

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

Курсова робота на тему:

Діаграма Вороного

Керівник курсової роботи:

кандидат ф.-м. н, с.в

Тимошкевич Л.М.

(прізвище та ініціали)

(підпис)

“_____” _____ 2021 р.

Виконала студентка

3-го року навчання спеціальності

113 “Прикладна математика”

Бородюк Олександра Андріївна

(ПІБ)

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Підтвердження теми курсової роботи.	20.10.2020	
2.	Ознайомлення з темою курсової роботи.	14.01.2021	
3.	Узгодження плану роботи з керівником.	22.01.2021	
4.	Робота з літературою, опис основних означень, властивостей, теорем.	5.02.2021	
5.	Дослідження основних властивостей діаграм Вороного, алгоритму побудови, їх застосування.	19.04.2021	
7.	Робота над оформленням курсової роботи.	05.05.2021	
8.	Попередній аналіз курсової разом з керівником. Наголошення на помилках. Їх виправлення.	12.05.2021	

Зміст

1	Вступ	4
1.1	Актуальність	4
1.2	Мета дослідження	5
2	Діаграма Вороного	6
2.1	Базові поняття	6
2.2	Теореми	7
3	Обчислення діаграм Вороного	12
3.1	Суть алгоритма	13
3.2	Подія точки (point event) та подія круга (circle event)	14
4	Застосування	16
4.1	Спалах холери	16
4.2	Контроль штучного інтелекту	17
5	Практична частина	20
5.1	Задача №1.	20
5.2	Задача №2.	24
6	Висновок	31
7	Список літератури	32

1 Вступ

1.1 Актуальність

Зараз математика використовується майже в усіх природних науках, майже все програмування базується на математичних обчисленнях і математичному мисленні, а також більшість буденних проблеми також вже можна раціонально розв'язати за допомогою "цариці всіх наук".

Наприклад, обчислювальна геометрія виникла з розділу розробки і аналізу алгоритмів наприкінці 70х років. Ця сфера набула доволі великої популярності, з одного боку, дякуючи красі поставлених задач та безпосередньо їхніх розв'язків, а з іншого боку, через високий рівень затребування у різних областях: комп'ютерна графіка, робототехніка і таке інше, де більшість проблем базуються на використанні геометричних алгоритмів. Для свого дослідження я вибрала підрозділ обчислювальної геометрії - Діаграми Вороного.

Діаграма Вороного - це розбиття площини з визначеними на ній множини точок(назвемо ці точки "сайти") на такі ділянки для кожного сайту, що будь-яка точка, що міститься в конкретній ділянці, буде ближча до сайту, ніж до будь-якої іншої точки з визначеної множини.

Вперше ідея діаграми Вороного зустрічається у роботі Декарта з 1644 року. Він запропонував, що Всесвіт ділиться на зони гравітаційного впливу зірок.

Через два століття математик Діріхле описав діаграми для двохвимірною і трьохвимірною простору. Але у 1908 році російський математик українського

походження — Георгій Вороной - описав цю діаграму для багатовимірних просторів. З того часу діаграма згадується під його прізвищем.

У цій курсовій роботі ми зможемо дізнатись, в яких прикладних задачах з'являються діаграми, у яких сферах їх застосування надає найкращі результати, дослідити властивості та структуру діаграм Вороного, алгоритми їх побудови.

1.2 Мета дослідження

Дослідити властивості діаграми Вороного, з'ясувати як працюють алгоритми побудови: алгоритм через проведення серединних перпендикулярів, алгоритм Форчуна; дізнатись сфери застосування.

2 Діаграма Вороного

Нехай на карті нашого міста точками визначені поштові відділення. Ми маємо терміново відправити посилку (причому необхідність відправити терміново посилку може виникнути з будь-якої точки в місті), тому витрата часу на дорогу до поштового відділення має бути мінімальною. (Ми не беремо до уваги затори, нерівні дороги та інші деталі.) Звідси випливає, що нам потрібно дістатися до найближчого відділення. Для цього ми можемо взяти карту, розкреслити її так, щоб кожна ділянка містила тільки одну пошту, а для кожної точки з цієї ділянки найближчим було б саме це відділення. Таким чином, маючи при собі карту, ми завжди можемо знати, до якого відділення ми знаходимось ближче. Така карта і буде по суті діаграмою Вороного.

2.1 Базові поняття

$$\text{dist}(p, q) := \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}.$$

— евклідова відстань між двома точками p і q .

Нехай $P := p_1, p_2, \dots, p_n$ - множина з n різних точок на площині; ці точки називаються "сайтами".

Позначимо **діаграму Вороного** на множині точок P , як поділ площини на n частин, по одній на кожну точку з множини P , користуючись властивістю, що точка q лежить у клітинці, що відповідає сайту p_i тоді і тільки тоді, коли $\text{dist}(q, p_i) < \text{dist}(q, p_j)$ для кожного $p_j \in P, j \neq i$.

$\text{Vor}(P)$ - **діаграма Вороного** визначена на множині точок P .

Означення 1. Клітина $\text{Vor}(P)$, що відповідає сайту p_i позначається $\nu(p_i)$ - це така ділянка діаграми Вороного, що

$$x \in \nu(p_i) \iff \forall p_j \in P, j \neq i : \text{dist}(x, p_i) < \text{dist}(x, p_j).$$

Для двох точок p і q на площині визначимо пряму між p і q як серединний перпендикуляр відрізка $\overline{pq}$. Ця пряма розбиває площину на дві півплощини.

Означення 2. Непівплощина $h(p, q)$ - така напівплощина, що $x \in h(p, q) \iff \text{dist}(x, p) < \text{dist}(x, q)$.

З цього ми отримуємо наступне твердження.

Твердження 1. $\nu(p_i) = \cap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} h(p_i, p_j)$.

Таким чином, $\nu(p_i)$ (клітина Вороного) є перетином $n - 1$ напівплощин і, отже, є опуклою, полігональною областю, яка складається з щонайбільше $n - 1$ вершин та $n - 1$ ребер.

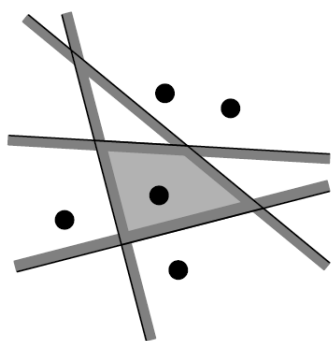


Рис. 1: Клітина Вороного [1]

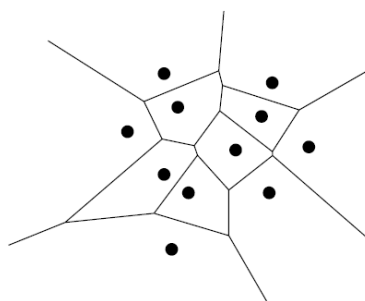


Рис. 2: Діаграма Вороного [1]

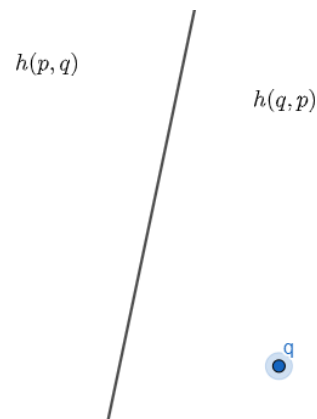


Рис. 3: Напівплощини [1]

2.2 Теорема

Теорема 1. Нехай P — множина з n точок на площині. Якщо всі сайти — колінеарні, то $Vor(P)$ складається з $n - 1$ паралельних прямих. В іншому випадку $Vor(P)$ є зв'язною, а її ребра - або відрізки, або промені.

Доведення.

□

Припустимо, що НЕ всі сайти в P - колінеарні.

Спочатку ми показуємо, що ребра $Vor(P)$ є або відрізками, або променями.

Ми вже знаємо, що ребра $Vor(P)$ є частинами прямих, а саме частинами серединних перпендикулярів між двома сайтами.

Тепер припустимо, що існує суперечність: є ребро e - промінь - $Vor(P)$.

Нехай e знаходиться на межі клітини $\nu(p_i)$ та $\nu(p_j)$.

Нехай $p_k \in P$ - точка, яка не є колінеарною з $p_i p_j$.

Серединний перпендикуляр між p_j і p_k не паралельний e , отже, він перетинає e . Але з іншого боку частина e , що лежить у внутрішній частині $h(p_k, p_j)$, не може знаходитися на межі $\nu(p_j)$, оскільки це ближче до p_k , ніж до $p_j \Rightarrow$ **суперечність**.

Залишилося довести, що $Vor(P)$ - зв'язна.

Якби це було не так, тоді була б клітина Вороного $\nu(p_i)$, що розбиває площину на дві частини. Через те, що клітини Вороного опуклі, $\nu(p_i)$ складалась би з відрізка, обмеженого двома паралельними прямими. Але ми щойно довели, що ребра діаграми Вороного не можуть бути прямими $\Rightarrow$ **суперечність**.

■

Теорема 2. Для $n \leq 3$ - кількість вершин на діаграмі Вороного множини з n точкових ділянок у площині не більше $2n - 5$, а кількість ребер - не більше $3n - 6$.

Доведення.

□

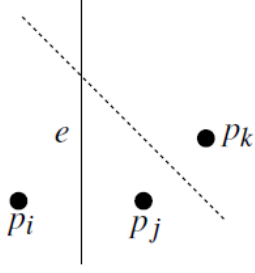


Рис. 4: [1]

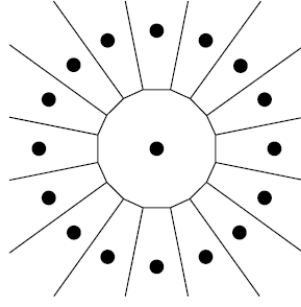


Рис. 5: [1]

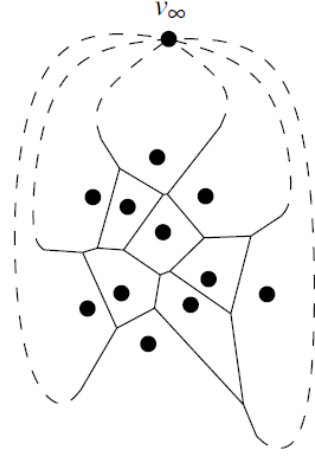


Рис. 6: [1]

Якщо всі сайти — колінеарні, то доведення відразу випливає з **Теорема 1**, тому припустимо, що це не так. Ми доведемо теорему за допомогою формули Ейлера, яка говорить, що для будь-якого зв'язного планарного графа з m_v вершинами, m_e ребрами і m_f гранями існує таке відношення:

$$m_v - m_e + m_f = 2$$

Ми не можемо застосувати формулу Ейлера безпосередньо до $Vor(P)$, оскільки $Vor(P)$ має ребра-промені і, отже, не є належним графом.

Для виправлення ситуації ми додамо одну зайву вершину v_∞ і з'єднаємо всі ребра-промені $Vor(P)$ до цієї вершини. Тепер у нас є зв'язний планарний граф, до якого ми можемо застосувати формулу Ейлера.

Отримуємо наступне співвідношення між n_v , числом вершин $Vor(P)$, n_e , кількістю ребер $Vor(P)$, і n , кількість сайтів:

$$(n_v + 1) - n_e + n = 2$$

Більше того, кожне ребро в доповненому графі має рівно дві вершини, якщо ми підсумуємо степені всіх вершин, ми отримаємо подвоєну кількість ребер.

Через те, що кожна вершина, включаючи v_∞ , має степінь не менше трьох, ми маємо:

$$2n_e \geq 3(n_v + 1)$$

Що разом із **твердженням 1** доводить цю теорему. ■

Означення 3. Коло $C_P(q)$ - порожнє коло з центром в q , для якого

$$\forall p \in P : p \notin C_P(q)$$

Наступна теорема характеризує вершини та ребра діаграми Вороного.

Теорема 3. Для діаграми Вороного $Vor(P)$ множини точок P уснують такі твердження:

(a) Точка q є вершиною $Vor(P)$, тоді і тільки тоді, коли границі найбільш пустого кола $C_P(q)$ містить на своїх границях три або більше центра з P .

(b) Серединний перпендикуляр центрів $p_i p_j$ визначає ребро $Vor(P)$ тоді і тільки тоді, коли на ньому існує така точка q , що границя $C_P(q)$ містить у собі два сайти p_i, p_j і яких більше.

Доведення.

□ (a) Нехай існує така точка q , що границя $C_P(q)$ містить три або більше сайтів. Нехай $\nu(p_i)$, $\nu(p_j)$, $\nu(p_k)$ — три такі центри. Оскільки всередині $C_P(q)$ порожнє, q повинна лежати на границях кожної з клітинок $\nu(p_i)$, $\nu(p_j)$, $\nu(p_k)$, і q повинна бути вершиною $Vor(P)$.

З іншого боку, кожна вершина q діаграми є інцендентною як мінімум з трьома ребрами, і як мінімум трьом клітинкам $\nu(p_i)$, $\nu(p_j)$, $\nu(p_k)$. Вершина q повинна

знаходиться на рівній відстані від p_i, p_j, p_k і не може існувати іншого центру, ще більш близького до q , оскільки в протилежному випадку $\nu(p_i), \nu(p_j), \nu(p_k)$ не зійшлися б в q . Тому всередині круга, на границях якого лежать p_i, p_j, p_k немає жодного центру.

(b) Нехай існує точка q , яка має вказану в теоремі властивість. Оскільки всередині круга $C_P(q)$ не має жодного центру, а центри p_i і p_j лежать на його границях, то $\text{dist}(q, p_i) = \text{dist}(q, p_j) \leq \text{dist}(q, p_k)$ для будь-якого $1 \leq k \leq n$. Звідси слідує, що q лежить на ребрі або є вершиною $\text{Vor}(P)$. Але з першої частини теореми випливає, що q не може бути вершиною $\text{Vor}(P)$. Тому q лежить на ребрі $\text{Vor}(P)$, яке визначається серединним перпендикуляром p_i і p_j .

В іншу сторону, нехай серединний перпендикуляр p_i і p_j визначає ребро діаграми Вороного. На границі найбільшого порожнього круга будь-якої точки q з внутрішньої сторони цього ребра мають бути p_i і p_j і жодного іншого центру.

■

3 Обчислення діаграм Вороного

В минулому розділі ми вивчили будову діаграм Вороного, а тепер ми будемо їх обчислювати. Твердження 7.1 пропонує простий спосіб зробити це: для кожного центру обчислити перетин напівплощин для усіх сайтів скориставшись алгоритмом побудови трикутників. Тоді ми витратимо часу на кожну клітинку Вороного ($n \log(n)$), тобто для обчислення усієї діаграми знадобиться ($n^2 \log(n)$) часу.

Проте можна досягти кращого успіху - обчислити діаграму за ($n \log(n)$), скориставшись алгоритмом Форчуна.

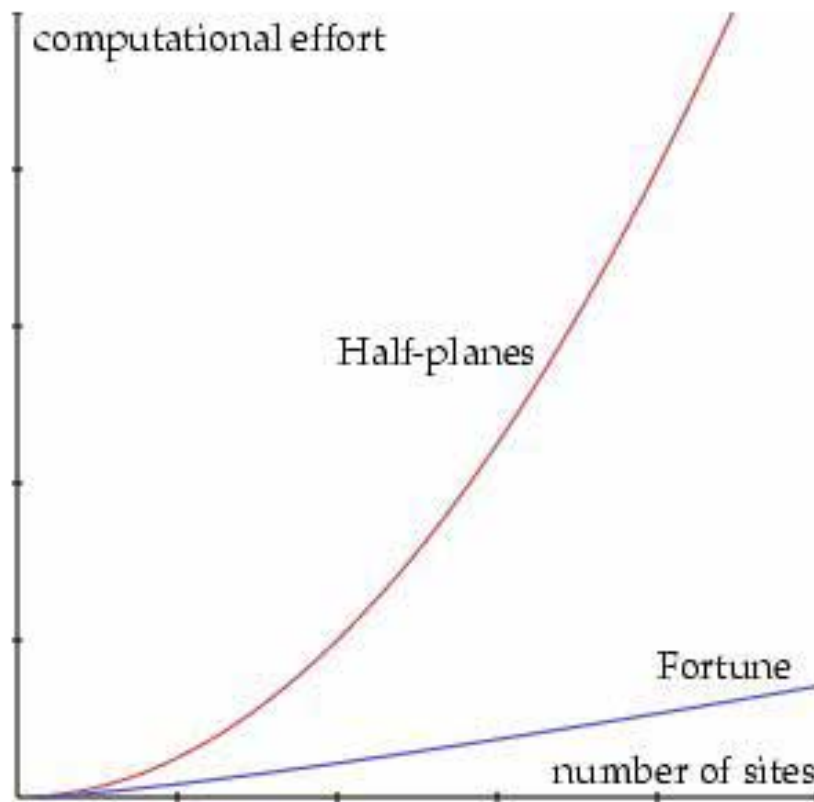


Рис. 7: [1]

3.1 Суть алгоритма

Маємо n сайтів(точок заданих на певній площині), пряму-прибиральника, яка рухається, наприклад, зверху вниз, тобто від сайту з найбільшою ординатою до сайту з найменшою ординатою (від події до події).

Варто знати, що на побудову діаграми Вороного впливають лише ті сайти, які знаходяться "над" або "на" прямій-прибиральнику.

Коли пряма-прибиральник знаходить на наступний сайт, створюється нова парабола, фокусом якої є сайт, через який вона зараз проходить, а директрисою - пряма прибиральник. Цей процес - "подія точки"(point event). Парабола буде змінюватися від положення сайту від прямої.

Сама парабола ділить площину на дві частини: "внутрішня сторона на якій знаходяться точки, що лежать ближче до даного сайту, та "зовнішня сторона де точки ближче до прямої. Точки ж на самій параболі рівновіддалені як до сайту, так і до прямої.

Далі параболи розширюються, у них з'являються break points(контрольні точки) - точки перетину з іншими параболою. Все це утворює берегову лінію. В береговій лінії ми зберігаємо дуги парабол від одного перетину з іншими параболою до наступного. Ми моделюємо рух берегової лінії, тому що як раз "контрольні точки"рухаються точно по ребрам нашої майбутньої клітин Вороного через те, що ці точки рівновіддалені до сайту та до прямої-прибиральника.

В той момент, коли дві контрольні точки(по одній з різних парабол) перети-

наються і утворюють одну - вона стає вершиною діаграми. Цей процес називається "подія круга"(circle event)

3.2 Подія точки (point event) та подія круга (circle event)

При переміщенні прямої-прибиральника ми зустрічаємось з двома типами вирішальних подій - подія точки та подія круга.

Подія точки(рис 8) відбувається при знаходженні прямої-прибиральника на один з сайтів. Коли це відбувається, ми будемо нову параболу та її точки перетину(break points) із вже готовою береговою лінією. Спочатку це одна точка, бо при утворенні параболу від сайту -це лише промінь (рис 9), але при переміщенні прямої-прибиральника вниз парабола розширюється, перетинаючи берегову лінію. вже у двох місцях (рис 10).

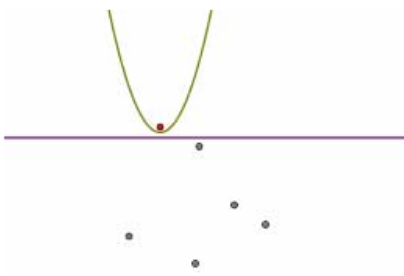


Рис. 8: [4]

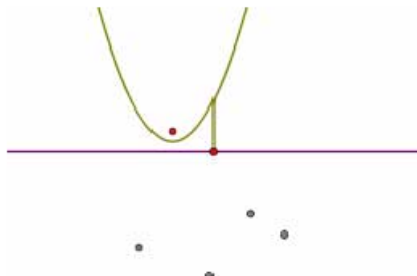


Рис. 9: [4]

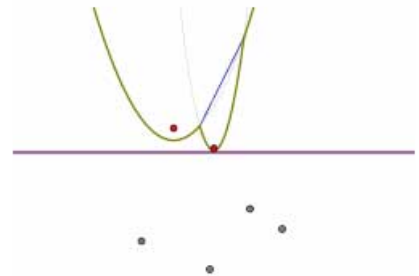


Рис. 10: [4]

Подія круга- створення нової вершини діаграми Вороного. Разом з цим відбувається видалення однієї параболу через те, що ця сама парабола стискається між двома іншими.

Ми можемо умовно показати на площині порожнє коло, на якому будуть лежа-

ти сайти, які є фокусами цих трьох парабол (рис 11). Те саме місце, де права і ліва контрольні точки стикаються та перетинаються в одну (рис 12) - і буде нова вершина діаграми Вороного, а три арки берегової лінії утворяться в дві (рис 13).

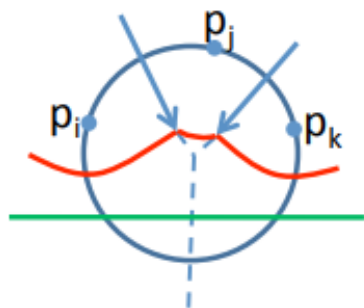


Рис. 11: [5]

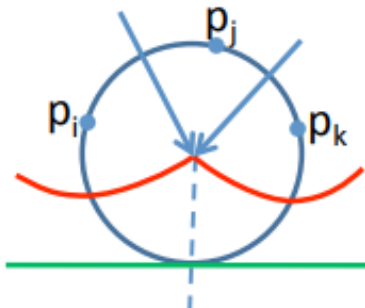


Рис. 12: [5]

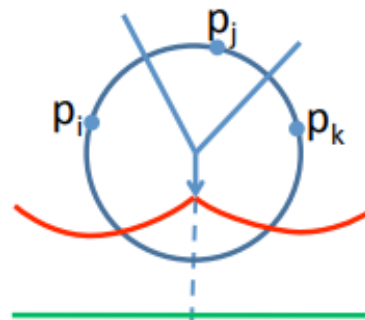


Рис. 13: [5]

4 Застосування

4.1 Спалах холери

У 19 столітті спалахи холери вбили десятки мільйонів людей. До виявлення бактерії, що відповідала за цю хворобу, провина падала на велику кількість людей на квадратний метр, погану дієту та антигігієнічне оточення. Тоді і відбулось одне з перших використання діаграм Вороного доктором Джоном Сноу, який стверджував, що ця хвороба виникає від контакту з інфікованою водою.

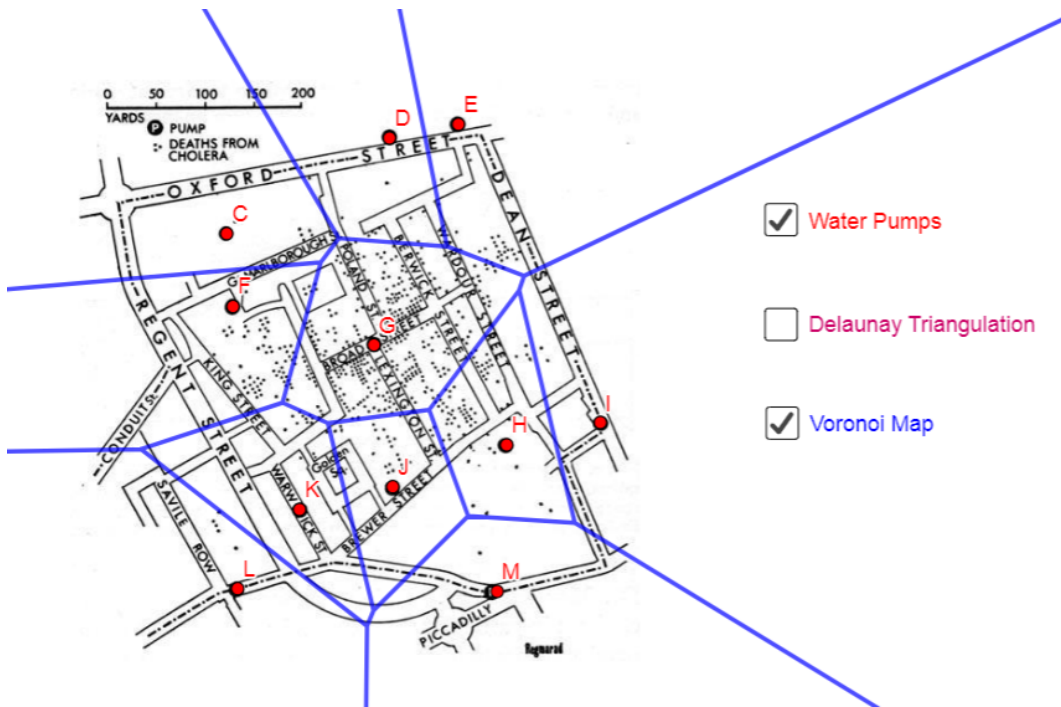


Рис. 14: [8]

Так у 1854 році у Лондоні лише за 5 днів було виявлено 500 загиблих від холери. Доктор Сноу, дослідивши кількість померлих та локації цих нещасних випадків, поділив карту Лондона на частини, в кожній з яких була своя система подачі води, таким чином створивши діаграму Вороного.

Після цього виявилось, що майже усі смерті були в частині, яка знаходилась під постачанням води з насосу на Брод стрит, Сохо. Прибравши ручку з насосу, кількість смертельних випадків була значно зменшена, і епідемія швидко зникла.

Як потім виявилось за словами інженерів, погано збудований водостік постійно отруював воду в насосі.

4.2 Контроль штучного інтелекту

Як змусити штучний інтелект знайти найближчу аптечку, з'ясувати, де більше всього противників, до того ж знайти найкоротший шлях? З цим допоможе впровадження концепту діаграм Вороного у програму.

- *Найближча аптечка:*



Рис. 15: [7]

На малюнку зверху визначена діаграма Вороного, де кожен сайт - місцезнаходження аптечки у всесвіті, де рухається умовний штучний інтелект (будемо скорочено позначати його ШІ). До ШІ надійшла команда - знайти аптечку і скористатись нею або ж він загине. Час обмежений, тобто йому не підходить будь-яка аптечка на карті, а лише найближча до нього. Діаграма Вороного, однак, не дає точний шлях до того чи іншого сайту, проте може дуже швидко надати інформацію про найближчий, знаючи, в якому саме "сусідстві" (клітині Вороного) знаходиться ШІ

Також, маючи знання про ребра діаграми, ШІ може визначити сусідські клітини та потім, якщо з якихось причин аптечка в першій клітині не була знайдена, з'ясувати чи є вона в наступній найближчій частині діаграми на заданій карті.

- **Найбезпечніший шлях:** Нехай замість аптечок у побудованій діаграмі будуть пости ворогів. Тепер задача перед ШІ поставлена так - знайти найбезпечніший шлях між заданими точками А і Б. Найбільш популярний спосіб у розробці ігор для проходження графу - використовувати A^* алгоритм. Оскільки діаграма Вороного - граф, використавши цей алгоритм ШІ зможе винайти найкращий шлях, а трохи планування наперед з цим допоможе.



Рис. 16: [7]



Рис. 17: [7]

Нехай, кожне ребро діаграми буде містити у собі інформацію про відстань від

ребра до "ворожих постів" і додавати все це в один параметр. Вибираючи ребра з найбільшим параметром та користуючись A^* алгоритмом, ШІ може сформувати найнебезпечніший шлях. Таким чином впровадження діаграми Вороного до ШІ може полегшити обчислення деяких базових функцій штучного інтелекту.

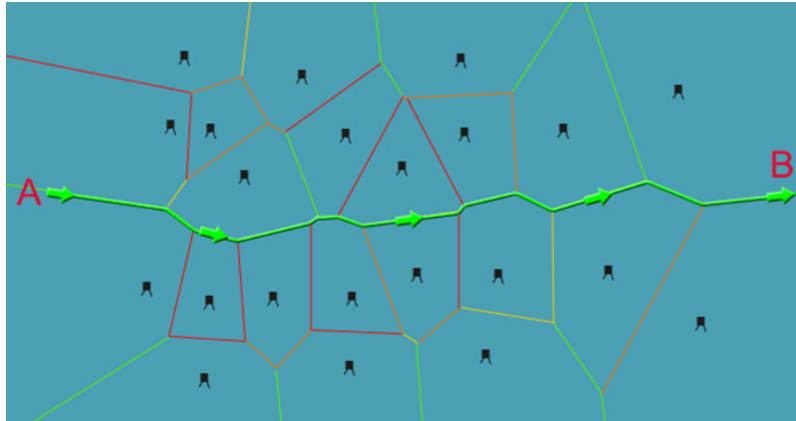


Рис. 18: [7]

5 Практична частина

5.1 Задача №1.

Задано точки множини $P : A(2; 6), B(4; 2), C(7; 1), D(10; 10)$

1. Написати рівняння берегової лінії при проходженні прямої-прибиральника через точку В;
2. Знайти координати вершин діаграми Вороного на множині Р;
3. Описати рівняння ребер, що описують клітину, в якій знаходиться сайт В;
4. Вписати рівняння найбільшого порожнього кола, що містить сайт D;

Розв'язання

1. Оскільки пряма-прибиральник проходить через точку $B(4; 2) \Rightarrow$

$$l_y = 2.$$

$$y = \frac{1}{2(p_{iy} - 2)}((x - p_{ix})^2 + p_{iy}^2 - 4)$$

Парабола β_A :

$$y = \frac{1}{8}((x - 2)^2 + 32)$$

Парабола β_B :

$$y = \frac{1}{16}((x - 10)^2 + 96)$$

Точки перетину парабол β_A та β_B :

$$\frac{1}{8}((x-2)^2 + 32) = \frac{1}{16}((x-10)^2 + 96)$$

$$2(x-2)^2 = (x-10)^2 + 32$$

$$2x^2 - 8x + 8 = x^2 - 20x + 100 + 32$$

$$x^2 + 12x - 124 = 0$$

$$D = 144 + 496 = 640$$

$$x'_{1,2} = -6 \pm 4\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow$$

$$x' = -6 + 4\sqrt{10}$$

Отже, рівняння берегової лінії при проходженні прямої-прибиральника через сайт B матиме вигляд:

$$y = \begin{cases} x \leq -6 + 4\sqrt{10} \Rightarrow \frac{1}{8}((x-2)^2 + 32) \\ x \geq -6 + 4\sqrt{10} \Rightarrow \frac{1}{16}((x-10)^2 + 96) \end{cases}$$

2. Візьмемо два вектори $\overrightarrow{AB}(10-2; 10-6)$ та $\overrightarrow{AB}(4-2; 2-6) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(8; 46)$ та $\overrightarrow{AB}(2; -4)$.

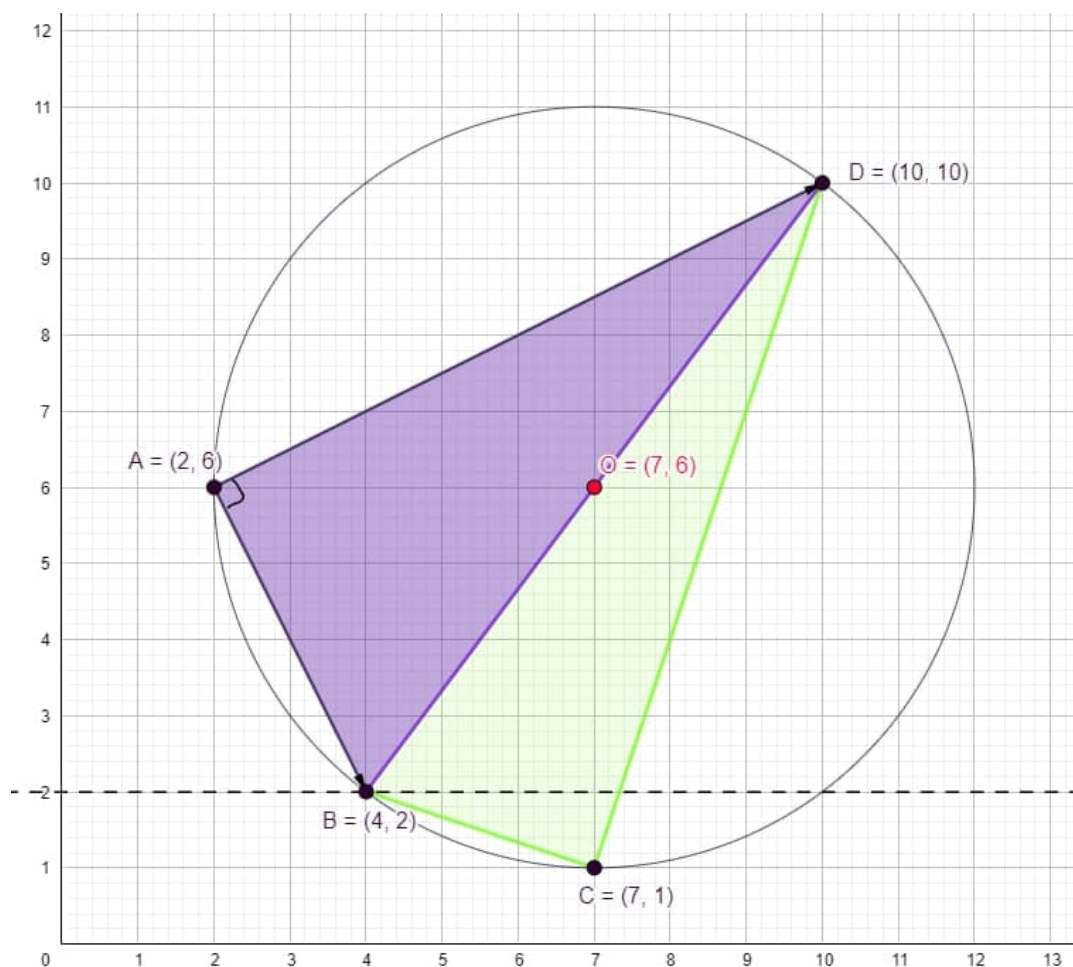
Порахуємо скалярний добуток між цими двома векторами:

$$\langle AD; AB \rangle = 8 * 2 - 4 * 4 = 0 \Rightarrow \triangle ABD - \text{прямокутний трикутник.}$$

Навколо прямокутного трикутника можна описати коло $\Rightarrow$ всі вершини трикутника будуть лежати на цьому колі.

Трикутник ABD вписаний в коло $\Rightarrow Vor(P)$ має лише одну вершину V , яка лежить на центрі $O(7; 6)$ гіпотенузи BD .

$$V : (7, 6)$$



3. Проведемо прямі перпендикулярно відрізкам AD, AB, BC, CD .

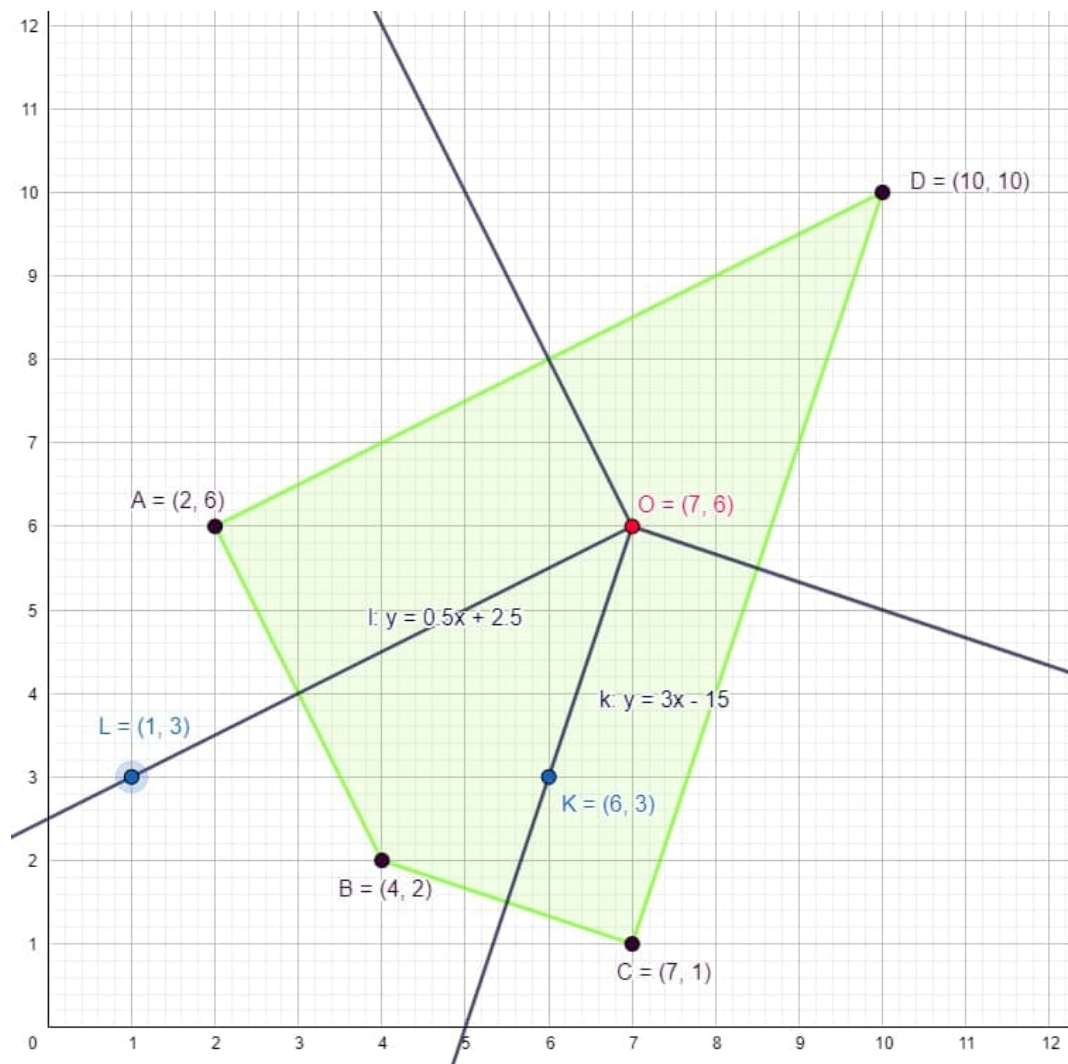
Це будуть ребра нашої діаграми.

Віділимо два промені, які оточують сайт В, та позначимо їх l та k . Позначимо на них точки $L(1; 3)$ та $K(6; 3)$ відповідно.

А тепер знайдемо рівняння цих променів по двом точкам - для l : $V(7; 6), L(1; 3)$ та для k : $V(7; 6), K(6; 3)$

$$\begin{cases} l: \frac{x-7}{6} = \frac{y-6}{3} \Rightarrow y = \frac{x+5}{2} \\ k: \frac{x-7}{1} = \frac{y-6}{3} \Rightarrow y = 3x - 15 \end{cases}$$

Це і будуть рівняння ребер, що оточують клітину, в якій міститься сайт В.



4. Точка - вершина діаграми Вороного $\Leftrightarrow$ найбільше порожнє коло з центром в ній має ≥ 3 точок на своїх границях.

Точка $V(7; 6)$ - вершина $Vor(P) \Rightarrow$ сайт D лежить на колі з центром в V
 Радіус кола - половина гіпотенузи $BD = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow R = 5) \Rightarrow$
 Рівняння кола описаного навколо $ABCD$:

$$(x - 7)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

5.2 Задача №2.

Задано точки множини $P : A(1; 5), B(2; 9), C(10; 3), D(6; 1)$

1. Написати рівняння берегової лінії при проходженні прямої-прибиральника через точку D;
2. Знайти координати вершин діаграми Вороного на множині P;
3. Описати рівняння ребер, що описують клітину, в якій знаходиться сайт A;
4. Вписати рівняння найбільшого порожнього кола, що містить сайт C;

Розв'язання

1. Оскільки пряма-прибиральник проходить через точку $D(6; 1) \Rightarrow$

$$l_y = 1.$$

$$y = \frac{1}{2(p_{iy} - 1)}((x - p_{ix})^2 + p_{iy}^2 - 1)$$

Парабола β_A :

$$y = \frac{1}{8}((x - 1)^2 + 24)$$

Парабола β_B :

$$y = \frac{1}{16}((x - 2)^2 + 80)$$

Парабола β_C :

$$y = \frac{1}{4}((x - 10)^2 + 8)$$

Точки перетину парабол β_A та β_B :

$$\frac{1}{8}((x-1)^2 + 24) = \frac{1}{16}((x-2)^2 + 80)$$

$$2x^2 - 4x + 2 + 48 = x^2 - 4x + 4 + 80$$

$$x^2 = 34 \Rightarrow$$

$$x'_{1,2} = \pm\sqrt{34}$$

Точки перетину парабол β_C та β_B :

$$\frac{1}{4}((x-10)^2 + 8) = \frac{1}{16}((x-2)^2 + 80)$$

$$4x^2 - 80x + 400 + 32 = x^2 - 4x + 4 + 80$$

$$3x^2 - 76x + 348 = 0$$

$$D = 5776 - 3888 = 1600$$

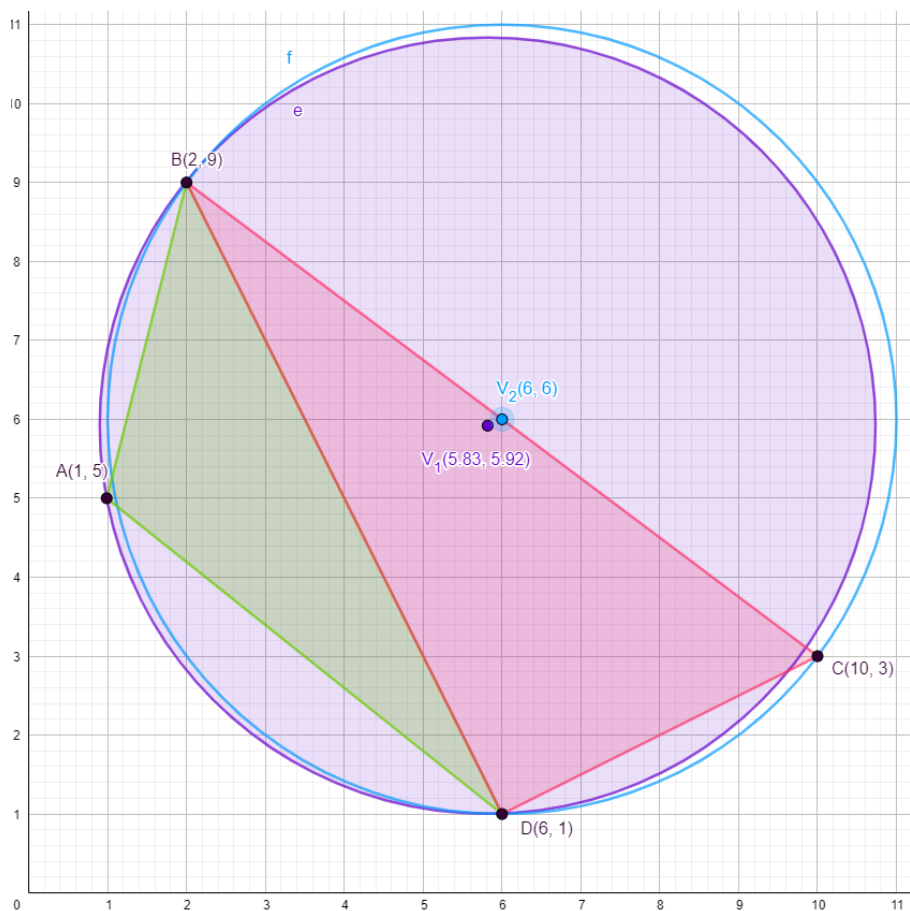
$$x'_{1,2} = \frac{76 \pm 40}{6} \Rightarrow$$

$$x'_1 = \frac{116}{6} = \frac{58}{3}, x'_2 = 6$$

$$y = \begin{cases} x \in (-\sqrt{34}; \sqrt{34}) & \frac{1}{8}((x-1)^2 + 24) \\ x \in (-\infty; -\sqrt{34}] \cup [\sqrt{34}; 6] \cup [\frac{58}{3}; +\infty) & \frac{1}{16}((x-2)^2 + 80) \\ x \in (6; \frac{58}{3}) & \frac{1}{4}((x-10)^2 + 8) \end{cases}$$

2.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & 85 & 1 \\ 10 & 3 & 109 & 1 \\ 6 & 1 & 37 & 1 \end{pmatrix} = -40 < 0 \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ точки $ABCD$ не лежать на одному колі. Отже, триангуляція Делоне:
 $\triangle ABD, \triangle BCD$

$$S = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & a_x & a_y \\ 1 & b_x & b_y \\ 1 & c_x & c_y \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \frac{1}{4S} \det \begin{pmatrix} x_a^2 + y_a^2 & a_y & 1 \\ x_b^2 + y_b^2 & b_y & 1 \\ x_c^2 + y_c^2 & c_y & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_0 = \frac{1}{4S} \det \begin{pmatrix} x_a^2 + y_a^2 & a_x & 1 \\ x_b^2 + y_b^2 & b_x & 1 \\ x_c^2 + y_c^2 & c_x & 1 \end{pmatrix}$$

• $\triangle ABD$:

$$S = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-24) = -12$$

$$x_0 = \frac{1}{-48} \det \begin{pmatrix} 26 & 5 & 1 \\ 85 & 9 & 1 \\ 37 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-280}{-48} = 5,83$$

$$y_0 = \frac{1}{-48} \det \begin{pmatrix} 26 & 1 & 1 \\ 85 & 2 & 1 \\ 37 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-284}{-48} = 5,92$$

$V_1(5,83,5,92)$ - перша вершина діаграми Вороного і центр описаного кола навколо $\triangle ABD$.

• $\triangle BCD$:

$$S = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 10 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-24) = -12$$

$$x_0 = \frac{1}{-80} \det \begin{pmatrix} 85 & 9 & 1 \\ 109 & 3 & 1 \\ 37 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-480}{-80} = 6$$

$$y_0 = \frac{1}{-80} \det \begin{pmatrix} 85 & 2 & 1 \\ 109 & 6 & 1 \\ 37 & 10 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-480}{-80} = 6$$

$V_2(6, 6)$ - друга вершина діаграми Вороного і центр описаного кола навколо $\triangle BCD$.

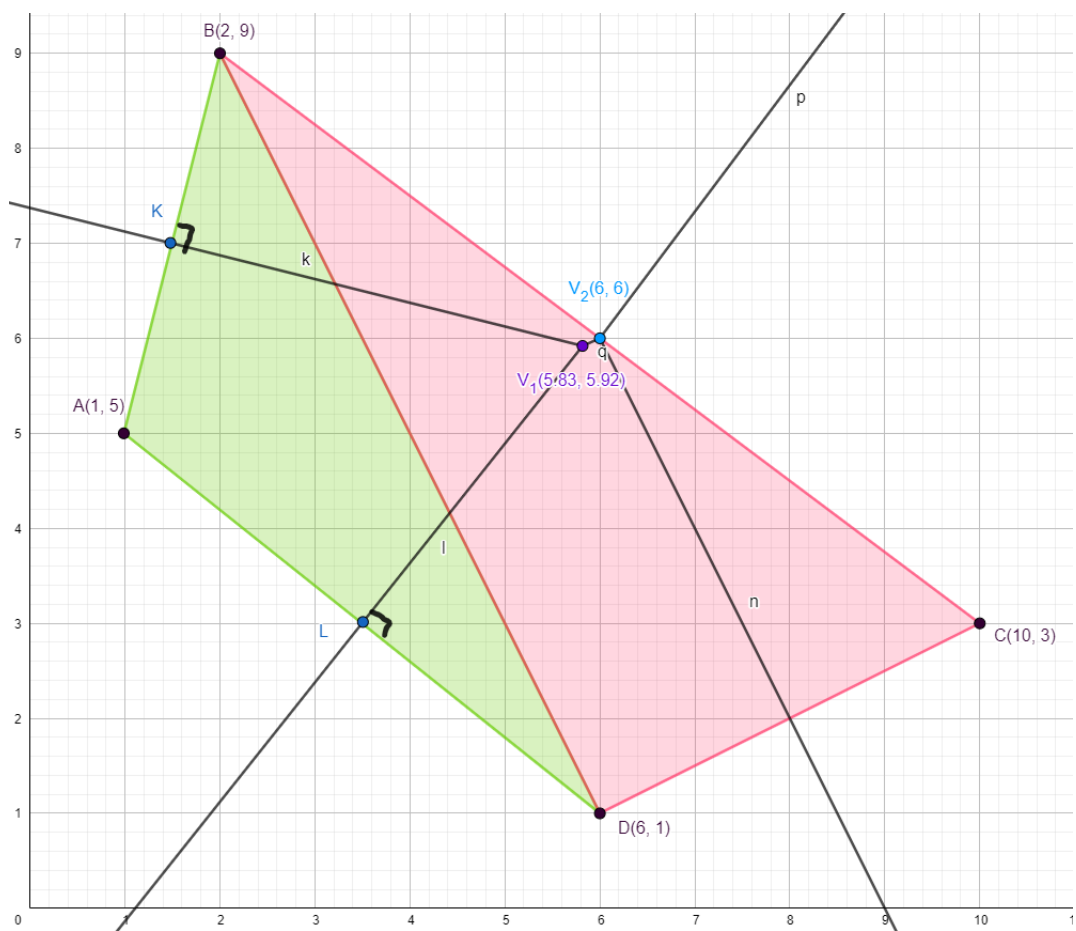
3. Спочатку знайдемо координати середини відрізка AB та AD . • для відрізка AB :

$$K\left(\frac{1+2}{2}; \frac{5+9}{2}\right) \Rightarrow K(1, 5; 7)$$

• для відрізка AD :

$$K\left(\frac{1+6}{2}; \frac{5+1}{2}\right) \Rightarrow L(3, 5; 3)$$

Через те, що ребра нашої діаграми - серединні перпендикуляри, які перетворились на промені з вершин клітин Вороного - ми можемо знайти їх(ребра), використовуючи рівняння прямих за двома точками. Для першого ребра - $K(1, 5; 7)$, $V_1(5, 83, 5, 92)$, а для другого - $L(3, 5; 3)$, $V_1(5, 83, 5, 92)$.



- для відрізка V_1K :

$$\begin{aligned} \frac{x - 5,83}{1,5 - 5,83} &= \frac{y - 5,92}{7 - 5,92} \Rightarrow \\ -\frac{1,08(x - 5)}{4,33} + 5,92 &= y \\ y &= -0,25x + 7,17 \end{aligned}$$

- для відрізка V_1L :

$$\begin{aligned} \frac{x - 5,83}{3,5 - 5,83} &= \frac{y - 5,92}{3 - 5,92} \Rightarrow \\ \frac{2,92(x - 5)}{2,33} + 5,92 &= y \\ y &= 1,25x - 0,33 \end{aligned}$$

4. Радіус кола, описаного навколо $\triangle BCD$:

$$|CV_2| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Найбільше порожнє коло, що містить точку C - коло з центром у $V_2(6;6)$, описане навколо $\triangle BCD$:

$$(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

6 Висновок

В 2 розділі своєї курсової роботи я розглянула базові поняття діаграм Вороного (2.1), теорем та їх доведення (2.2).

У розділі 3 було досліджено алгоритм Форчуна, а точніше пояснено його суть та пріоритет у використанні над іншими алгоритмами. Також було досліджено контрольні події цього алгоритму, які вирішують подальше обчислення клітин Вороного та діаграми в цілому (3.2).

Дізналась, в яких більш прикладних задачах використовувались і використовуються зараз діаграми Вороного. Так у розділі 4 я згадала про епідемію Холери і про те, як можна покращити роботу штучного інтелекту, лише застосувавши базові поняття підрозділу обчислювальної геометрії.

У розділі 5 використала набуті знання за період дослідження теми своєї курсової, вирішивши задачі.

7 Список літератури

1. de Berg, M., Cheong, O., van Kreveld, M., Overmars, M. "Computational Geometry: Algorithms and Applications".
2. <https://ppt-online.org/305646>.
3. Хабр: Діаграма Вороного і її застосування.
4. <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-voronoi>.
5. <https://www2.cs.sfu.ca/~binay/813.2011/Fortune.pdf>.
6. Cholera example.
7. Game development example.
8. <https://www.geogebra.org/m/deqcfxzp>.
9. Рисунки до задач зроблені на: <https://www.geogebra.org/?lang=uk>