6. Плиско В. Е. Математическая логика. Курс лекций / В. Е. Плиско. – Режим доступу: http://lpcs.math.msu.su/~plisko/matlog.
7. Режим доступу: http://eprover.org
8. Режим доступу: http://tptp.org

A. Kolyadenko

USAGE OF AUTOMATIC THEOREM PROVERS FOR RBAC MODELS RESEARCH AND GENERATING OF AUTHORIZATION DECISION STATEMENTS

Usage of automatic theorem provers for RBAC models research was considered. The first-order theory representations of ANSI-INCITS 359-2004 RBAC models were offered. The approach of generating of authorization decision statements using automatic theorem prover EProver was offered.

УДК 681.3.06

Шкільняк О. С.

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ МОДАЛЬНИХ І ТЕМПОРАЛЬНИХ ЛОГІК

На основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу до побудови логічних та програмних систем досліджено композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки номінативних рівнів. Для зазначених логік збудовано числення секвенційного типу. Для таких числень доведено теореми коректності та повноти.

Останім часом для специфікації програм і моделювання складних динамічних систем ефективно використовуються модальні та темпоральні логіки. Можливості модальних логік та композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів поєднують композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) [1]. Важливим класом композиційно-номінативних модальних логік є транзиційні КНМЛ, окремим випадком яких є загальні та темпоральні КНМЛ. Центральним поняттям КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС) [1]. В роботі [2] на основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу [3] запропоноване спеціальне уточнення поняття КНМС для логік реномінативного та кванторного рівнів, досліджені семантичні властивості транзиційних та темпоральних КНМЛ. Для цих логік запропоновано числення секвенційного типу, доведено коректність та повноту таких числень пропозиційного рівня.

В цій роботі продовжується дослідження секвенційних числень транзиційних та темпоральних КНМЛ номінативних рівнів. Розглядається відношення логічного наслідку для множин формул таких логік. На основі властивостей цього відношення будуються секвенційні числення для загальних транзиційних (ТМЛ) та темпоральних КНМЛ реномінативного та кванторного рівнів, для таких числень доводяться теореми коректності та повноти.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити за роботами [1, 2].

1. Відношення логічного наслідку для множин формул КНМЛ

Для КНМЛ номінативних рівнів поняття логічного наслідку для множин специфікованих станами формул визначаємо так:

Δ є логічним наслідком $\boldsymbol{\Gamma}$ в КНМС $\boldsymbol{M}$, якщо для всіх $d\in{}^{V}\!A$ із того, що $\Phi_\alpha(d\cap{}^{V}\!A_\alpha)=T$ для всіх

$\Phi^{\alpha}\in\mathbf{\Gamma}$, випливає, що неможливо $\Psi_{\beta}(d\cap{}^{V}\!A_{\beta})=F$ для всіх $\Psi^{\beta}\in\Delta$.

Множину вигляду $d\cap{}^{V}\!A_{\alpha}$, де $d\in{}^{V}\!A$, позначаємо d_{α}.

Те, що Δ є логічним наслідком $\mathbf{\Gamma}$ в КНМС $\boldsymbol{M}$, позначаємо $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$.

Δ є логічним наслідком $\mathbf{\Gamma}$ (відносно КНМС певного типу), якщо $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ відповідного типу. Те, що Δ є логічним наслідком $\mathbf{\Gamma}$, позначаємо $\mathbf{\Gamma}\models\Delta$.

Отже, $\mathbf{\Gamma}\not\models\Delta \Leftrightarrow$ існують КНМС $\boldsymbol{M}$ та $d\in{}^{V}\!A$ такі: для всіх $\Phi^{\alpha}\in\mathbf{\Gamma}$ маємо $\Phi_{\alpha}(d_{\alpha})=T$ та для всіх $\Psi^{\beta}\in\Delta$ маємо $\Psi_{\beta}(d_{\beta})=F$.

Наведемо властивості відношення $\models$ на реномінативному та кванторному рівнях. В першу чергу, це властивості G1, G2, П1–П4, успадковані із пропозиційного рівня.

Для кожної узгодженої КНМС $\boldsymbol{M}$ маємо:

G1) Якщо $\mathbf{\Gamma}\cap\Delta\neq\varnothing$, то $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$.

G2) Нехай $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ та $\Delta\subseteq\Sigma$. Тоді $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Sigma$.

П1) $\neg\Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Phi^{\alpha}$.

П2) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \neg\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$.

П3) $\Phi\vee\Psi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ та $\Psi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$.

П4) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Phi\vee\Psi^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Phi^{\alpha}, \Psi^{\alpha}$.

Додаємо властивості реномінативного рівня.

$\Phi N_{\vdash}$) $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ за умови $y\in\mu(\Phi)$.

$\Phi N_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$ за умови $y\in\mu(\Phi)$.

$RT_{\vdash}$) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$.

$RT_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$.

$R\neg_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$.

$R\neg_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$.

$R\vee_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$.

$R\vee_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)^{\alpha}$.

$RR_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$.

$RR_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)^{\alpha}$.

$R_{\vdash}$) $\mathbf{\Gamma}, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Box\Phi)^{\alpha}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}, \Box R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$.

$R_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Box\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Box R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$.

Тепер додаємо властивості кванторного рівня.

$R\exists_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow \exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ за умови $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$.

$R\exists_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \exists y R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^{\alpha}$ за умови $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$.

$R\exists\exists_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow \exists z R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{y}_{z}(\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ за умови $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$.

$R\exists\exists_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\exists y\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \exists z R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ^{y}_{z}(\Phi)^{\alpha}$ при умові $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$.

$\exists_{\vdash}$) $\exists x\Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow R^{x}_{y}(\Phi)^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ за умови y тотально неістотне та $y\notin nm(\mathbf{\Gamma}, \Delta, \Phi)$.

$\exists_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, R^{x}_{y_1}(\Phi)^{\alpha},\ldots, R^{x}_{y_n}(\Phi)^{\alpha}, \exists x\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \exists x\Phi^{\alpha}$.

Зазначимо модальні властивості. У випадку загальних транзиційних КНМЛ маємо:

$\Box_{\vdash}$) $\Box\Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow \Phi^{\beta_1},\ldots, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ для всіх станів β_i таких, що $\alpha\rhd\beta_i$.

$\Box_{\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану β такого, що $\alpha\rhd\beta$.

У випадку темпоральних КНМЛ маємо:

$\Box_{\uparrow\vdash}$) $\Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow \Phi^{\beta_1},\ldots, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ для всіх станів β таких, що $\alpha\rhd\beta_i$.

$\Box_{\uparrow\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану β такого, що $\alpha\rhd\beta$.

$\Box_{\downarrow\vdash}$) $\Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha}, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta \Leftrightarrow \Phi^{\beta_1},\ldots, \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta$ для всіх станів β_i таких, що $\beta_i\rhd\alpha$.

$\Box_{\downarrow\dashv}$) $\mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{\boldsymbol{M}}\Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану β такого, що $\beta\rhd\alpha$.

2. Секвенційні числення загальних транзиційних та темпоральних КНМЛ

Пропонований варіант секвенційних числень для загальних ТМЛ та темпоральних КНМЛ пов'язаний з побудованою в [2] реляційною семантикою таких логік.

Специфікацією стану назвемо слово вигляду $\alpha\vdash$ чи $\alpha\dashv$, де α – *префікс стану світу*. В такому префіксі вказується стан світу, в якому розглядається специфікована формула. Спеціальний символ * вказує на довільний стан, пов'язаний із даним станом відношенням досяжності. Це уточнюється залежно від виду модальної чи темпоральної логіки [2]. Стани світу називатимемо натуральними числами. Початковий стан світу позначимо 0.

Секвенції в пропонованому варіанті числень збагачуємо збудованими на даний момент множиною $\boldsymbol{S}$ станів світу та множиною $\boldsymbol{R}$ відношень на $\boldsymbol{S}$. Для логік номінативного рівня збагачена секвенція має вигляд Σ // St // M, де Σ – множина специфікованих формул, M – схема моделі світу, тобто збудоване на даний момент відношення досяжності, записане для імен станів, St – збудована на даний момент множина імен станів із множинами їх базових даних. Справді, секвенційні форми для числень КНМЛ номінативних рівнів повинні враховувати можливість зміни носіїв станів світу (форма $_{\vdash}\exists$, в окремих випадках, можливо, також форми $_{\vdash}\mathbf{R}\exists\exists$, $_{\dashv}\mathbf{R}\exists\exists$). Тому для числень логік номінативного рівня для кожного із станів $\alpha\in\boldsymbol{S}$ треба вказувати збудовану на даний момент множину його базових даних A_{α}. Збагачену секвенцію для випадку числень номінативних рівнів записуємо у вигляді Σ // $\alpha\{A_{\alpha}\}, \beta\{A_{\beta}\}, \ldots$ // M, скорочено Σ // St // M. Тут Σ – множина специфікованих формул, $\alpha\{A_{\alpha}\}, \beta\{A_{\beta}\}, \ldots$ – збудовані на даний момент стани із множинами базових даних, M – схема моделі світу на цей момент.

До базових секвенційних форм композиційно-номінативних модальних числень (КНМЧ) реномінативного рівня належать форми ${}_{\vdash}\neg$, ${}_{\dashv}\neg$, ${}_{\vdash}\vee$, ${}_{\dashv}\vee$, ${}_{\vdash}\mathbf{RT}$, ${}_{\dashv}\mathbf{RT}$, ${}_{\vdash}\mathbf{RR}$, ${}_{\dashv}\mathbf{RR}$, ${}_{\vdash}\mathbf{R}\neg$, ${}_{\dashv}\mathbf{R}\neg$, ${}_{\vdash}\mathbf{R}\vee$, ${}_{\dashv}\mathbf{R}\vee$, ${}_{\vdash}\Phi\mathbf{N}$, ${}_{\dashv}\Phi\mathbf{N}$, які подібні до відповідних секвенційних форм реномінативних неокласичних числень, а також форми ${}_{\vdash}\mathbf{R}$ та ${}_{\dashv}\mathbf{R}$. Вони не змінюють множини базових даних станів і схему моделі світу. До зазначених секвенційних форм додаємо базові форми відповідного типу для модальних операторів. Для загальних ТМЛ це форми ${}_{\vdash}\Box$ та ${}_{\dashv}\Box$, якщо базовий модальний оператор – $\Box$. За таких умов форма ${}_{\vdash}\Box$ не змінює множини базових даних станів і схему моделі світу, форма ${}_{\dashv}\Box$ для стану α вводить новий стан β такий, що $\alpha\rhd\beta$ та $A_{\beta}=A_{\alpha}$. Для темпоральних КНМЛ базові форми для модальних операторів – це ${}_{\vdash}\Box_{\uparrow}$, ${}_{\vdash}\Box_{\downarrow}$ та ${}_{\dashv}\Box_{\uparrow}$, ${}_{\dashv}\Box_{\downarrow}$, якщо базові темпоральні оператори – $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$.

Базові секвенційні форми для КНМЧ кванторного рівня утворюємо додаванням до базових форм реномінативного рівня секвенційних форм ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists$, ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists$, ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\exists$, ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\exists$, ${}_{\vdash}\exists$, ${}_{\dashv}\exists$. Вони не змінюють схему моделі світу M, але форми ${}_{\vdash}\exists$ (в окремих випадках, можливо, також ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\exists$ і ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\exists$) змінюють стани. Наведемо базові форми для КНМЧ кванторного рівня.

$$ {}_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\neg A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\neg A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\vdash}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //M \qquad {}_{\alpha\vdash}B,\ \Sigma\ //\ St\ //M}{{}_{\alpha\vdash}A\vee B,\ \Sigma\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\vee\ \frac{{}_{\alpha\dashv}A,\ {}_{\alpha\dashv}B,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}A\vee B,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathbf{RT}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathbf{RT}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathbf{RR}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathbf{RR}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathbf{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathbf{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathbf{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathbf{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\vdash}\Phi\mathbf{N}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\Phi\mathbf{N}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}. $$

Для форм ${}_{\vdash}\Phi\mathbf{N}$ та ${}_{\dashv}\Phi\mathbf{N}$ маємо такі умови: $y\in\mu(A)$.

$$ {}_{\vdash}\mathbf{R}\Box\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Box R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\Box A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathbf{R}\Box\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\Box R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\Box A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\exists yR^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\exists yA),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists yR^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\exists yA),\Sigma\ //\ St\ //\ M}. $$

Для форм ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists$ та ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists$ умова: $y\notin\{\bar v,\bar x\}$.

$$ {}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\exists\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\exists zR^{\bar v}_{\bar x}\circ^{y}_{z}(A),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\exists yA),\Sigma\ //\ St\ //\ M}; $$

$$ {}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\exists\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists zR^{\bar v}_{\bar x}\circ^{y}_{z}(A),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\exists yA),\Sigma\ //\ St\ //\ M}. $$

Для форм ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\exists$ та ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\exists$ такі умови: $y\in\{\bar v,\bar x\}$, z тотально неістотне та $z\notin nm(R^{\bar v}_{\bar x}(A))$.

Таким чином, за умови $y\notin\{\bar v,\bar x\}$ будемо використовувати секвенційні форми ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists$ та ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists$, якщо ж $y\in\{\bar v,\bar x\}$, то використовуємо форми ${}_{\vdash}\mathbf{R}\exists\exists$ та ${}_{\dashv}\mathbf{R}\exists\exists$:

$$ {}_{\vdash}\exists\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{x}_{y}(A),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\exists xA,\Sigma\ //\ St\ //\ M}. $$

Тут y тотально неістотне та $y\notin nm(\Sigma, A)$. При цьому до носія A_{α} стану α додається новий елемент y.

$$ {}_{\dashv}\exists\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{x}_{z_1}(A),\ldots,{}_{\alpha\dashv}R^{x}_{z_m}(A),\Sigma,\ {}_{\alpha\dashv}\exists xA\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\exists xA,\Sigma\ //\ St\ //\ M} $$

Застосовуючи форми ${}_{\dashv}\exists$, вважаємо, що $\{z_1,\ldots,z_m\}$ – це множина усіх імен множини доступних формул секвенції ${}_{\alpha\dashv}\exists xA,\Sigma$ та її наступників.

Наведемо тепер секвенційні форми для модальних операторів. Розглядаємо випадок загальних ТМЛ із базовим модальним оператором

$\Box$. Секвенційні форми ${}_{\vdash}\Box$ та ${}_{\dashv}\Box$ записуються по-різному залежно від властивостей відношення досяжності $\rhd$ на станах світу подібно відповідним секвенційним формам пропозиційного рівня [2].

Обмежимося для прикладу загальним випадком, коли на $\rhd$ не накладені додаткові умови, та випадком, коли $\rhd$ транзитивне і рефлексивне.

1. *Загальний випадок.* Якщо на $\rhd$ не накладені додаткові умови, то маємо:

$$ {}_{\vdash}\Box \ \frac{{}_{\alpha*\vdash}A,\ {}_{\beta_1\vdash}A,\ \ldots,{}_{\beta_n\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\Box A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}, $$

де ${}_{\alpha*\vdash}A$ – допоміжна специфікована формула, яка конкретизується в даній секвенції через специфіковані формули ${}_{\beta_1\vdash}A$, ..., ${}_{\beta_n\vdash}A$ для всіх наявних в даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_1$, ..., $\alpha\rhd\beta_n$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha\rhd\beta$ до схеми моделі світу M та записуємо специфіковану формулу ${}_{\beta\vdash}A$:

$$ {}_{\dashv}\Box \ \frac{{}_{\beta\dashv}A,\ {}_{\beta\vdash}B_1,\ \ldots,{}_{\beta\vdash}B_m,\ \Sigma\ //\ St'\ //\ M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{{}_{\alpha\dashv}\Box A,\ \Sigma\ //\ M}, $$

де β – новий стан світу, $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що діють в допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*\vdash}B_i$, породжених формулами ${}_{\alpha\vdash}\Box B_i$ (якщо Σ містить такі формули). Останнє означає, що за появи нового стану β, досяжного із α, для допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*\vdash}B_i$ треба записати нові специфіковані формули ${}_{\beta\vdash}B_i$. До схеми моделі світу M додаємо $\alpha\rhd\beta$, для введеного нового стану β задаємо $A_\beta = A_\alpha$.

2. *Відношення $\rhd$ транзитивне та рефлексивне.* У цьому випадку маємо:

$$ {}_{\vdash}\Box \ \frac{{}_{\alpha*\vdash}A,{}_{\alpha\vdash}A,{}_{\beta_1\vdash}A,\ldots,{}_{\beta_n\vdash}A,{}_{\beta_1\vdash}\Box A,\ldots,{}_{\beta_n\vdash}\Box A,\Sigma//St//M}{{}_{\alpha\vdash}\Box A,\Sigma//St//M}. $$

Допоміжна специфікована формула ${}_{\alpha*\vdash}A$ конкретизується через специфіковані формули ${}_{\beta_1\vdash}A$, ..., ${}_{\beta_n\vdash}A$ та ${}_{\beta_1\vdash}\Box A$, ..., ${}_{\beta_n\vdash}\Box A$ для всіх наявних в даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_1$, ..., $\alpha\rhd\beta_n$. Специфіковані формули ${}_{\beta_1\vdash}\Box A$, ..., ${}_{\beta_n\vdash}\Box A$ тут потрібні для транзитивності відношення $\rhd$. Згідно з рефлективністю відношення $\rhd$ явно виділяємо ${}_{\alpha\vdash}A$.

$$ {}_{\dashv}\Box \ \frac{{}_{\beta\dashv}A,{}_{\beta\vdash}B_1,\ldots,{}_{\beta\vdash}B_m,{}_{\beta\vdash}\Box B_1,\ldots,{}_{\beta\vdash}\Box B_m,\Sigma//St'//\ M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{{}_{\alpha\dashv}\Box A,\Sigma//St//M}. $$

Тут β – новий стан світу, $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що фігурують в допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*\vdash}B_i$, породжених формулами ${}_{\alpha\vdash}\Box B_i$ (якщо Σ містить такі формули). Специфіковані формули ${}_{\beta\vdash}\Box B_i$ необхідні для транзитивності відношення $\rhd$. До схеми моделі світу M додаємо $\alpha\rhd\beta$, для введеного нового стану β задаємо $A_\beta = A_\alpha$.

Зауважимо, що вводячи новий стан β такий, що $\alpha\rhd\beta$, задаємо $A_\beta = A_\alpha$. Проте нові елементи даних стану можуть з'являтися (наприклад, завдяки формам ${}_{\vdash}\exists$) як в A_α, так і в A_β, тому надалі можливе що $A_\alpha \subset A_\beta$, що $A_\beta \subset A_\alpha$.

Процедура побудови секвенційного дерева в основному аналогічна відповідній процедурі для секвенційних числень КНЛ [6], але побудова дерева ведеться водночас із побудовою схеми моделей світу. При цьому схема моделей світу оновлюється з використанням ${}_{\dashv}\Box$-форми, яка додає нові стани. Така побудова розбита на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Спочатку виконуємо ${}_{\dashv}\Box$-форми, які додають нові стани. Потім виконуємо всі ${}_{\vdash}\exists$-форми, після цього – всі $\mathbf{R}\exists\exists$-форми, далі – усі інші секвенційні форми.

Враховуючи наведені властивості відношення $|\!=$, дістаємо:

Теорема 1. 1) *Нехай* $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ St'//\ M'}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\ //\ St\ //\ M}$ – *секвенційна форма. Тоді якщо* $\mathbf{\Lambda} |\!= \mathbf{K}$, *то* $\mathbf{\Gamma} |\!= \Delta$;

2) *нехай* $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ St\ //\ M \quad {}_{\vdash}\mathrm{X}_{\dashv}\mathrm{Z}\ //\ St\ //\ M}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta\ //\ St\ //\ M}$ – *секвенційна форма. Тоді якщо* $\mathbf{\Lambda} |\!= \mathbf{K}$ *та* $\mathrm{X} |\!= \mathbf{Z}$, *то* $\mathbf{\Gamma} |\!= \Delta$.

3. Коректність і повнота секвенційних числень загальних ТМЛ та темпоральних КНМЛ номінативних рівнів

Теорема коректності для секвенційних числень КНМЛ реномінативного та кванторного рівнів формулюється так, як і для пропозиційних секвенційних числень КНМЛ.

Теорема 2. *Нехай секвенція* ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ *вивідна. Тоді* $\mathbf{\Gamma} |\!= \Delta$.

Доведення аналогічне доведенню відповідної теореми пропозиційних секвенційних числень КНМЛ [2]. Воно проводиться індукцією за побудовою замкненого секвенційного дерева для секвенції ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$.

Для доведення повноти реномінативних та кванторних секвенційних числень використаємо метод систем модельних множин.

Система модельних множин – це пара $(\Omega, \boldsymbol{R})$, де $\Omega = \{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}$.

Множина $\boldsymbol{H}_\alpha$ специфікованих формул із $W_\alpha = nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$ – *модельна множина стану* α, якщо виконуються такі умови:

1) Для кожної примітивної формули Φ (атомарної чи вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$, де $\{\bar{v}\}\cap\mu(p)=\varnothing$ та усунуті тотожні перейменування) лише одна з формул ${}_{\alpha\vdash}\Phi$ чи ${}_{\alpha\dashv}\Phi$ може належати до $\boldsymbol{H}_\alpha$.

2) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

3) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

4) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$;
якщо ${}_{\alpha\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

5) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ або ${}_{\alpha\vdash}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$;
якщо ${}_{\alpha\dashv}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та ${}_{\alpha\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

6) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

7) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

8) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee$ $\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

9) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

10) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\vdash}\exists y\,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\dashv}\exists y\,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

11) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\vdash}\exists z\,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_z^y(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\dashv}\exists z\,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_z^y(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

Тут z тотально неістотне та $z\notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi))$.

12) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то існує $y\in W_\alpha$ таке, що ${}_{\alpha\vdash}R_y^x(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то для всіх $y\in W_\alpha$ маємо ${}_{\alpha\dashv}R_y^x(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

У випадку загальних транзиційних КНМЛ додаємо:

13) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх станів $\beta\in\boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha\rhd\beta$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого стану $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd\beta$.

У випадку темпоральних КНМЛ додаємо:

$13_\uparrow$) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\Box_\uparrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх станів $\beta\in\boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha\rhd\beta$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}\Box_\uparrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого стану $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd\beta$.

$13_\downarrow$) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\Box_\downarrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх станів $\beta\in\boldsymbol{S}$ таких, що $\beta\rhd\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}\Box_\downarrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого стану $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\beta\rhd\alpha$.

Процедура побудови секвенційного дерева може завершуватися або не завершуватися.

Якщо процедура завершена позитивно, то маємо замкнене дерево. Якщо процедура завершена негативно або не завершується, то маємо скінченне чи нескінченне незамкнене дерево. Тоді в дереві існує скінченний або нескінченний незамкнений шлях. Кожна з формул початкової секвенції зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Теорема 3. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях в секвенційному дереві,* $\boldsymbol{H}_\alpha$ *– множина всіх специфікованих* ${}_{\alpha\vdash}$ *чи* ${}_{\alpha\dashv}$ *формул секвенцій цього шляху, де* $\alpha\in\boldsymbol{S}$, *M – схема моделі світу. Тоді* $\mathbf{H}_M=(\{\boldsymbol{H}_\alpha\,|\,\alpha\in\boldsymbol{S}\},M)$ *– система модельних множин.*

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм. Переходи згідно з такими формами точно відповідають пунктам визначення системи модельних множин. Допоміжні специфіковані формули (їхній префікс містить ∗) для модельних множин не беремо до уваги. Кожна непримітивна формула на шляху $\wp$ рано чи пізно буде розкладена відповідно до секвенційної форми. Всі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому виконується пункт 1 визначення системи модельних множин.

Теорема 4. *Нехай* $\mathbf{H}_M$ *– система модельних множин, нехай* $W=nm(\mathbf{H}_M)$. *Тоді існують ТМС* $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R},A,\boldsymbol{I})$ *з* $|A|=|W|$ *та ін'єктивна* $\delta\in{}^VA$ *з* $im(\delta)=W$ *такі:*

1) *з умови* ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ *випливає* $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=T$;

2) *з умови* ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ *випливає* $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Доводимо для випадку загальних ТМЛ кванторного рівня. Для темпоральних КНМЛ доведення аналогічне. Для логік реномінативного рівня опускаємо пункти, пов'язані з кванторами. Доведення ведемо індукцією за складністю формули згідно з побудовою системи модельних множин.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A|=|W|$, та деяку ін'єктивну $\delta\in{}^VA$ з $im(\delta)=W$. Така δ є бієкцією W на A. Позначивши $W_\alpha=nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$, маємо $A_\alpha=\delta(W_\alpha)$. Тоді $\delta_\alpha=\delta\cap{}^WA_\alpha$ є бієкцією W_α на A_α. Множини A та A_α продубльовують множини предметних імен W та W_α.

Спочатку задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Якщо ${}_{\alpha\vdash}p\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $p_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Якщо ${}_{\alpha\dashv}p\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $p_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то візьмемо $p_\alpha(\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta_\alpha))=T$.

Якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то візьмемо $p_\alpha(\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta_\alpha))=F$.

В усіх інших випадках $d\in A_\alpha^{W_\alpha}$ значення $p_\alpha(d)$ задаємо довільним чином, враховуючи еквітонність таке обмеження стосовно неістотності імен: для всіх $d,h\in A_\alpha^{W_\alpha}$ таких, що $d\|\text{-}\mu(p)=h\|\text{-}\mu(p)$, необхідно $p_\alpha(d)=p_\alpha(h)$.

Задані таким чином значення базових предикатів продовжимо за еквітонністю, враховуючи умови неістотності імен, на відповідні $h\in{}^WA_\alpha$.

Зрозуміло, що значення базових предикатів задані однозначно, причому враховано неістотність для p_α імен $y\in\mu(p)$. Отже, значення базових предикатів визначені коректно.

Для елементарних формул (вигляду $R_{\bar x}^{\bar v}(p)$ чи атомарних) твердження 1) та 2) теореми випливають з наведеного вище визначення значень базових предикатів. При цьому предикати вигляду p_α та $(R_{\bar x}^{\bar v}(p))_\alpha$ еквітонні та тотальні на відповідних $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Доводимо крок індукції для тверджень 1) та 2).

Нехай ${}_{\alpha\vdash}R_{z,\bar x}^{y,\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(R_{z,\bar x}^{y,\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}R_{z,\bar x}^{y,\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(R_{z,\bar x}^{y,\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}R_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(R_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}R_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(R_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(\neg\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(\neg\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}$ або ${}_{\alpha\vdash}\Psi\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=T$ або $\Psi_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(\Phi\vee\Psi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та ${}_{\alpha\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=F$ та $\Psi_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(\Phi\vee\Psi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(R_{\bar y}^{\bar w}(\Phi))\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}\circ_{\bar y}^{\bar w}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_{\bar x}^{\bar v}\circ_{\bar y}^{\bar w}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, тому $(R_{\bar x}^{\bar v}(R_{\bar y}^{\bar w}(\Phi)))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(R_{\bar y}^{\bar w}(\Phi))\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}\circ_{\bar y}^{\bar w}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_{\bar x}^{\bar v}\circ_{\bar y}^{\bar w}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, тому $(R_{\bar x}^{\bar v}(R_{\bar y}^{\bar w}(\Phi)))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\vdash}\neg R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\neg R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(R_{\bar x}^{\bar v}(\neg\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\dashv}\neg R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\neg R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(R_{\bar x}^{\bar v}(\neg\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\vee R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\vee R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, тому $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi\vee\Psi))_\alpha(\delta_\alpha)==T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\vee R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\vee R_{\bar x}^{\bar v}(\Psi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, тому $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi\vee\Psi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\Box\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді ${}_{\alpha\vdash}\Box R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\Box R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Box\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\Box\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді ${}_{\alpha\dashv}\Box R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\Box R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(R_{\bar x}^{\bar v}(\Box\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\notin\{\bar v,\bar x\}$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді ${}_{\alpha\vdash}\exists y R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\exists y R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\notin\{\bar v,\bar x\}$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді ${}_{\alpha\dashv}\exists y R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(\exists y R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\{\bar v,\bar x\}$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді ${}_{\alpha\vdash}\exists z R_{\bar x}^{\bar v}\circ_z^y(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції маємо $(\exists z R_{\bar x}^{\bar v}\circ_z^y(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$, звідки $(R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\{\bar v,\bar x\}$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді ${}_{\alpha\dashv}\exists z R_{\bar x}^{\bar v}\circ_z^y(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції маємо $(\exists z R_{\bar x}^{\bar v}\circ_z^y(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$, звідки $(R_{\bar x}^{\bar v}(\exists y\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді існує $y\in W_\alpha$ таке, що ${}_{\alpha\vdash}R_y^x(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_y^x(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=T$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta_\alpha\nabla x\mapsto\delta_\alpha(y))=T$. Але $\delta_\alpha(y)\downarrow$ згідно з $\delta_\alpha\in{}^W\!A_\alpha$ та $y\in W_\alpha$, тому для $a=\delta_\alpha(y)$ маємо $\Phi_\alpha(\delta_\alpha\nabla x\mapsto a)=T$, звідки $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ ${}_{\alpha\dashv}R_y^x(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ для всіх $y\in W_\alpha$. За припущенням індукції $(R_y^x(\Phi))_\alpha(\delta_\alpha)=F$ для всіх $y\in W_\alpha$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta_\alpha\nabla x\mapsto\delta_\alpha(y))=F$ для всіх $y\in W_\alpha$. Згідно з $\delta_\alpha\in{}^W\!A_\alpha$ маємо $\delta_\alpha(y)\downarrow$ для всіх $y\in W_\alpha$. Позаяк δ_α є бієкцією $W_\alpha\to A_\alpha$, кожне $b\in A_\alpha$ має вигляд $b=\delta_\alpha(y)$ для деякого $y\in W_\alpha$. Отже, $\Phi_\alpha(\delta_\alpha\nabla x\mapsto b)=F$ для всіх $b\in A_\alpha$, звідки $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Із побудови $\mathbf{H}_M$ випливає: якщо предикат (предикати), який є значенням простішої формули (права частина відповідних пунктів визначення $\boldsymbol{H}_\alpha$), еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$, то предикат, який є значенням формули, утвореної відповідною композицією (ліва частина пунктів визначення $\boldsymbol{H}_\alpha$), теж еквітонний та тотальний на

$A_{\alpha}^{W_\alpha}$. Це гарантує еквітонність усіх предикатів Φ_α, якщо такими є базові предикати на станах. Справді, неважко довести, що модальна композиція $\Box$ зберігає еквітонність лише в ослабленому розумінні, яку назвемо слабкою еквітонністю: предикат Q на D *слабко еквітонний*, якщо для довільних $d, d'\in D$ таких, що $d\subseteq d'$, із умов $Q(d)\downarrow$ та $Q(d')\downarrow$ випливає $Q(d) = Q(d')$. Проте при зазначеній тотальності предикатів Φ_α їх слабка еквітонність стає еквітонністю.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого стану β такого, що $\alpha\rhd\beta$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta_\beta)=F$, причому Φ_β еквітонний та тотальний на $A_\beta^{W_\beta}$. Під час побудови секвенційного дерева стан β вводиться застосуванням форми ${}_{\dashv}\Box$ до формули $\Box\Phi$ в стані α, на цей момент «поточні» значення $W_{0\alpha}$ та $W_{0\beta}$ множин W_α та W_β рівні, а в подальшому вони можуть тільки розширюватися. Звідси для $\delta_{0\alpha}= =\delta\cap A_{0\beta}^{W_{0\beta}}$ та $\delta_{0\beta}=\delta\cap A_{0\alpha}^{W_{0\alpha}}$ маємо $\delta_{0\alpha}=\delta_{0\beta}$. Але $\delta_{0\beta}\subseteq\delta_\beta=\delta\cap A_\beta^{W_\beta}$, $\delta_{0\alpha}\subseteq\delta_\alpha=\delta\cap A_\alpha^{W_\alpha}$, тому прийняте на рівних $\delta_{0\alpha}$ та $\delta_{0\beta}$ значення предикату Φ_β не зміниться на δ_α та на δ_β. Отже, якщо $\Phi_\beta(\delta_\beta)=F$, то $\Phi_\beta(\delta_\beta)=F$. Звідси $(\Box\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$, причому $(\Box\Phi)_\alpha$ еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх β таких, що $\alpha\rhd\beta$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta_\beta)=T$ для всіх β таких, що $\alpha\rhd\beta$, причому такі Φ_β еквітонні та тотальні на $A_\beta^{W_\beta}$. Аналогічно попередньому випадку переконуємось, що $\Phi_\beta(\delta_\alpha)=T$ для всіх β таких, що $\alpha\rhd\beta$. Отже, $(\Box\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$, причому $(\Box\Phi)_\alpha$ еквітонний та тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Для випадку темпоральних КНМЛ замість останніх двох випадків маємо:

Нехай ${}_{\alpha\vdash}\Box_\uparrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх станів β таких, що $\alpha\rhd\beta$. Звідси аналогічно випадку загальних ТМЛ отримуємо $(\Box_\uparrow\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}\Box_\uparrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого β такого, що $\alpha\rhd\beta$. Аналогічно випадку загальних транзиційних КНМЛ отримуємо $(\Box_\uparrow\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Нехай ${}_{\alpha\vdash}\Box_\downarrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\beta\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх станів β таких, що $\beta\rhd\alpha$. Аналогічно випадку загальних ТМЛ отримуємо $(\Box_\downarrow\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=T$.

Нехай ${}_{\alpha\dashv}\Box_\downarrow\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ маємо ${}_{\beta\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого β такого, що $\beta\rhd\alpha$. Аналогічно випадку загальних ТМЛ отримуємо $(\Box_\downarrow\Phi)_\alpha(\delta_\alpha)=F$.

Теорема 4 доведена. Звідси отримуємо теорему повноти секвенційних числень загальних ТМЛ та темпоральних КНМЛ реномінативного та кванторного рівнів.

Теорема 5. *Нехай* $\mathbf{\Gamma}|\!=\Delta$. *Тоді секвенція* ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ *вивідна.*

Припустимо супротивне: $\mathbf{\Gamma}|\!=\Delta$ (тобто $\mathbf{\Gamma}|\!=_M\Delta$ для кожної узгодженої КНМС $\boldsymbol{M}$) і ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma={}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Згідно з теоремою 3 $\mathbf{H}_M=(\{\boldsymbol{H}_\alpha\,|\,\alpha\in\boldsymbol{S}\}, M)$ – система модельних множин (тут $\boldsymbol{H}_\alpha$ – множина всіх специфікованих ${}_{\alpha\vdash}$ чи ${}_{\alpha\dashv}$ формул секвенцій цього шляху, де $\alpha\in\boldsymbol{S}$, M – схема моделі світу). Згідно з теоремою 4 існують *ТМС* $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, \boldsymbol{I})$ та $\delta\in{}^{V}\!A$ такі: з умови ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ випливає $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=T$ та з умови ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ випливає $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=F$. Зокрема, це підтверджується для формул секвенції ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$. Тому для всіх $\Phi^\alpha\in\mathbf{\Gamma}$ маємо $\Phi_\alpha(\delta_\alpha)=T$ та для всіх $\Psi^\beta\in\Delta$ маємо $\Psi_\beta(\delta_\beta)=F$. Це заперечує $\mathbf{\Gamma}|\!=_M\Delta$. Отже, припущення про невивідність ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ не підтверджується, що й доводить теорему.

Зазначимо приклади побудови секвенційних дерев.

Приклад 1. Секвенційне дерево для формули Баркан $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$:

$$
\begin{array}{c}
{}_{0\dashv}\forall x\Box\mathrm{A}\to\Box\forall x\mathrm{A}\ //\ 0\{a\}\ //\ 0\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\forall x\Box\mathrm{A},\ {}_{0\dashv}\Box\forall x\mathrm{A}\ //\ 0\{a\}\ //\ 0\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\forall x\Box\mathrm{A},\ {}_{1\dashv}\forall x\mathrm{A}\ //\ 0\{a\},\ 1\{a\}\ //\ 0\rhd 1\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\forall x\Box\mathrm{A},\ {}_{1\dashv}R_y^x\mathrm{A}\ //\ 0\{a\},\ 1\{a, b\}\ //\ 0\rhd 1\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\forall x\Box\mathrm{A},\ {}_{0\vdash}R_y^x\Box\mathrm{A},\ {}_{1\dashv}R_y^x\mathrm{A}\ //\ 0\{a\},\ 1\{a, b\}\ //\ 0\rhd 1\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\forall x\Box\mathrm{A},\ {}_{0\vdash}\Box\mathrm{A},\ {}_{1\dashv}R_y^x\mathrm{A}\ //\ 0\{a\},\ 1\{a, b\}\ //\ 0\rhd 1\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\forall x\Box\mathrm{A},\ {}_{0^*\vdash}\mathrm{A},\ {}_{1\vdash}\mathrm{A},\ {}_{1\dashv}R_y^x\mathrm{A}\ //\ 0\{a\},\ 1\{a, b\}\ //\ 0\rhd 1\ .
\end{array}
$$

Отримали незамкнене секвенційне дерево, яке дає змогу вказати контрмодель $\boldsymbol{M}$ таку, що $\boldsymbol{M}\,|\!\neq\forall x\Box\mathrm{A}\to\forall x\Box\mathrm{A}$. Маємо $\delta=[x\mapsto a, y\mapsto b]$. $\delta_0=[x\mapsto a]$, $\delta_1=[x\mapsto a, y\mapsto b]$. Тепер задаємо $\mathrm{A}_1(\delta_1)=\mathrm{A}_1([x\mapsto a, y\mapsto b])=T$, $\mathrm{A}_1(\mathrm{r}_y^x(\delta_1))=\mathrm{A}_1([x\mapsto b, y\mapsto b])=F$, $\mathrm{A}_0(\delta_0)=\mathrm{A}_0([x\mapsto a])$ – довільне. При цьому усі предметні імена, окрім x та y, неістотні для A.

Приклад 2. *Секвенційне дерево для конверсії формули Баркан* $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$.

$$
\begin{array}{c}
{}_{0\dashv}\Box\forall x\mathrm{A}\to\forall x\Box\mathrm{A}\ //\ 0\{a\}\ //\ 0\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\Box\forall x\mathrm{A},\ {}_{0\dashv}\forall x\Box\mathrm{A}\ //\ 0\{a\}\ //\ 0\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\Box\forall x\mathrm{A},\ {}_{0\dashv}R_y^x\Box\mathrm{A}\ //\ 0\{a, b\}\ //\ 0\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\Box\forall x\mathrm{A},\ {}_{0\dashv}\Box R_y^x\mathrm{A}\ //\ 0\{a, b\}\ //\ 0\\
\downarrow\\
{}_{0\vdash}\Box\forall x\mathrm{A},\ {}_{1\dashv}R_y^x\mathrm{A}\ //\ 0\{a, b\},\ 1\{a, b\}\ //\ 0\rhd 1
\end{array}
$$

$$\downarrow$$

$$_{\mathbf{0*}|-}\forall x\mathrm{A},\ _{\mathbf{1}|-}\forall x\mathrm{A},\ _{\mathbf{1}-|}\,R_y^x\,\mathrm{A}\ //\ 0\{a, b\},\ 1\{a, b\}\ //\ 0\rhd 1$$

$$\downarrow$$

$$_{\mathbf{0*}|-}\forall x\mathrm{A},\ _{\mathbf{1}|-}\forall x\mathrm{A},\ _{\mathbf{1}|-}\,R_x^x\,\mathrm{A},\ _{\mathbf{1}|-}\,R_y^x\,\mathrm{A},\ _{\mathbf{1}-|}\,R_y^x\,\mathrm{A}\times$$
$$//\ 0\{a, b\},\ 1\{a, b\}\ //\ 0\rhd 1.$$

Отримали замкнене секвенційне дерево.

Висновки

На основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу до побудови логічних і програмних систем досліджено композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки. Розглянуто властивості відношення логічного наслідку для множин формул транзиційних і темпоральних КНМЛ номінативних рівнів. На основі властивостей цього відношення побудовано секвенційні числення для транзиційних та темпоральних КНМЛ реномінативного і кванторного рівнів. Досліджено властивості пропонованих числень. Для таких числень доведено теореми коректності та повноти.

1. Нікітченко М. С. Основи математичної логіки / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2006. – 246 с.
2. Шкільняк О. С. Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки : семантичні властивості, секвенційні числення / О. С. Шкільняк // Наукові записки НаУКМА. Серія : Комп'ютерні науки. – 2008. – Т. 86. – С. 25–34.
3. Нікітченко М. С. Інтенсіонально-орієнтований підхід до побудови логічних систем / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2007. – № 2. – С. 15–40.
4. Непейвода Н. Н. Прикладная логика / Н. Н. Непейвода. – Новосибирск : НГУ, 2000. – 521 с.

O. Shkilnyak

SEQUENT CALCULI OF COMPOSITION NOMINATIVE MODAL AND TEMPORAL LOGICS

On the basis of the integrated intentional-extensional approach to construction of logical and program systems, composition nominative modal and temporal logics of nominative levels are investigated. Sequent calculi are constructed for such logics and soundness and completeness theorems are proved.

УДК 004.4

Гороховський С. С., Кульчицький Ю. М.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗАСОБІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ НА СКІНЧЕННИХ ОБЛАСТЯХ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Ефективне розв'язання комбінаторних (NP-повних, перебірних) задач було, залишається, і, найімовірніше, залишиться дисципліною, що викликає постійний інтерес теоретиків і практиків комп'ютерних обчислень на наступні десятиліття. Віднедавна набір технік для розв'язання комбінаторних задач отримав значне підсилення – програмування з обмеженнями в скінченних областях. У статті розглянуто основні поняття парадигми програмування з обмеженнями в скінченних областях, а також проведено практичне порівняння інструментальних засобів для розв'язання комбінаторних задач на скінченних областях з обмеженнями на базі популярних сьогодні обчислювальних платформ.

Вступ

Ефективне розв'язання комбінаторних задач було, залишається, і, найімовірніше, залишиться головним викликом теоретиків і практиків комп'ютерних обчислень на наступні десятиліття. Під комбінаторними задачами в цьому кон-