Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: «**Підсумовування розбіжних рядів**»

Виконала: студентка 3-го року навчання,
освітньої програми «Прикладна математика»,
спеціальності 113 Прикладна математика

Толокнова Варвара Вячеслвівна

Керівник: Митник Ю.В.,
Кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент_____________________
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена з оцінкою______________________

Секретар ЕК____________________
«___»____________________20__ р.

Київ – 2022

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1	Підтвердження теми курсової роботи.	23.10.2021	
2	Ознайомлення з темою курсової роботи.	22.12.2021	
3	Узгодження плану роботи з керівником.	14.01.2022	
4	Робота з літературою, опис основних означень, властивостей, теорем.	15.03.2022	
5	Дослідження методів підсумовування розбіжних рядів, їх застосування.	30.03.2022	
6	Робота над оформленням курсової роботи.	12.04.2022	
7	Попередній аналіз курсової разом з керівником. Наголошення на помилках. Їх виправлення.	15.05.2022	
8	Завершення написання курсової роботи	31.05.2022	

Зміст

ВСТУП

Наука не стоїть на місці, і це - факт. В часи античності, математики, що притримувались піфагорійської ідеології, відкидали будь-які поняття нескінченності. Проте вже тоді, деякі видатні науковці в своїх дослідженнях наближались до цього поняття й використовували нескінченні ряди. Так, наприклад, Архімед в своїй праці для знаходження площі сегмента, можна сказати, знайшов суму нескінченної геометричної прогресії.

Історично, наступний вагомий крок в сфері рядів європейські математики зробили в 1666 році, коли Ісак Ньютон відкрив розклад тригонометричних функцій sin(x), cos(x) у формі нескінченних рядів. Проте, як виявилось пізніше, Керальська школа астрономії й математики в Індії, ще в XV – XVI століттях активно користувалась розкладом даних функцій в астрономії.

Впродовж наступних століть низка видатних математиків почала активно досліджувати теорію рядів і знаходити все більше і більше можливостей їх застосування. Не можна не згадати про Пьетро Менголі, Ніколаса Меркатора (Кауфмана), Джеймса Грегорі, Вільгельма Лейбніца, Ернесто Чезаро, Брука Тейлора, Луї Коші, Леонарда Ейлера та багатьох інших, які внесли неоцінений вклад в дослідженнях теми рядів.

В XIX столітті пан Ейлер та інші широко застосовували розбіжні ряди в своїх працях, та часто приходили до заплутаних й суперечливих результатів. Саме тоді постало питання про підсумування розбіжних рядів.

На малюнку (Додатку А) представлена карта структури теорій підсумовування, включаючи імена основних учасників кожної охопленої теорії та роки зареєстрованих внесків. Наведені праці Коші, Ейлера, Абеля, Чезаро та інших. За допомогою даної схеми можна прослідкувати хронологію розвитку теорії рядів, зокрема, теми підсумовування рядів.

Актуальність обраної теми полягає в тому, що зараз весь світ поринув у діджиталізацію, всі ми користуємось різними додатками для телефонів, інтернетом та іншими перевагами нашого століття. Майже всюди, щоб знайти найточніші результати, використовують ряди. Задача підсумовування рядів, насправді, зустрічається в незліченній кількості галузей: в біології, астрономії, економіці та інших. Не завжди потрібні нам ряди збіжні й дають нам гарний результат, і тут на допомогу приходять методи підсумовування розбіжних рядів.

Об'єктом дослідження є Ряди

Предметом дослідження є Розбіжні ряди

Мета роботи: дослідити методи підсумування розбіжних рядів

Завдання дослідження:

- Нагадати основні поняття теорії рядів;
- Детально розглянути основні методи підсумовування розбіжних рядів;
- Наведення прикладів застосування методів;

При розв’язанні поставлених завдань застосовано пошуковий, описовий методи аналізу та узагальнення.

Робота, що носить реферативно-дослідницький характер складається із вступу, трьох пунктів основної частини, висновків, списку літератури та додатків. В першому пункті описані означення та теорія, необхідні для дослідження. В другому й третьому розділах наведені методи підсумовування розбіжних рядів та приклади розв’язання задач, використовуючи методи наведені в розділі.

Під час написання роботи було використано джерела: наукова та публіцистична література, матеріали Інтернет – ресурсів, роботи Воробйова, Маркушевича, Харді, Вигодського, Фіхтенгольца та інших.

РОЗДІЛ 1

1.1 Базові поняття

Для роботи з розбіжними рядами, ми повинні визначити основні поняття теорії рядів.

Почнемо з самого початку. Що таке ряд?

Розглянемо нескінченну числову послідовність

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots a_n, \dots\}$$

Числовим рядом, або просто *рядом*, називають вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1.1)$$

При цьому, числа a_1, a_2. .. називають *членами ряду*.

Коротше, вираз (1.1) можна записати як $\sum a_n$.

Іноді, нам треба знайти тільки суми перших двох, трьох чи чотирьох перших членів ряду, ці суми мають назву *часткових сум*.

Часткову суму позначають

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

На прикладі розглянемо ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (1.2)$$

який, до речі, називається *гармонічним*, і має формулу загального члена $a_n = \frac{1}{n}$.

Знайдемо його часткові суми. Вони будуть дорівнювати:

$S_1 = 1;$ $\quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$ $\quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6};$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12};$$

Легко побачити, що $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ - формула n-скінченної суми для гармонічного ряду.

Також можем розглянути більше неоднозначний випадок. Візьмемо ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots,$$

знаходячи часткові суми даного ряду, кожного разу ми будемо отримувати різний результат, і жодний з цих результатів не буде кінцевим. А саме, маємо

$S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $S_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$; $S_4 = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$;

$S_5 = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$; $S_6 = \frac{31}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$; $S_7 = \frac{63}{32} + \frac{1}{64} = \frac{127}{64}$;

Однак, можна побачити деяку тенденцію в вигляді часткових сум і переписати їх вигляді $2 - S_n$. Так, отримаємо

$\mathbf{2 - 1}$; $\mathbf{2 - \frac{1}{2}}$; $\mathbf{2 - \frac{1}{4}}$; $\mathbf{2 - \frac{1}{8}}$; $\mathbf{2 - \frac{1}{16}}$; $\mathbf{2 - \frac{1}{32}}$; $\mathbf{2 - \frac{1}{64}}$;

Таким чином, шукаючи часткові суми вже перетвореного ряду, бачимо, що з кожної сумою, отримані числа все більше наближаються до константи, а саме, до двійки. Саме число 2 й будуть називати *сумою* даного ряду, і пишуть

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = 2$$

Слід відмітити, що розраховуючи часткові суми ми тільки *наближаємось* до справжнього значення суми. І чим більше членів ряду ми додаємо, тим точніше ми отримаємо результат.

Постає питання - чи завжди n-скінченні часткові суми будуть наближатись до якогось конкретного числа, чи кажучи іншими словами, чи для будь-якого ряду ми можемо знайти визначену суму.

Взявши до розгляду найпростіший приклад, ми можемо спростити дані припущення. Адже для ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{1.3}$$

Почавши розрахунок з першої, отримаємо суми, що чергуються. Маємо наступне

$S_1 = 1$; $S_2 = 1 - 1 = 0$; $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$; $S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$;

З цього можемо зробити висновок, що ряд (1.3) не має суми.

Так, ми дійшли до визначення збіжності рядів.

Означення.

Ряд називається ***збіжним***, якщо послідовність часткових сум $\{S_n\}$ збігається до деякого числа S, яке називають сумою ряду, і пишуть:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Якщо ж скінченної границі послідовності $\{S_n\}$ не існує, то ряд називається ***розбіжним***.

Також, для більш повного на комфортного застосування теорії рядів, не зайвим буде розглянути ***властивості збіжних рядів***:

i. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається до суми S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, де c є R, збігається до суми cS.

ii. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються до S_1 сум S_2 та відповідно, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ збігаються до сум $S_1 \pm S_2$.

iii. Відкидання, переставлення або приєднання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність / розбіжність.

1.2 Теореми та критерії

Французький математик Огюстен-Луї Коші подарував світу багато робіт, які належать до різних областей математики. Він опублікував понад вісімсот праць з арифметики і теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь тощо. Коші чітко побудував теорію збіжних рядів.

Нагадаємо одну дуже важливу теорему, яку прийнято називати *принципом (критерієм) збіжності Коші.*

Теорема

Якщо,

$$S_1, S_2, S_3 \dots S_n, \dots \tag{1.4}$$

- деяка числова послідовність, то для того , щоб вона *збігалась* до деякої скінченної границі s, необхідно й достатньо, щоб при будь-якому ε > 0 знайшлось таке n, що для будь-якого $m \geq 0$ виконується

$$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon \tag{1.5}$$

Доведення.

Необхідність.

Нехай послідовність (1.4) має кінцеву границю S. Це, зокрема, означає, що для будь-якого ε > 0 знайдеться таке n, що

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2},$$

при будь-якому номері більшим за n, тобто при будь-якому номері виду $n + m$, аналогічна нерівність також буде мати місце:

$$|S_{n+m} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Додавши ці дві нерівності, ми отримаємо

$$\varepsilon > |S_{n+m} - S_n| + |S_n - S| \geq |S_{n+m} - S - S_n + S| = |S_{n+m} - S_n|,$$

тобто отримаємо потрібну нерівність з теореми :

$$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon.$$

Достатність.

Нехай для будь-якого ε > 0 знайдеться таке n, що для всіх m виконується нерівність (1.5). Це свідчить про те, що всі члени послідовності (1.4), за виключенням, можливо, тих, які передують S_n, потраплять в сегмент

$$[S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon].$$

Звідси, виявляється, що послідовність (1.4) обмежена. Тому в ній знайдеться підпослідовність, що збігається до деякої границі S.

Припустимо, що в послідовності (1.4) знайдуться дві послідовності,

$$S_{n_1'}, S_{n_2'} \ldots,$$

$$S_{n_1''}, S_{n_1''} \ldots,$$

Які збігаються до двох різних s' та s''.

Візьмемо

$$\varepsilon < \frac{1}{4}|s' - s''|$$

й знайдемо на основі умови теореми таке n, що при всіх m

$$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon.$$

Крім того, на основі означення границі знайдемо такі $n'_{k'}$ та $n''_{k''}$, що при будь-якому $n'_k < n'_{k'}$

$$\left|S' - S_{n'_k}\right| < \varepsilon,$$

а при будь-якому $n''_k > n''_{k''}$

$$\left|S'' - S_{n''_k}\right| < \varepsilon.$$

Дані нерівності справедливі для всіх достатньо великих номерах n'_k та n''_k. Тому серед них знайдуться й такі, що більше n. Візьмемо n'_k = n + m' и n''_k = n + m''.

Будемо мати

$$\left|S' - S_{n+m'}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|S'' - S_{n+m''}\right| < \varepsilon.$$

Крім того, припускаючи, що в (1.5) m = m' та m = m'', ми отримаємо

$$\left|S_{n+m'} - S_n\right| < \varepsilon,$$

$$\left|S_{n+m''} - S_n\right| < \varepsilon.$$

Об'єднання останніх чотирьох нерівностей дає

$$|s' - s''| \le |S' - S_{n+m'}| + |S_{n+m'} - S_n| + |S_n - S_{n+m''}| + |S_{n+m'} - S''| < 4\varepsilon,$$

що суперечить припущенню.

Доведено

Яскравим прикладом, де можна застосувати доказану теорему в теорії рядів, це *критерій Коші збіжності рядів*.

Теорема (Критерій Коші збіжності рядів)

Для того, щоб ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

збігався, необхідно й достатньо, щоб послідовність його часткових сум

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

мала наступну властивість: для всякого $\varepsilon > 0$, існує таке n, що при будь-якому $m \geq 0$

$$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon.$$

Неможливо обійти стороною й іншого видатного норвезького математика та його теорему для степеневих рядів – Нільса Генріка Абеля. Проживши всього-на-всього двадцять шість років, він зробив неоціненний внесок в теорію рядів. Абель ретельно досліджував тему збіжності рядів, причому на найвищому рівні строгості. Його критерії суворості були жорсткішими, ніж навіть у Коші. Він, наприклад, доводив, що сума степеневого ряду всередині кола збіжності неперервна, тоді як Гаус і Коші вважали цей факт самоочевидним.

Але, не відходячи далеко від теми, теорема, для знаходження області збіжності степеневих рядів.

Теорема Абеля

Якщо степеневий ряд

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \qquad (1.6)$$

збігається за деякого $z = z_0$, то він збігається при абсолютно всіх значеннях z, для яких

$$|z| < |z_0|.$$

І навпаки, якщо ряд (1.6) розбіжний за деякого $z = z_0$, то він розбігається при абсолютно всіх значеннях z, для яких

$$|z| > |z_0|.$$

Доведення

Припустимо, що числовий ряд

$$a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n + \ldots$$

збіжний. В такому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$.

Також, члени даного ряду обмежені, тобто, знайдеться таке K, що при будь-якому номері n

$$|a_n z_0^n| < K.$$

Нехай тепер $|z| < |z_0|$, $z_0 \neq 0$. Тоді

$$q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1.$$

Маємо

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n}\right| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = |a_n z_0^n|\, q^n < Kq^n.$$

Це свідчить про те, що при $|z| < |z_0|$ члени ряду

$$|a_0| + |a_1 z| + \ldots + |a_n z^n| + \ldots \tag{1.7}$$

починаючи з деякого моменту, стають менше відповідних членів геометричної прогресії

$$K + Kq + \ldots + Kq^{n-1} + \ldots,$$

в якій знаменник менший за одиницю. Так як така прогресія збіжна, ряд (1.7) також збігається. Звідси, ряд

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

збіжний абсолютно.

Припустимо, що ряд

$$a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n + \ldots \tag{1.8}$$

розбіжний. Другу частину доведення будемо вести від супротивного. Візьмемо таке z, для якого $|z| > |z_0|$, і припустимо, що ряд

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

збігається. Але, тоді, відповідно до першої частини, якщо цей ряд збігається, то повинен збігатися й ряд (1.8), що суперечить припущенню.

Доведено

РОЗДІЛ 2

2.1 Загальний метод підсумовування

За Харді [1], розвиток теорії розбіжних рядів базується на адекватних узагальненнях границі послідовності. Зазвичай використовується допоміжна послідовність лінійних середніх часткової суми S_n.

Ми кажемо, що два методи підсумовування узгоджені один з одним, коли даний ряд має однакову суму, обраховуючи обома методами. Між двома послідовними методами найсильнішим є той, який може підсумувати більше рядів, тобто сильніший метод включає інший.

Будь-який метод підсумовування має задовольняти таким властивостям:

i. Регулярність

Метод підсумовування рядів називається регулярним, якщо він підсумовує кожен збіжний ряд до його звичайної суми.

ii. Лінійність

Коли для всякого $\alpha,\ \beta$ виконується

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

iii. Властивість діапазону

Тобто метод може приписувати конкретне числове значення принаймні одному розбіжному ряду.

iv. Стабільність

Коли метод задовольняє властивості

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}$$

2.2 Підсумовування за Пуассоном – Абелем

За даним числовим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (2.2.1)$$

побудуємо степеневий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{k-1} + \ldots \qquad (2.2.2)$$

Якщо цей ряд збігається для будь-якого x з інтервалу $0 < x < 1$ і якщо його сума *S(x)* має ліве граничне значення $\lim\limits_{x \to 1-0} S(x)$ в точці $x = 1$, то кажуть, що ряд (2.2.1) підсумовується методом Пуассона – Абеля. При цьому вказане граничне значення називають сумою ряду в сенсі Пуассона – Абеля.

Метод Пуассона – Абеля має властивості *лінійності* та *регулярності*.

Лінійність

Лінійність даного методу не викликає сумнівів. Випливає з того, що для будь-яких рядів U та V

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (au_n + bv_n)x^n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} au_n x^n + \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} bv_n x^n$$

$$= a \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n + b \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$$

Регулярність

Нехай ряд (2.2.1) збігається в звичайному сенсі і має суму, що дорівнює S. Нам потрібно довести, що 1) ряд (2.2.2) збігається для будь-якого x з інтервалу $0 < x < 1$, 2) сума $S(x)$ ряду (2.2.2.) в точці $x = 1$ має ліве граничне значення, яке дорівнює S.

Доведемо твердження 1). Оскільки ряд (2.2.1) збігається, то послідовність його членів є нескінченно малою та обмеженою, тобто знайдеться таке число *M*, що для всіх номерів k

$$|u_k| \leq M$$

Використовуючи дану нерівність, можемо оцінити модуль k -го члена ряду (2.2.2). Припускаючи, що x – будь-яке число з інтервалу $0 < x < 1$.
Отримаємо

$$\left|u_k x^{k-1}\right| \leq M|x|^{k-1}.$$

Так як $|x| < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{k-1}$ збіжний, тому збіжний й ряд (2.2.2).

Доведемо тепер твердження 2). Нехай S_n – n-на часткова сума ряду (2.2.1), а S – його звичайна сума. За допомогою перетворення Абеля, для будь-якого x з інтервалу $0 < x < 1$, справедливе твердження

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1 - x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}.$$

Позначаючи через r_k k – й залишок ряду (2.2.1), маємо

$$S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1 - x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}$$

або

$$S - S(x) = (1 - x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}$$

Нам треба довести, що для будь-якого ε > 0 знайдеться $\delta > 0$ таке, що

$$S - S(x) < \varepsilon$$

для всіх x в межах $1 - \delta < x < 1$. Так як залишок r_k ряду прямує до нуля при k, що прямую до нескінченності, то для позитивного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ знайдеться таке k_0, що

$$|r_k| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } k \geq k_0.$$

Таким чином

$$\left|(1 - x) \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|(1 - x) \sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Залишається довести, що для x, достатньо близьких до одиниці,

$$\left|(1-x)\sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

що є очевидним, адже сума останньої нерівності обмежена.

Регулярність доведено.

Приклади

Перший приклад

Візьмемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Для цього ряду складемо степеневий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Останній ряд збігається для всіх x з інтервалу $0 < x < 1$ і має суму, що дорівнює

$$S(x) = \frac{1}{1+x}$$

Оскільки

$$\lim_{x \to 1-0} S(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

То ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ підсумовується методом Пуассона – Абеля і його сума в сенсі Пуассона – Абеля дорівнює $1/_2$.

Другий приклад

Візьмемо ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}k = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (2n-1) - 2n + \ldots$$

Для цього ряду

$$\lim_{x \to 1-0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}k\,x^k$$

За будь-якого x, достатньо близького до одиниці і меншим за одиницю, ряд збіжний. Можемо написати

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}\; k\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}\; x^k \;+\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1}\; (k-1)\, x^k$$

Звідси

$$\lim_{x \to 1-0} \left(\frac{1}{1\;+\;x} - \frac{1}{(1\;+\;x)^2}\right) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Даний ряд підсумовується методом Пуассона – Абеля і його сума в сенсі Пуассона – Абеля дорівнює $1/_4$.

2.3 Теорема Таубера

В результаті переходу від одних рядів до інших - ми можемо отримати ті чи інші ряди, які за властивостями рядів також підсумовуються за Пуассоном - Абелем. У всіх таких випадках може з’явитися інтерес з'ясування збіжності цих рядів й у звичайному розумінні.

Таким чином, виникає питання про ознаки збіжності для рядів, які підсумовуються за Пуассоном – Абелем. Ці ознаки, що стосуються як рядів, що підсумовуються за Пуассоном – Абелем, так і до рядів, що підсумовуються в якомусь іншому сенсі, зазвичай називають *тауберовими теоремами.*

Наведена нижче теорема є найпростішою оберненою теоремою до теореми Абеля про збіжність степеневих рядів. Доведена А. Таубером в 1897 році й полягає в наступному.

Теорема Таубера

Для того, аби ряд підсумований за Пуассоном – Абелем ряд

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

був збіжним в звичайному розумінні ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$), необхідно і достатньо, щоб виконувалось граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0 + 2a_1 + \ldots + na_n}{n}\right) = 0 \qquad (2.3.1)$$

Доведення

Розіб’ємо на дві частини. Спочатку припустимо, що

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \text{ або } a_n = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Звідси, за теоремою Коші, уже слідує виконання умови (2.3.1).

Якщо покласти

$$\delta_n = \max_{k \geq n} |ka_k|$$

то при $n \to \infty$ величина δ_n, монотонно спадає, прямує до нуля.

У результаті отримано при будь-якому натуральному N

$$\sum_0^N a_n - A = \sum_0^N a_n\,(1 - x^n) - \sum_{N+1}^\infty a_n x^n + \left[\sum_0^\infty a_n x^n\ -\ A\right],$$

Так що використовуючи очевидні при 0 < x< 1 нерівності:

$$1\ -\ x^n\ =\ (1\ -\ x)(1\ +\ x\ +\ x^2 + \ldots + x^{n-1})\ <\ n(1 - x),$$

$$\sum_{N+1}^\infty x^n\ =\ \frac{x^{N+1}}{1\ -\ x} < \frac{1}{1\ -\ x}\ ,$$

буде отримано:

$$\left|\sum_0^N a_n - A\right| \leq \sum_0^N |na_n|(1 - x) + \sum_{N+1}^\infty \frac{|na_n|x^n}{n} + \left|\sum_0^\infty a_n x^n - A\right| \leq (1 - x)N\delta_0$$

$$+ \frac{N\delta_0\ + 1}{(N\ +\ 1)(1\ - x)} + \left|\sum_0^\infty a_n x^n - A\right|$$

Узявши довільне мале число ε > 0 буде покладено

$$(1\ -\ x)N\ =\ \varepsilon \text{ або } x\ =\ 1\ -\ \frac{\varepsilon}{N}$$

так що $x \to \infty$ при $N \to \infty$ Нехай тепер N вибрано достатньо великим, щоб

1) виконувалася нерівність $\delta_{N+1}\ < \varepsilon^2$ і 2) відповідне x було настільки близьке до 1, що

$$\left|\sum_0^\infty a_n x^n - A\right|\ <\ \varepsilon,$$

тоді

$$\left|\sum_0^N a_n - A\right|\ <\ (2\ +\ \delta_0)\varepsilon.$$

Твердження теореми доведено.

До розглянутого часткового випадку теореми приводиться і загальний випадок. Покладено

$$v_n\ =\ a_1\ +\ 2a_2 + \ldots + na_n(n \geq 1), v_0\ =\ 0,$$

так що

$$a_n = \frac{1}{n}(v_n - v_{n-1}) \quad (n \geq 1),$$

і потім

$$\sum_0^\infty a_n x^n = a_0 + \sum_1^\infty \frac{v_n}{n} x^n$$

$$- \sum_1^\infty \frac{v_{n-1}}{n} x^n = a_0 + (1 - x) \sum_1^\infty \frac{v_n}{n} x^n + \sum_1^\infty \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1}$$

(2.3.2)

Але із припущення теореми, тобто із того, що $\frac{v_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, легко отримати, що

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x) \sum_1^\infty \frac{v_n}{n} x^n = 0.$$

(2.3.3)

Для доведення цього достатньо розбити суму на дві:

$$(1 - x) \sum_1^N + (1 - x) \sum_{N+1}^\infty$$

і вибрати N таким, що у другій сумі всі множники $\frac{v_n}{n}$ були за абсолютною величиною меншими наперед заданого числа $\varepsilon > 0$, тоді і друга сума за абсолютною величиною буде менше ε яке б не було x; відносно першої суми, яка складається із визначеного кінцевого числа доданків, того ж можна досягнути за рахунок приближення x до 1. Таким чином, зважаючи (2.3.1), (2.3.2) і (2.3.3) отримано

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_1^\infty \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} = A - a_0.$$

Але тут уже можна застосувати доведений частковий випадок теореми, так що і

$$\sum_1^\infty \frac{v_n}{n(n+1)} = A - a_0.$$

З іншої сторони,

$$\sum_{1}^{n} \frac{v_m}{m(m+1)}$$

$$= \sum_{1}^{n} \frac{v_m}{m} - \sum_{1}^{n} \frac{v_m}{m+1} = \sum_{1}^{n} \frac{v_m}{m} - \sum_{1}^{n+1} \frac{v_{m-1}}{m} = -\frac{v_n}{n+1} + \sum_{1}^{n} a_m .$$

Звідси, так як перший доданок справа прямує до нуля

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} a_m = A - a_0,$$

Доведено

Частину цієї теореми Таубера ми виділимо у лему.

Лема

Якщо ряд

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

збігається, то має місце

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_0 + 2a_1 + \ldots + na_n}{n}\right) = 0$$

РОЗДІЛ 3

3.1 Підсумовування за Чезаро

Ернесто Чезаро – видатний італійський математик, народжений в Неаполі 12 березня 1859 року.

Головним внеском Чезаро є диференціальна геометрія. Він розробив прекрасне застосування ідеї Дарбу, який прийняв спеціальну координатну систему, що застосовується в кривих - точку на кривій, де координати складаються з основної нормалі, а також бінормалі. Ця праця включає опис кривих, названих сьогодні на честь Чезаро. Згодом він висловив метод аналізу Коха про криві, неперервні, але не диференційовані.

Його праця також стосується поверхонь n - розмірного простору. Чезаро помітив пізніше, що його геометрія не застосовувала паралельних аксіом, і так влаштована неевклідова геометрія.

Крім диференціальної геометрії Чезаро працює з безліччю тем, наприклад, теорією чисел, у якій він вивчав прості числа, намагаючись покращити отримані Чебишевим результати. Він також взяв участь у вивченні розбіжних рядів, тема, яка цікавила його ще на початку своєї кар'єрі. У 1890 році було розроблено та досліджено метод Підсумовування середніх арифметичних (метод Чезаро)

Метод підсумовування Чезаро, а також відоме як середнє Чезаро, є першим систематичним і узгодженим процесом усереднення для оцінки суми розбіжних рядів.

Означення

Нехай

$$a_n = a_0, a_1, \dots, a_n$$

даний ряд, і нехай

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

- n-а часткова сума даного ряду. Послідовність a_n називається **підсумованою за Чезаро**, із сумою Чезаро A ∈ R, якщо середнє арифметичне його перших n часткових сум s_0, s_1, ..., s_n прямує до A, коли n прямує до нескінченності.

Середнє Чезаро (першого порядку) визначається як

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} a_i\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n}\right)$$

коли така границя існує.

Для збіжних рядів, якщо послідовність їх часткових сум має границю s при

$n \to \infty$, метод Чезаро повинен мати ту саму границю.

Метод підсумовування Чезаро має властивості *регулярності, лінійності* та *стабільності*.

Лінійність.

Якщо U, V та aU + bV - ряди, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} au_i + bv_i\right) =$$

$$= a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} u_i\right) + b\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} v_i\right)$$

Регулярність.

Покажемо також, що метод підсумовування за Чезаро також є регулярним. Тобто, якщо ряд U збіжний в звичайному розумінні, і дорівнює деякому s, то він збіжний й за Чезаро і дорівнює тому ж s.

Як збіжність в звичайному розумінні маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

Розглянемо різницю

$$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(s_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_n - s_k\right)$$

Таким чином маємо

$$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k u_k\right)$$

І дана границя, за лемою в пункті 2.2, для збіжного ряду дорівнює нулю.

Приклади

Перший приклад

Наведемо простий приклад для відомого ряду Гранді $a_n = (-1)^n$ для $n \geq 0$.

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Нехай ряд часткових сум ряду G дорівнює

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Маємо, що (s_k) = (1, 0, 1, 0, . . .), тобто

$$s_k = \begin{cases} 1, & \text{для непарного } k \\ 0, & \text{для парного } k \end{cases}$$

Послідовність часткових сум розбіжна, з цього слідує що й ряд G також розбіжний.

Звідси, за Чезаро,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k = \frac{1}{n}(1+0+1+0+\ldots) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2n} & \text{для непарного } n, \\ \dfrac{1}{2} & \text{для парного } n. \end{cases}$$

Отже, ряд Гранді за Чезаро збігається до однієї другої:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k\right) = \frac{1}{2}$$

Другий приклад

Для наступного прикладу візьмемо ряд $a_n = n$ для $n \geq 0$.

Нехай послідовність G дорівнює

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

Тоді послідовність часткових сум дорівнює

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

$$(s_k) = (1, 3, 6, 10, \ldots)$$

Оскільки послідовність часткових сум зростає безмежно, ряд G розбігається до нескінченності, тобто з ростом n послідовність цих сум ні до якої границі не прямує. Таким чином, можна стверджувати, що даний ряд не підсумовується за Чезаро.

Висновки

В даній курсовій були розглянуті основні поняття теорії рядів, що мають велику роль у різних сферах математики. Показані та доведені теореми, які дають розуміння теорії рядів. Розглянуто властивості, які повинен мати метод підсумовування розбіжних рядів. Було досліджено два методи підсумовування, метод Пуассона – Абеля та метод Чезаро, та теореми, що з них випливають. Доведено їх властивості лінійності та регулярності. Також, наведено приклади до кожного з методів.

Під час написання даної роботи було розглянуто різні підходи до підсумовування розбіжних рядів, дослідження всіх цих різноманітних методів виходить за рамки курсової роботи, проте вони також варті уваги.

Можемо зробити висновок, що мета курсової роботи була повною мірою виконана.

Список використаних джерел

1. Харди Г. Расходящиеся ряды / Годфри Гарольд Харди. – Ленинград: 4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР, 1951. – 511 с.
2. Воробьев Н. Н. Теория рядов — 4-е. изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979 – 408с.
3. Дубовик В.П. Вища математика / В. Дубовик, І. Юрик. – К.: А.С.К. 2005.- 648 с.
4. Маркушевич А. И. Ряды. — 4-е. изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979 – 192с.
5. Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа, Том 1 — 6-е. изд.– М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968 – 441с.
6. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2006 – 991с.
7. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (ІІ курс І семестр) / Уклад.: В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 108 с.
8. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум. (ІІ курс ІІІ семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 160 с.
9. Lloyd L. Smail A General Method of Summation of Divergent Series, Annals of Mathematics Second Series, Vol. 20, No. 3 (Mar., 1919), pp. 149–154

Додатки

Додаток А