ВЛАСТИВОСТІ ГРАФУ ІДЕАЛІВ Zn

Єлізавета Утенко

Кафедра математики

Факультет інформатики

Національний університет "Києво-Могилянська Академія"

11-та Всеукраїнська Наукова конференція молодих математиків,

Травень 11-13, 2023

Кільце

Ідеали

Розглянемо множину класів лишків $Z_n = \{\bar{0}, \dots \overline{n-1}\}$ з дією додавання і множення класів лишків. Zn є кільцем.

Підмножина I ⊂ K називається **ідеалом**, якщо виконуються наступні властивості:

$$1) a, b \in I \Rightarrow a + b \in I;$$

$$2) a \in I, b \in K \Rightarrow a \cdot b \in I, b \cdot a \in I.$$

Граф перетину ідеалів

Для комутативного кільця R граф перетину його ідеалів є простим графом, вершинами якого є ненульові власні Ідеали і дві вершини з’єднані ребром, якщо їх перетин також є ненульовим ідеалом.
Нехай, $G(R)$ є графом перетину ідеалів.

Рівні ідеалів

Для будь-якого додатнього цілого числа $n = p_1^{\alpha 1} * p_2^{\alpha 2} * \dots * p_r^{\alpha r}$, кожен ідеал кільця Zn має вигляд $I =< p_1^{\beta_1} * p_2^{\beta_2} * \dots * p_r^{\beta_r} >$, де 0 ≤ βr ≤ αr . Тобто, якщо $n = p_1^{\alpha 1} * p_2^{\alpha 2} * \dots * p_r^{\alpha r}$, то число $< p_1^{\beta_1} * p_2^{\beta_2} * \dots * p_r^{\beta_r} >$ є дільником.

Рівні ідеалів

Для будь-якого ідеалу $I = < p_1^{\beta_1} * p_2^{\beta_2} * \dots * p_r^{\beta_r} >$ кільця Zn з $n = p_1^{\alpha 1} * p_2^{\alpha 2} * \dots * p_r^{\alpha r}$ визначаємо набір $L(I) = \{p_i : \beta_i = \alpha_i\}$, який називається набір рівнів для I. Ідеал I називається i-рівневим ідеалом, якщо потужність L(I) є i.

Використовуючи дослідження Лаксмана Сахаа, Мітхуна Басака та Калішанкара Тівარі, у своїй квалафікаційній роботі я досліджувала властивості графу ідеалів кільця Zn.

Побудова графу ідеалів перетину

Для Z_{84}: $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$P(n) = \{2, 3, 7\}$

$< 2 >= I_2 \to L(I_2) = \emptyset$

$< 3 >= I_3 \to L(I_3) = \{3\}$

$< 4 >= I_4 \to L(I_4) = \{2\}$

$< 6 >= I_6 \to L(I_6) = \{3\}$

$< 7 >= I_7 \to L(I_7) = \{7\}$

$< 12 >= I_{12} \to L(I_{12}) = \{2\}$

$< 14 >= I_{14} \to L(I_14) = \{7\}$

$< 21 >= I_{21} \to L(I_{21}) = \{3, 7\}$

$< 28 >= I_{28} \to L(I_{28}) = \{2, 7\}$

$< 42 >= I_{42} \to L(I_{42}) = \{2, 7\}$

Клас 1: I_2.

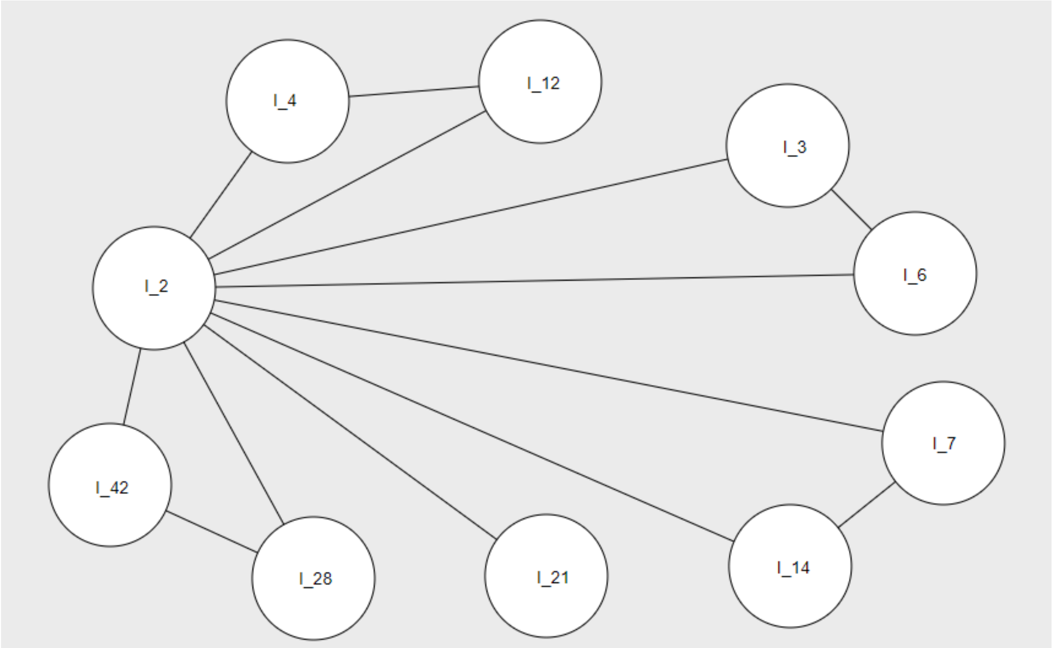
Клас 2: I_4, I_{12}.

Клас 3: I_3, I_6.

Клас 4: I_7, I_{14}.

Клас 5: I_{21}.

Клас 6: I_{28}, I_{42}.



Триаметр

Триматером графа G є параметр:

$$tr(G) = max\{d_G(a,b) + d_G(a,c) + d_G(b,c) : a,b,c \in V(G)\},$$

де d_G – відстань задана на графі G, що визначається для довільних двох точок як довжина найкоротшого шляху між ними.

Теорема. Для будь-якого додатнього цілого числа при k >= 3, триаметр графу перетину ідеалів кільця Zn дорівнює 6.

Кліка

Повний підграф графа з максимальною кількістю вершин називається клікою графа.

Твердження. Нехай L_i є класом ідеалів кільця Z_n, що визначає підграф в графі перетину ідеалів з максимальною кількістю вершин. Тоді максимальною клікою графу перетину ідеалів Z_n буде $L_i \cup L_0$.

Ексцентриситет

Ексцентриситет вершини v у неорієнтованому графі G визначається як максимальна відстань між v та будь-якою іншою вершиною в G. Тобто, це найбільша кількість ребер, які необхідно пройти, щоб дістатися від v до будь-якої іншої вершини в графі. Ексцентриситет вершин v можна позначити, як:

$$ecc(v) = max\{d(v, u) : u \in G\}$$

Твердження. Нехай v вершина в графі G перетину іделів кільця Zn. Тоді ексцентиситет вершини v в графі G дорівнює 1, якщо це вершина нульового рівня або n має не більше двох простих дільників, і 2 в іншому випадку.

Центр графа

Центр графа – множина центральних вершин, тобто вершин з мінімальним ексцентриситетом.

<u>Теорема</u>. Центрами графу перетину ідеалів кільця Zn є ідеали нульового класу.

Хроматичне число

Хроматичним числом графа G називається мінімальна кількість фарб, яку потрібно використати для розфарбування графа так, щоб довільні дві його суміжні вершини були розфарбовані різними кольорами.

Теорема. Хроматичне число графу перетину ідеалів кільця Zn дорівнює сумі кількості елементів нульового класу еквівалентноті та класу з найбільшою кількістю елементів.

Висновки

У роботі показано, що

- Якщо число n є добудком більше ніж двох простих чисел, то триаметр графа tr(G) перетину ідеалів кільця Zn дорівнює 6.
- Охарактеризовано кліку цього графу.
- Доведено, що центральними вершинами графа є вершини нульового рівня.
- Показано, що ексцентриситет довільної вершини v графу перетину ідеалів кільця Zn завжди дорівнює або 1, або 2.
- Доведено, що хроматичне число цього графа дорівнює сумі кількості елементів нульового рівня та рівня з найбільшою кількістю вершин.
- Наведено приклади.

Дякую за увагу!