УДК 512.54

Боднарчук Ю. В., Лавренюк Я. В.

ПРО АВТОМОРФІЗМИ НЕСКІНЧЕННО ІТЕРОВАНИХ ВІНЦЕВИХ ДОБУТКІВ АБЕЛЕВИХ p-ГРУП

Розглядаються групи трикутних перетворень нескінченно-вимірних афінних просторів над скінченним полем, які є ітерованими вінцевими добутками груп і є групами автоморфізмів шарово-однорідних p-дерев. Встановлена будова автоморфізмів таких груп.

Ітеровані вінцеві добутки груп виникають як групи автоморфізмів дерев, тобто як групи ізометрій просторів Бера. За допомогою цієї конструкції описуються силовські підгрупи симетричних та лінійних груп. Відомі приклади В. І. Сущанського [1], Р. І. Григорчука [2], Н. Гупта-С. Сідкі [3] груп Бернсайдового типу можуть бути реалізовані як певні підгрупи нескінченно-ітерованих вінцевих добутків циклічних p-груп. Все це обумовлює актуальність вивчення властивостей цих груп.

Метою даної статті є продовження досліджень автоморфізмів ітерованих вінцевих добутків груп та їх нормалізаторів в симетричних групах, розпочатих раніше [4—7]. Вихідною точкою для нас буде теорема, що повністю описує автоморфізми скінченно-ітерованих вінцевих добутків абелевих p-груп, доведенню якої присвячена праця [5]. Перед її формулюванням введемо потрібні позначення. Нехай A_i — набір скінченних абелевих p-груп, $W_1 = A_1$, $X_i = A_1 \, x \, x A_2 x \ldots x \, A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, $W_n = (W_{n-1}, X_{n-1})$ wr A_n — вінцевий добуток групи підстановок (W_{n-1}, X_{n-1}), що є активним множником, з групою A_n, який діє природним чином на множині X_n. Базу цього вінцевого добутку позначатимемо через F_n. Легко бачити, що центр групи $Z_v = Z(W_n)$ ізоморфний A_n.

Теорема 1 [6]. ***Якщо A_{n-1} і A_n одночасно не є циклічними групами другого порядку, то маємо розклад в напівпрямий добуток:***

$$AutW_n \approx (\Gamma \times I_F)\lambda(N_{S(X_{n-1})}(W_{n-1}) \cdot (KA_{n-1})^* \prod_{r=1}^{n-2} (Id + K_{q_r} A_r)), \tag{1}$$

де

$$N_{S(X_{n-1})}(W_{n-1}) \approx W_{n-1} \lambda(\mathop{\times}_{k=1}^{n-1} AutA_k), \; KA_{n-1}, K_{q_r} A_r \quad —$$

групові кільця абелевих груп над $K = EndA_n$ і над кільцем K_{q_r}, яке отримано з K заміною множення

$$k_1 k_2 \to q_r k_1 k_2, \qquad q_r = s_{r+1} s_{r+2} \ldots s_{n-1}, \qquad s_i = |A_i|.$$

$\Gamma = \bigoplus_{i=2}^{n-1} Hom(A_i^{(t_{i-1})}, A_n)$ ***є першою групою когомологій F_n як W_{n-1} — модуля, $t_i = s_1 s_2 \ldots s_i$ - i. I_F є підгрупою внутрішніх автоморфізмів, що індукуються базою. У випадку $A_{n-1} \approx A_n \approx C_2$ маємо також автоморфізм ζ такий, що $(F_n)^\zeta \neq F_n$ і $Aut \, W_n \approx Aut_F \, W_n \lambda(\zeta)$, де перший співмножник складається з автоморфізмів, що зберігають базу F_n, і має структуру*** (1).

Наведемо формули, за якими діють зазначені вище автоморфізми. Автоморфізми з $Id + K_{q_r} A_r$ на елементах з W_{n-1} діють тотожно, а на функціях з F_n в такий спосіб:

$$f \to f + \sum_{x_{r+1}, x_{r+2} \ldots x_{n-1}} \sum_{a \in A_r} Q_a f(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, ax_r, x_{r+1}, \ldots, x_{n-1}), \tag{2}$$

де $\sum_a aQ_a$ — елемент зазначеного вище групового кільця. Дія автоморфізму з KA_{n-1} є композицією стандартного розширення автоморфізму A_n і автоморфізму, що визначається формулою (2), де слід покласти $r = n - 1$, забрати знак першої суми і накласти додаткову умову $\sum_{a \in A_{n-1}} Q_a = 0$. Група $\Gamma \times I_F$ є групою стабільності ряду $W_n \supset F_n \supset (e)$, тобто діє в такий спосіб: $g \to g\varphi_g$, $f \to f$, де $g \in W_{n-1}$, $f \in F_n$, де системи функцій φ_g визначаються за певними достатньо складними формулами.

Будова нормалізатора $N_{S(X_n)}(W_n) \approx W_n \lambda(\mathop{\times}_{k=1}^{n} AutA_k)$ була встановлена раніше [5]. Ця підгрупа $S(X_n)$ є аналогом підгрупи Бореля в лінійній групі, часом її називають групою Жонк'єра, і надалі вона буде позначатись як B_n. В статті [7] показано, що коли абелеві групи A_i є групами трансляцій афінних просторів над полем характеристики 0, то всі регулярні автоморфізми B_n є внутрішніми. Виявляється, що для елементарних абелевих p-груп $A_i=(p, p,\ldots, p)$, $|A_i| = p^{n_i}$ ($p>3$), зовнішні автоморфізми існують. Узагальнимо цей результат на випадок, коли $A_i=(p, p,\ldots, p)$ є елементарними абелевими p-групами, $p>3$, $|A_i| = p_i^{m_i}$, $\Sigma m_i = N$. В цьому випадку $\times_{k=1}^{n} Aut A_k \approx \times_{k=1}^{n} GL_n(F_p)$, ($F_p$ — просте поле). Будемо позначати цю підгрупу через T_n. Якщо $m_i=1$ для всіх i (тобто відповідні абелеві групи — циклічні), то T_n є тором.

Лема 2. ***Підгрупа*** W_n ***є характеристичною в*** B_n.

Доведення. Припустимо, що ми маємо певний автоморфізм, який не зберігає W_n, тоді його проекція на довільну координату прямого добутку визначає гомоморфізм $W_n \to Gl_{m_i}$, образ якого має бути нормальним дільником лінійної групи. Як відомо, при $p>3$ всі нормальні дільники лінійних груп або містять Sl_{m_i}, або лежать у центрі лінійної групи. Оскільки W_n є розв'язною групою, образ вказаного гомоморфізму не може бути нормальним дільником першого типу. Можливість існування нетривіального гомоморфізму p-групи W_n в циклічну групу порядку $p-1$ також виключається.

Таким чином, будь-який автоморфізм u групи B_n індукує автоморфізми α на підгрупі T і β на підгрупі W_n в такий спосіб: u: $t \to t^{\alpha} g_t$, $g \to g^{\beta}$, $g \in W_n$. При цьому автоморфізми α і β пов'язані між собою таким чином.

Лема 3. β ***належить нормалізатору*** $N_{AutW_n}(T \cdot Int(W_n))$.

Доведення проводиться безпосередньою перевіркою і призводить до співвідношення в групі $AutW_n$: $\beta^{-1} t \beta = t^{\alpha} i_t$ для будь-якого $t \in T$, де i_t — внутрішній автоморфізм.

Усі автоморфізми W_n описані в **Теоремі 1**, отже можна перейти до розгляду автоморфізмів, що індукують тривіальний гомоморфізм на W_{n-1} і діють на базі F_n за формулою (2). Застосувавши ліву і праву частини цієї рівності до довільного елемента $g \in W_{n-1}$, отримуємо $g^t \equiv g^{t^{\alpha} i_v} (\mathrm{mod}\, F_n)$ для будь-якого елемента $t \in T$. Неважко переконатися, що ядро дії спряженням групи B_{n-1} на W_{n-1} співпадає з її центром Z_{n-1}, отже маємо конгруенцію $t^{\alpha} \equiv t^{\alpha g_t} (\mathrm{mod}\, Z_{n-1} GL_{m_n} F_n)$, яка означає, що в проекції на W_{n-1} дія автоморфізму на T_{n-1} є тривіальною. Вибираючи g з регулярної абелевої підгрупи, доходимо висновку, що $\beta^{-1} t \beta = t i_t$, причому, i_t індукується деяким елементом з Z_{n-1}. Отже, дія автоморфізму на T_n має вигляд $t \to t z_1(t)\, z_2(t)$, де z_1, z_2 набувають значення в Z_{n-1}, Z_n відповідно.

Використовуючи комутаційні співвідношення з елементами $f(x_{n-1}) \in F_n$, отримаємо, що $z_1(t) \equiv e$, а $z_2(t)$ є одиничним на елементах T_{n-1}. Таким чином, маємо автоморфізм афінної групи $Z_n \lambda GL_{n_k}$ який, як відомо, є внутрішнім. Отже, можна перейти до автоморфізму, який діє тотожно на T_n.

Теорема 4. ***Група автоморфізмів*** B_n ***є напівпрямим добутком групи внутрішніх автоморфізмів*** $Inn\, B_n \cong B_n$ ***і декартового степеня*** $C_p^{(n-1)}=(p, p, \ldots, p)$.

$$Aut\, B_n \cong B_n \lambda C_p^{(n-1)}.$$

Доведення. Як було показано вище, домножуючи при потребі на внутрішній автоморфізм, можна перейти до автоморфізму, який діє тотожно на T_n і за формулою (2) на базі. Тоді умова комутативності його дії (2) з дією GL_{n_k} призводить до висновку, що елементи T_a мають бути рівними між собою і бути скалярними матрицями. Легко бачити, що для кожного k такі автоморфізми мають порядок p і комутують між собою.

Отже, відповідна група автоморфізмів бази ізоморфна прямому добутку циклічних груп — $C_p^{(n-1)}$. Розглянемо дію таких автоморфізмів на W_{n-1}. Якщо $g \to g\varphi_g$, $g \in W_{n-1}$, то маємо тотожність $(\varphi_g)^t = \varphi_{g^t}$ для всіх елементів $t \in T_n$. Вибравши t скалярною матрицею з GL_{n_k}, отримаємо $\varphi_g \mu = \varphi_g$, звідки, $\varphi_g \equiv 0$ для всіх g. Таким чином, описано всі зовнішні автоморфізми B_n, і їх дія визначається так:

$$t \to t,\ g_{n-1} \to g_{n-1},$$

$$f(x_1,\ldots,x_{n-1}) \to f(x_1,\ldots,x_{n-1}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} c_k \sum_{x_k,\ldots,x_{n-1} \in F_p} f(x_1,\ldots,x_{n-1}),$$

де $t \in T_n$, $g_{n-1} \in W_{n-1}$ і $f \in F_n$, $c_k \in F_p$, $1 \le k \le n-1$. Цим теорему доведено.

Розглянемо тепер нескінченно-ітеровані добутки абелевих p-груп. Зануренням $W_{n-1} \to W_n = (W_{n-1}, X_{n-1}) \mathrm{wr}\, A_n$, образом якого є активний співмножник, визначається індуктивна та проективна границі, які будуть позначатись W_∞ і $\overline{W_\infty}$. Наступна теорема узагальнює відповідні результати роботи [8].

Теорема 5. ***Всі автоморфізми груп W_∞ і $\overline{W_\infty}$ індукуються елементами декартового добутку***

$$\mathop{\times}_{k=1}^{\infty} GL_{n_k}.$$

Доведення. Будь-який автоморфізм W_∞ має задавати нетривіальний автоморфізм на деякому W_n. Як випливає з статті [5], лема 3, до автоморфізмів W_{n+1} розширюються тільки ті автоморфізми W_n, що індукуються елементами нормалізатора W_n в симетричній групі $S(X_n)$. Це доводить твердження для груп типу W_∞. Не втрачаючи загальності, можна перейти до розгляду автоморфізму $\overline{W_\infty}$, що тривіально діє на W_∞. Нехай (w_k), $w_k \in W_k$ — послідовність елементів, що визначають елемент з $\overline{W_\infty}$. Нехай $(w_k) \to (w_k')$ і $w_k \neq w_k'$ для деякого k, тоді елемент $w_k^{-1}(w_k)$, що має тривіальну проекцію на W_k, переходить в елемент, у якого ця проекція нетривіальна. Неважко бачити, що $\overline{W_\infty}$ розкладається у вінцевий добуток групи підстановок (W_k, X_k) з групою типу $\overline{W_\infty}$. Зокрема, якщо всі абелеві групи мають однаковий ранг, то $\overline{W_\infty} = (W_k, X_k)$ wr $\overline{W_\infty}$. Таким чином, отримано автоморфізм, який порушує характеристичність бази вінцевого добутку груп. Як випливає з теореми про ізоморфізм вінцевих добутків (див. [6]), в даній ситуації це неможливо. Отже, $w_k = w_k'$ для всіх k і згаданий автоморфізм є тривіальним.

Група $\overline{B_\infty} = \overline{W_\infty} \lambda \mathop{\times}_{k=1}^{\infty} GL_{n_k}$ також є проективною границею груп B_n. Розглянемо нескінченне дерево D, усі вершини якого, віддалені на відстань m, мають однакову валентність p^{m_k}, $k = 1, 2, 3 \ldots$. Група $Aut\,D$ є проективною границею вінцевих добутків повних симетричних груп: $AutD = \mathop{Wr}_{k=1}^{\infty} S_{p^{m_k}}$. Усі згадані вище групи, очевидно, є підгрупами $Aut\,D$, причому $\overline{B_\infty}$ є нормалізатором $\overline{W_\infty}$ в повній симетричній групі, що діє на вершинах дерева.

Теорема 6. ***Групи $\overline{B_\infty}$, $Aut\,D$ є досконалими.***

Доведення. Відсутність центра в цих групах є очевидною. Тими ж міркуваннями, що і в скінченному випадку, показуємо, що $\overline{W_\infty}$ є характеристичною підгрупою в $\overline{B_\infty}$. За **Теоремою 5**, для будь-якого автоморфізму u групи $\overline{B_\infty}$ існує внутрішній автоморфізм i такий, що $u_1 = u$ і діє тотожно на $\overline{W_\infty}$. Якщо u_1 є нетривіальним, то існує число n таке, що він індукує нетривіальний автоморфізм на B_n, що діє тотожно на W_n. Але, як випливає з **Теореми 4**, у групи B_n таких нетривіальних автоморфізмів немає, отже u_1 — тотожний автоморфізм.

Група $Aut\,D$ є узагальненою мономіальною групою. Будь-який зовнішній автоморфізм таких груп індукує зовнішній автоморфізм на скінченній мономіальній групі $\mathop{Wr}_{k=1}^{n} S_{p^{m_k}}$. Використовуючи відомий опис автоморфізмів звичайних мономіальних груп, легко отримати, що при $p > 2$ всі автоморфізми $\mathop{Wr}_{k=1}^{n} S_{p^{m_k}}$ є внутрішніми. Цим теорему доведено.

1. *Сущанский В. И.* Периодические р-группы подстановок и неограниченная проблема Бернсайда // ДАН СССР.— 1979.— Т. 247.— № 3,— С. 561—565.
2. *Григорчук Р. И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функ. анализ и его прилож.— 1980.— Т. 14.—Вып. 1.—С. 53—54.
3. *Gupta N., Sidki S.* Some infinite p-groups // Алгебра и логика.— 1983,— Т. 22.— № 5.— С. 584—589.
4. *Боднарчук Ю. В.* Строение группы автоморфизмов нестандартного сплетения групп // Укр. мат. журн.— 1984.—№2.—С. 143.
5. *Боднарчук Ю. В.* Автоморфизмы кратных сплетений абелевыхр-групп//Укр. мат. журн.— 1991.— № 7—8.— С. 889—894.
6. *Боднарчук Ю. В.* Об изоморфизме сплетений групп // Укр. мат. журн.— 1994.— № 6.— С. 64—68.
7. *Bodnarchuk Yu.* On automorphisms of block-triangular polynomial translation groups // Journal of Pure and Applied Algebra,— 1999.— 137.— P. 103—123.
8. *A. Bruner, S. Sidki.* On the Automorphism Group of the One-Rooted Binary Tree // J. Algebra —1997.—N 156 — P. 24—35.

Bodnarchuk Yu. V., Lavrenuk Ya. V.

ON AUTOMORPHISMS OF INFINITE-ITERATED WREATH PRODUCTS OF ABELIAN p-GROUPS

The groups of triangular transformations of the infinite-dimensional affine spaces over a prime finite field, which are an iterated wreath products of groups and automorphism group of layer-regular p-trees are considered. The structure of automorphisms of such groups is ascertained.