Число форсування в нуль для деяких родин графів

Матвеєва Марія

Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ

Київ, 18 травня 2020

Необхідні визначення

Довільний граф G можна розглядати як метричний простір, визначений на множині вершин $V(G)$ з метрикою d_G.

Означення

Метрика d_G між двома довільними вершинами u та v графа G визначається наступним чином: якщо $u = v$, то $d_G(u, v) = 0$, інакше $d_G(u, v)$ дорівнює довжині найкоротшого шляху між ними.

Необхідні визначення

Означення

Вершина $w \in V$ сильно розділяє дві вершини $u, v \in V$, якщо виконуються наступні рівності:

$$d_G(w, u) = d_G(w, v) + d_G(v, u) \ \text{або} \ d_G(w, v) = d_G(w, u) + d_G(u, v).$$

Множина $S \subset V$ називається сильним метричним генератором для графа G, якщо будь-які дві вершини G сильно розділяються деяким елементом з S. Сильний метричний генератор найменшої потужності називається сильним метричним базисом, а його потужність — сильною метричною розмірністю G.

Необхідні визначення

Означення

Нехай кожна вершина графа G розмальована в деякий колір – чорний або білий, множина S позначатиме початкову множину чорних вершин. Правило заміни кольору перетворює вершину u_2 з білої на чорну, якщо u_2 єдина біла сусідня вершина чорної вершини u_1.

В такому випадку казатимемо, що u_1 форсує u_2, та позначатимемо це $u_1 \to u_2$.

Необхідні визначення

Означення

Множина S називається множиною форсування в нуль графа G, якщо всі вершини графа G перетворяться на чорні за скінченну кількість кроків із застосуванням правила заміни кольору. Число форсування в нуль графа G — це множина S найменшої потужності.

Позначатимемо число форсування в нуль графа G $Z(G)$.

Число форсування в нуль для дерев

Внутрішньою вершиною називатимемо вершину, степінь якої більший або рівний трьом. Кажуть, внутрішня вершина v близька до листка l, якщо не існує іншої внутрішньої вершини, що знаходиться на шляху між v та l. Позначимо символом n_v кількість листків, до котрих внутрішня вершина v є близькою.

Теорема

Нехай T *— дерево. Тоді*

$$Z(G) = \sum_{v \in V(T)} n_v - 1.$$

Число форсування в нуль для дерев

Теорема

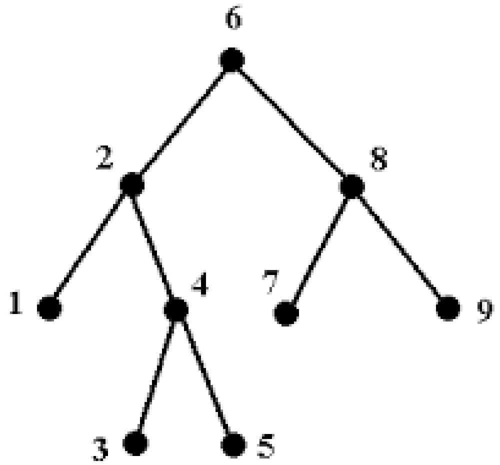
Нехай T *— дерево. Тоді*

$$\mathrm{dim_s T} = \sum_{\mathrm{v} \in \mathrm{V(T)}} \mathrm{n_v} - 1.$$

Наслідок

Нехай T *— дерево. Тоді* $\mathrm{dim_s T} = \mathrm{Z(T)}$.

Число форсування в нуль для дерев



Число форсування в нуль для циклів

Теорема

Нехай G *— граф, що є простим циклом, причому* $|V(G)| = n$. *Тоді*

$$Z(G) = 2.$$

Наслідок

Множина вершин S *простого циклу буде його множиною форсування в нуль тоді і тільки тоді, коли* S *складається з двох суміжних вершин.*

Число форсування в нуль для уніциклічних графів

Теорема

Нехай G *— уніциклічний граф, причому кількість вершин його циклу дорівнює* n*. Позначимо внутрішні вершини* G*, які лежать у циклі, як* v_i*, їх кількість —* b*, а кількість листків близьких до* v_i *—* l_{v_i}*. Тоді виконуються такі твердження:*

Число форсування в нуль для уніциклічних графів

Теорема (Продовження)

1. *якщо* $b \geq 2$, *і дві з них є сусідніми, то*

$$Z(G) = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i}.$$

2. *якщо* $b \geq 2$, *але жодні дві з них не є сусідніми, або якщо* $b = 1$, *то*

$$Z(G) = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} + 1.$$

Число форсування в нуль для уніциклічних графів