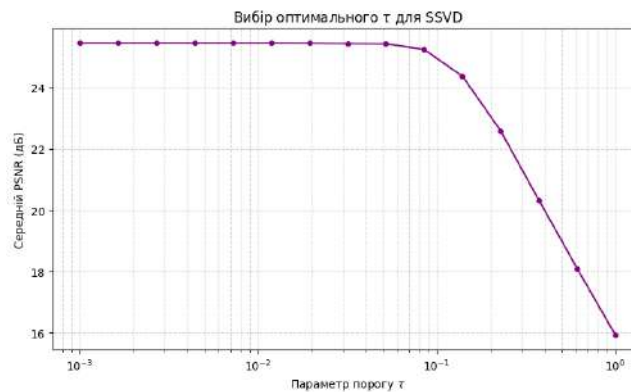


Рис. 30: Графік залежності середнього PSNR від параметра τ для SSVD при рухомому розмитті.

З рис. 30 бачимо, що значення PSNR приблизно на одному рівні до позначки $\tau \approx 10^{-1}$, після чого починають спадати. Якість відновлення рухомого розмиття з гаусовим шумом складає 25,41 дБ, що є середнім результатом серед усіх протестованих методів для цього типу спотворення.

Як можна побачити на рис. 31 зображення має чіткі контури, що означає успішне відновлення від рухомого розмиття. Наявні фонові шуми, що загалом притаманне усім розглянутим методам.



Рис. 31: Порівняння відновленого з SSVD зображення з оригінальним та створеним рухливим розмиттям з гаусовим шумом.

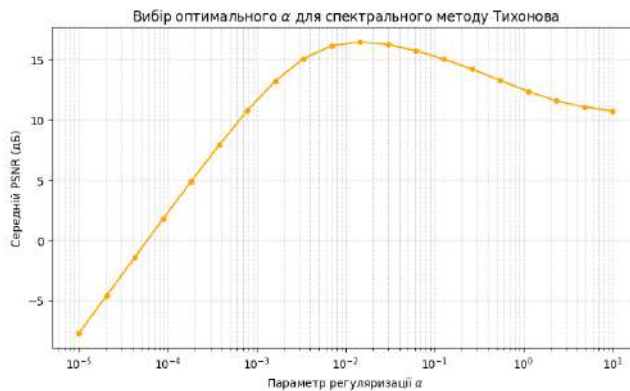


Рис. 32: Графік залежності середнього PSNR від параметра α для спектрального методу Тихонова.

Відновлення за допомогою спектрального методу Тихонова

Процес підбору параметра регуляризації α для цього методу є ідентичним до підбору параметра α для варіаційного відповідника цього методу (L_2 -регуляризації), що можна побачити на рис. 6 та рис. 32.

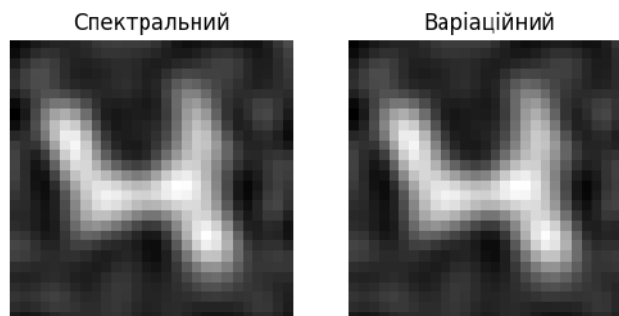


Рис. 33: Порівняння спектрального методу Тихонова з його варіаційним відповідником.

Візуальне порівняння відновлених зображень цим методом (рис. 33) також показує ідентичні результати. Це підтверджується чисельно, адже середній PSNR на тестовій вибірці для обох методів становить 16,33 дБ. Такий

результат є цілком очікуваним, оскільки спектральний і варіаційний методи Тихонова є математично еквівалентними і відрізняються лише алгоритмічною реалізацією.

Щодо задачі з втраченими пікселями, даний метод також не здатен відновити пропущені ділянки зображення.

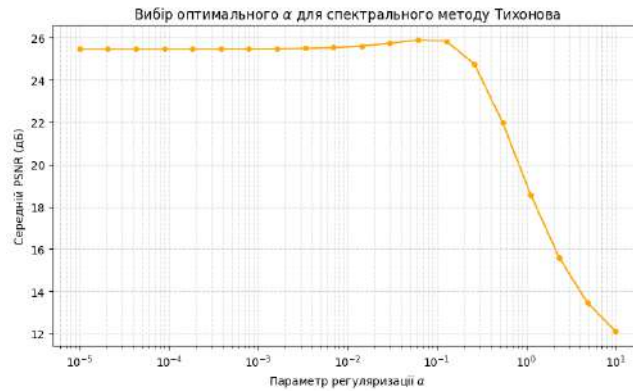


Рис. 34: Графік залежності середнього PSNR від параметра α для спектрального методу Тихонова при рухомому розмитті.

Динаміка вибору параметра регуляризації α для усунення рухомого розмиття з адитивним шумом (рис. 34) також збігається з варіаційним підходом. Проте фінальні значення PSNR на тестовій вибірці мають незначну розбіжність: для спектрального методу показник становить 25,89 дБ, тоді як для варіаційного — 25,83 дБ. Така різниця зумовлена обчислювальними особливостями реалізації алгоритмів, а саме похибками машинного округлення при обчисленні сингулярного розкладу порівняно з ітеративною оптимізацією.

Аналіз отриманих результатів дозволяє виявити чіткі закономірності в роботі алгоритмів та їхню залежність від математичної природи стабілізатора. Прямі алгебричні методи, такі як усічений (TSVD) або вибіркового (SSVD) сингулярний розклад, показали найнижчу ефективність. Більше того, при Гаусовому розмитті метод SSVD продемонстрував результат (13,98 дБ), що є навіть гіршим за базовий показник невідновленого зашумленого зображення (14,1 дБ). Це пояснюється тим, що відсікання сингулярних чисел призводить до втрати критично важливої інформації, що візуально проявляється у вигляді артефактів навколо контурів об'єктів.

Метод регуляризації Тихонова в обох реалізаціях — варіаційній та спектральній — очікувано забезпечив майже ідентичні результати, стабільне

Табл. 1: Порівняння ефективності методів регуляризації за метрикою PSNR (дБ)

Метод відновлення	Гаусове розмиття	Рухоме розмиття
Невідновлене зображення	14,1	13,16
L_2 -регуляризація	16,33	25,83
L_1 -регуляризація	20,01	31,07
TV-регуляризація	19,76	31,14
Метод Ландвебера	16,38	26,42
TSVD	15,71	25,97
SSVD	13,98	25,41
Спектральний метод Тихонова	16,33	25,81

придушення шуму та кращі метрики порівняно з методами сингулярного розкладу. Схожі показники (16,38 дБ та 26,42 дБ) продемонстрував ітераційний метод Ландвебера, де рання зупка спрацювала як аналог згладжування. Проте всі ці алгоритми мають спільний недолік: через квадратичну природу L_2 -стабілізатора вони надмірно штрафують великі значення градієнтів, що призводить до розмиття різких меж між об'єктами.

Найкраще себе у якості відновлення себе показали нелінійні методи. Використання L_1 -регуляризації (понад 20 дБ для Гаусового розмиття) дозволило отримати розріджені розв'язки. Хоча для звичайних природних зображень із плавними переходами цей метод може призводити до втрати дрібних деталей текстури, для нашого набору даних MNIST (контрастні цифри на темному тлі) пошук розрідженого розв'язку підійшов ідеально.

Безперечним лідером, особливо при складному рухомому розмитті, стала TV-регуляризація із найвищим показником 31,14 дБ. Завдяки мінімізації модуля градієнта, цей метод зміг ефективно відфільтрувати шум, зберігши при цьому різкість контурів. Здатність алгоритму до часткового відновлення втрачених пікселів робить його найбільш придатним для задачі відновлення пошкоджених зображень серед усіх досліджених підходів, повністю компенсуючи його вищу обчислювальну складність.

Висновки

У кваліфікаційній роботі виконано порівняльний аналізу та програмну реалізацію методів регуляризації розв’язків обернених задач відновлення зображень. За результатами дослідження сформульовано такі висновки:

- Обґрунтовано теоретичну некоректність задачі прямого обернення оператора деградації за Адамаром. Доведено, що стрімке спадання сингулярних чисел операторів розмиття призводить до експоненційного підсилення шуму. Для проведення експериментів побудовано дискретні моделі Гаусового та рухомого розмиття.
- Програмно реалізовано алгоритми регуляризації: лінійні алгебричні та спектральні методи (TSVD, SSVD, L_2 -регуляризація Тихонова, ітерації Ландвебера), а також нелінійні варіаційні підходи (L_1 -регуляризація на базі алгоритму ISTA та TV-регуляризація за допомогою оптимізатора L-BFGS-B).
- На основі тестування на наборі даних MNIST виявлено закономірності роботи алгоритмів. Прямі методи (TSVD, SSVD) показали найнижчу відновлювальну здатність через втрату високочастотних компонент (до 13,98 дБ). Класичні L_2 -методи усувають шум, але згладжують краї об’єктів через квадратичний штраф на великі градієнти.
- Доведено перевагу варіаційних методів для контрастних зображень. Найкращий результат для Гаусового розмиття продемонстрував метод L_1 (20,01 дБ), а для рухомого абсолютним лідером стала TV-регуляризація (31,14 дБ). Завдяки пошуку розріджених розв’язків та градієнтів ці алгоритми долають шум, зберігають різкі контури об’єктів. TV-регуляризація здатна частково відновлювати втрачені пікселі.

Література

- [1] Benning M., Burger M. *Modern Regularization Methods for Inverse Problems* // Acta Numerica. 2018. Vol. 27. pp. 1–111.
- [2] Adcock B., Hansen A. C. *Compressive Imaging: Structure, Sampling, Learning*. // Cambridge University Press, 2021.
- [3] Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. *Методи обчислень: Підручник у 2 ч. Частина 2*. // Вища школа — Київ — 1995 — ст. 3–15
- [4] Engl, H.W. and Hanke, M. and Neubauer, A. *Regularization of Inverse Problems*. //Mathematics and Its Applications — Springer Netherlands — 1996
- [5] Per Christian Hansen *Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms*. //Society for Industrial and Applied Mathematics — 2010
- [6] Samuli Siltanen *Computational Inverse Problems (Lecture notes)*. //Tampere University of Technology — 2010
- [7] Harris C. R. et al. Array programming with NumPy // Nature. — 2020. — Vol. 585, № 7825. — P. 357–362.
- [8] Virtanen P. et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python // Nature Methods. — 2020. — Vol. 17, № 3. — P. 261–272.
- [9] Pedregosa F. et al. Scikit-learn: Machine learning in Python // Journal of Machine Learning Research. — 2011. — Vol. 12. — P. 2825–2830.
- [10] LeCun Y., Bottou L., Bengio Y., Haffner P. Gradient-based learning applied to document recognition // Proceedings of the IEEE. — 1998. — Vol. 86, № 11. — P. 2278–2324.
- [11] Hansen P. C., Nagy J. G., O’Leary D. P. *Deblurring Images: Matrices, Spectra, and Filtering*. // Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

- [12] Beck A., Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems // SIAM Journal on Imaging Sciences. — 2009. — Vol. 2, № 1. — P. 183–202.
- [13] Byrd R. H., Lu P., Nocedal J., Zhu C. *A limited memory algorithm for bound constrained optimization.* // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1995. — Vol. 16, № 5. — P. 1190–1208.
- [14] Hore A., Ziou D. *Image Quality Metrics: PSNR vs. SSIM.* // 20th International Conference on Pattern Recognition. — IEEE, 2010. — pp. 2366–2369.
- [15] Gonzalez R. C., Woods R. E. *Digital Image Processing, Fourth Edition.* // Pearson — 2018
- [16] Berrios I. *How to model motion blur in frequency space.* // Medium [Электронный ресурс]. — 2022. — Режим доступа: <https://medium.com/@itberrios6/how-to-model-motion-blur-in-frequency-space-12fd18939f56>

Використання інструментів штучного інтелекту

Відповідно до Політики відповідального використання генеративного ШІ в НаУКМА (наказ № 332 від 29.07.2025), під час підготовки цієї кваліфікаційної роботи було частково залучено інструменти штучного інтелекту в такій формі:

- У процесі підготовки тексту роботи використано Gemini 3.5 Flash (Google) для технічного редагування, стилістичного коригування, пошуку нових джерел та перевірки синтаксису математичних виразів у середовищі L^AT_EX; усі згенеровані варіанти технічної верстки перевірено, уточнено й доопрацьовано автором.
- Інструменти генеративного штучного інтелекту залучалися для аналізу, локалізації та виправлення помилок у допоміжному програмному коді, а також для оптимізації алгоритмів розрахунку метрики PSNR та автоматизації побудови логарифмічних сіток параметрів. Усі виправлені фрагменти коду були детально протестовані й перевірені автором на стабільність роботи.

Усі математичні викладки, алгоритмічні схеми, кінцева програмна реалізація методів регуляризації та аналітичні висновки щодо результатів обчислювальних експериментів виконані автором самостійно; збереження авторської незалежності та вимог академічної доброчесності повністю забезпечено.