

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«ТЕОРЕМА РАМСЕЯ ДЛЯ ГІПЕРГРАФІВ.
ТЕОРЕМА ЕРДЕША-СЕКЕРЕША»**

Виконав: студент 4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Моргачов Ілля Олександрович

Керівник: Тимошкевич Л. М.,
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

«_____» _____ 20____ р.

Київ – 2022

Міністерство освіти і науки України
 Національний університет «Києво-Могилянська академія»
 Факультет інформатики
 Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ
 Зав.кафедри математики,
 проф., д.ф-м.н., Б. В. Олійник

 „___” _____ (підпис)
 2021 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
 на кваліфікаційну роботу

студенту 4-го курсу, факультету інформатики
Моргачову Іллі Олександровичу

Тема Теорія Рамсея для гіперграфів. Теорема Ердеша-Секереша

Вихідні дані:

- огляд основних понять Теорії Рамсея;
- дослідження теорії Рамсея для гіперграфів;
- дослідження застосування теореми Ердеша-Секереша;
- демонстрація прикладного застосування розглянутих теорем до розв'язання власно сформульованих тверджень та задач;

Зміст ТЧ до кваліфікаційної роботи:

Зміст

Анотація

Вступ

1 Огляд основних понять

2 Теорія Рамсея для гіперграфів

3 Теорема Ердеша-Секереша

Висновки

Список літератури

Дата видачі „___” _____ 2021 р. Керівник _____
 (підпис)

Завдання отримав _____
 (підпис)

Тема: _____

Календарний план виконання роботи:

№ з/п	Назва етапу роботи	Термін виконання етапу	Підпис	Дата	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи та літератури.	20.10.2021			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	10.11.2021			
3.	Розробка плану та структури роботи.	1.12.2021			
4.	Дослідження та аналіз літератури за темою роботи.	1.01.2022			
5.	Дослідження та аналіз отриманих результатів/питань з керівником (за літературою).	10.02.2022			
6.	Отримання задач для курсової роботи.	15.02.2022			
7.	Дослідження та виконання задач для кваліфікаційної роботи.	01.03.2022			
8.	Дослідження та аналіз отриманих результатів/питань з керівником (за задачами).	10.04.2021			
9.	Оформлення кваліфікаційної роботи та виправлення помилок.	10.05.2021			
10.	Підготовка роботи до передзахисту.	5.06.2022			
11.	Підготовка роботи до захисту.	25.06.2022			

Студент _____

Керівник _____

“ _____ ” _____

Зміст

<u>Анотація</u>	5
<u>Вступ</u>	6
<u>РОЗДІЛ 1: Огляд основних понять</u>	7
<u>РОЗДІЛ 2: Теорія Рамсея для гіперграфів</u>	
2.1 <u>Теоретична частина</u>	9
2.2 <u>Практична частина</u>	11
<u>РОЗДІЛ 3: Теорема Ердеша-Секереша</u>	16
<u>Висновки</u>	26
<u>Список літератури</u>	27

Анотація

Робота присвячена поглибленому дослідженню теорії Рамсея, а саме теорії Рамсея для гіперграфів та застосування теореми Рамсея для гіперграфів до доведення теореми Ердеша-Секереша. Головною задачею була демонстрація прикладного застосування розглянутих теорем до власно сформульованих задач.

Вступ

«Повного хаосу не існує», – фраза сформульована ізраїльсько-американським математиком Теодором Моцкіном. Цю фразу кожен з нас зустрічав в книжках, фільмах чи навіть від знайомих, але мало хто знає, що цією фразою Теодор Моцкін описав Теорію Рамсея.

В 1930 році Френк Плаптон Рамсей, англійський математик, філософ та економіст, довів, що в будь-якій достатньо великій структурі обов'язково знайдеться підструктура деякого конкретного типу, що і дало початок теорії Рамсея [7]. Найбільший внесок в розвиток теорії був зроблений угорським математиком Палом Ердешом, який відкрив теорію Рамсея заново разом з Джорджем Секерешом [6], вже після смерті Френка Рамсея.

Цей розділ математики вивчає умови, за яких в довільно сформованих об'єктах гарантовано з'являється певна послідовність.

Сьогодні теорія Рамсея являється досить актуальною. Вона може допомогти в розв'язанні задач різних за своїми масштабом та складністю. Існують багато корисних застосувань теорії Рамсея. Чудовим прикладом є останні результати в теоретичній інформатиці [12]. Також цікавими є застосування теорії в логіці [13][14], алгоритмах [15][16], обчислювальній геометрії [17][18]. Крім того, величезна кількість задач, навіть враховуючи сучасні технології, ще не можливо розв'язати. Але розв'язання цих задач є лише питанням часу, тож логічним є те, що з вирішенням цих задач буде і розвиватися теорія Рамсея і її можливості.

Метою даної роботи являється:

1. Огляд відомих результатів
2. Дослідження теорії Рамсея для гіперграфів
3. Дослідження застосування теореми Рамсея для гіперграфів до доведення теореми Ердеша-Секереша
4. Демонстрація прикладного застосування розглянутих теорем до розв'язання власно сформульованих тверджень та задач.

1 РОЗДІЛ: Огляд основних понять

Означення 1.1. [\[1\]](#)

Принцип Діріхле – комбінаторне твердження, сформульоване німецьким математиком Петером Діріхле. Полягає в наступному: якщо m предметів розмістити по n кліткам, тоді хоч би в одній клітці міститься не менше m/n предметів.

Означення 1.2 [\[2\]](#)

Теорія Рамсея – розділ математики, котрий вивчає за яких умов в якихось випадково сформованих об'єктах з'явиться певна послідовність.

Означення 1.3 (Рамсей, 1930). [\[3\]](#)

Кліка – це така підмножина C вершин V , в неорієнтованому графі $G = (V, E)$, що будь-які 2 вершини в C з'єднані. n -кілкою називають кліку на n вершинах.

Теорема 1.1 (Рамсей, 1930). [\[4\]](#)

Нехай дані числа $x_1, \dots, x_n$. Тоді існує таке число R , що при будь-якому розфарбуванні ребр повного графа на R вершинах в n кольорів, гарантовано знайдеться x_i -кліка i -го ($i = 1, \dots, n$) кольору.

Означення 1.4 (Рамсей, 1930). [\[4\]](#)

Число Рамсея $R(m, n)$ – це найменше з таких натуральних чисел x , що для довільного розфарбування графа K_x в один з двох кольорів знайдеться або m -кліка першого кольору, або n -кліка другого кольору.

Таблиця 1.1 Числа Рамсея [5, ст. 14]

p, q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	40-43
4	1	4	9	18	25	35-41	49-61	56-84	73-115	92-149
5	1	5	14	25	43-49	58-87	80-143	101-216	125-316	143-442
6	1	6	18	35-41	58-87	102-165	113-298	127-495	169-780	179-1171
7	1	7	23	49-61	80-143	113-298	205-540	216-1031	233-1713	298-2826
8	1	8	28	56-84	101-216	127-495	216-1031	282-1870	317-3583	317-6090
9	1	9	36	73-115	125-316	169-780	233-1713	317-3583	565-6588	580-12677
10	1	10	40-43	92-149	143-442	179-1171	289-2826	317-6090	580-12677	798-23556

Теорема 1.2 (Оцінка зверху; Ердеш, Секереш, 1935). [6]

Якщо $R(m-1, n)$ та $R(m, n-1)$ існують, то число $R(m, n)$ існує та виконується нерівність:

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1).$$

Наслідок з теореми 1.2

$$R(m, n) \leq C(m+n-2, m-1)$$

Означення 1.5 (Рамсей, 1930). [7]

Число Рамсея $R(m_1, \dots, m_k)$ – це найменше з таких натуральних чисел x , що для довільного розфарбування ребр графа K_x в k кольорів для деякого i знайдеться m_i -кліка якогось конкретного кольору i .

Теорема 1.3 Теорема Хеллі [11, с. 102].

Якщо є система з n опуклих фігур евклідового простору $\mathbb{R}^d$, таких, що перетин будь-яких $d+1$ з них є непорожнім, тоді і вся система цих фігур має непорожній перетин.

2 РОЗДІЛ: Теорема Рамсея для гіперграфів

2.1 Теоретична частина

Теорема 2.1.1 [8, ст. 4]

Для будь-яких натуральних k, r та $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{Z}_{\geq k}$, завжди існує таке натуральне число R , що виконується наступне:

Для будь-якої множини N з n елементів при довільному розфарбуванні в r кольорів k -елементних підмножин множини N існує такі $i \in \{1, \dots, r\}$ та l_i -елементна підмножина множини N , що кожна k -елементна підмножина цієї l_i -елементної підмножини буде розфарбована в колір i .

Доведення теореми 2.1.1 [8, ст. 5]

□ Доведемо за допомогою методу математичної індукції по k . Зазначим, що $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{Z}_{\geq k}$.

При $k = 1$ теорема випливає за принципом Діріхле.

Тепер беремо $h > 1$ і припустимо, що теорема виконується для всіх k , що $k < h$. Нехай $k = h$. Продовжимо індукцію по $l_1 + l_2 + \dots + l_r$. Якщо $h = l_1 = l_2 = \dots = l_r$, то з цього випливає, що $R_h(l_1, \dots, l_r) = h$. Тепер візьмемо $n_1 > rh$ і припустимо, що теорема виконується для $h = k$ і $l_1 + l_2 + \dots + l_r < n_1$. Визначимо $R_h(l_1, \dots, l_{i-1}, h - 1, l_{i+1}, \dots, l_r) = 1$.

Нехай $l_1, \dots, l_h$ будуть такими натуральними числами, що $l_i \geq h$ ($i = 1, \dots, n$), з $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n_1$. За нашою другою гіпотезою індукції ми можемо визначити a_i як $R_h(l_1, \dots, l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, \dots, l_r)$ для $i \in \{1, \dots, r\}$. Далі за першою гіпотезою індукції ми можемо визначити n як $R_{h-1}(a_1, \dots, a_r) + 1$. Припустимо нам дано множину N з n елементами і довільним розфарбуванням в колір s (всього r кольорів) h -елементної підмножини множини N . Візьмемо $m \in N$ і розглянемо множину Y як $N \setminus \{m\}$.

Тепер ми можемо визначити індуковану $(h-1)$ -елементну підмножину Y . Фарбуємо $(h-1)$ -елементну підмножину S множини Y в колір i^* , якщо $S \cup \{m\}$ має

колір i в оригінальному розфарбуванні c . За нашим визначенням n , ми знаємо, що для деяких $i \in \{1, \dots, r\}$ Y матиме підмножину A_i з a_i елементів, чиї всі $(h - 1)$ -елементні підмножини мають колір i^* . Ми знаємо за визначенням a_i , що або для деяких $j \neq i$ множина A_i має l_j -елементну підмножину з всіма h -елементними підмножинами кольору j . Оскільки $A_i \subset N$ або A_i має $(l_i - 1)$ -елементну підмножину T кольору i .

Тепер розглянемо $T \cup \{m\}$. Зазначимо, що $|T \cup \{m\}| = l_i$. Візьмемо довільну h -елементну підмножину K множини $T \cup \{m\}$. Якщо m не належить K , тоді K пофарбована в колір i як $K \subset T$ і всі h -елементні підмножини множини підмножину T теж пофарбовані в колір i . Якщо m не належить K , то $K \setminus \{m\} \subset A_i$ і має колір i^* в індукційному розфарбуванні, але в такому випадку ми знову робимо висновок, що K пофарбована в колір i .

Отже, доведено. ■

Означення 2.1.1 [\[8, ст. 5\]](#)

Число Рамсея $R_k(l_1, \dots, l_r)$ або $R(k; l; r)$, коли $l_1 = \dots = l_i = \dots = l_r = l$ – це таке мінімальне ціле додатне число R , що для якого виконується Теорема 3.1.1.

При доведенні теореми 2.1.1 була одержана наступна нерівність, що міститься в наслідку 2.1.2

Наслідок 2.1.2

$$R_k(1_1, \dots, l_r) \leq R_{k-1}(R_k(1_1 - 1, l_2, \dots, l_r), R_k(1_1, l_2 - 1, \dots, l_r), R_k(1_1, l_2, \dots, l_r - 1)) + 1$$

2.2 Практична частина

Задача 2.2.1. Знайти $R(2; l; r)$.

Розв'язання задачі 2.2.1

□ Оскільки $k = 2$, то $l \geq 2$. Маємо, що при обрані будь-якої підмножини, з k елементів, множини $\{1, \dots, n\}$ нам потрібно, щоб всі пари були одного кольору. Тоді це можна інтерпретувати як розфарбування ребер між k вершинами в однаковий колір. Отже, $R(2; l; r)$ буде зводитися до $R(l, \dots, l)$, де l повторюється r разів. ■

Задача 2.2.2. Знайти $R_k(l_1, \dots, l_r)$, якщо $k = 2, r = 2$.

Розв'язання задачі 2.2.2

□ Оскільки $k = 2, r = 2$, то з цього випливає, що $R_k(l_1, \dots, l_r)$ зводиться до $R_2(l_1, l_2)$, і це можна трактувати як довільне розфарбування ребер при наявності 2 кольорів при утворенні l_1 -елементної підмножини першого кольору або l_2 -елементної підмножини другого кольору. Очевидним є той факт, що задача зводиться до звичайного числа Рамсея, $R(l_1, l_2)$. ■

Задача 2.2.3. Знайти $R(3; 2; 2)$.

Розв'язання задачі 2.2.3

□ З Задачі 2.2.1 випливає, що $R(3; 2; 2)$ буде зводитися до $R(3, 3)$, а $R(3, 3) = 6$. Отже, $R(3; 2; 2) = 6$. ■

Задача 2.2.4. Знайти $R(3; 2; 3)$.

Розв'язання задачі 2.2.4.

□ З Задачі 2.2.1 випливає, що $R(3; 2; 3)$ буде зводитися до звичайного числа Рамсея з 3 кольорами, $R(3, 3, 3)$. На рисунку 3.2.1 зображено 2 контрприклад, які вказують на те, що $R(3, 3, 3) > 16$. Тож для доведення рівності $R(3, 3, 3) = 17$, нам достатньо довести, що $R(3, 3, 3) \leq 17$.

Розглянемо граф відносно конкретної вершини A . Оскільки A має 16 інцидентних ребер, пофарбованих у 3 кольори, то за принципом Діріхле – A

сполучається мінімум з 6-ма ребрами одного кольору. Якщо серед цих 6 вершин хоча б одне ребро такого самого кольору, то ми маємо трикутник одного кольору. В інакшому випадку ми маємо 6 вершин та 2 кольори для розфарбування, що зводиться до $R(3, 3) = 6$. З цього випливає, що на цих 6-ти вершинах обов'язково утвориться трикутник одного з двох кольорів, що залишилися. Отже, $R(3, 3, 3) = 17$ з чого випливає, що $R(3; 2; 3) = 17$. ■

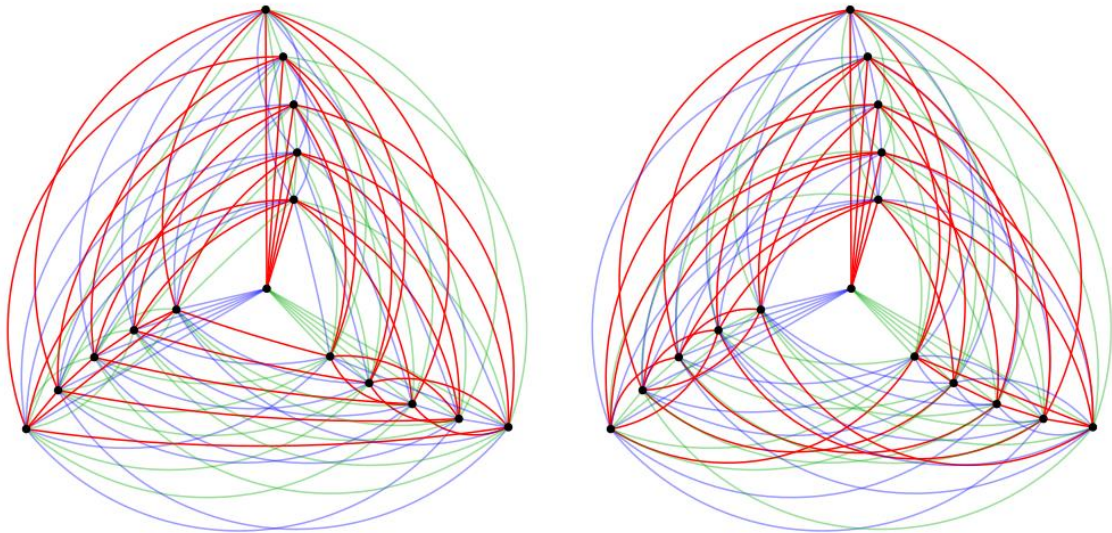


Рисунок 2.1.1 – $R(3, 3, 3) > 16$ (2 випадки коли немає K_3 одного з кольорів)

Задача 2.2.5. Знайти $R(k; k; r)$.

Розв'язання задачі 2.2.5

□ Ми маємо r кольорів для розфарбування, обираємо будь-який з них і фарбуємо k -елементну підмножину. Оскільки $k = l$, то l -елементна підмножина вже пофарбована в один колір. Отже, $R(k; k; r) = k$. ■

Задача 2.2.6.

Серед будь-яких 4 з 19 школярів завжди знайдеться «команда» (3 школярі, котрі гарно працюють в команді). Довести, що можна обрати 4 довільних школярів, і будь-які 3 з них будуть утворювати «команду».

Розв'язання задачі 2.2.6 [19]

□ Зафіксуємо конкретного школяра A . Двох школярів, котрі утворюють «команду» з A , подружимо. Оскільки $R(4, 4) < 19$, то ми можемо стверджувати,

що серед школярів, що залишилися або 4 гарно працюючих разом попарно, або 4 погано працюючих разом попарно.

Розглянемо перший випадок. Серед 4 гарно працюючих попарно є «команда». При додаванні до цієї трійки A , ми утворимо четвірку, де будь-які 3 школяра утворять «команду».

В другому випадку, обираємо будь-яких 3 школярів з четвірки погано працюючих попарно і додаємо до них A . Серед отриманих 4 школярів знайдеться «команда», і не є «командою» лише та трійка, де знаходиться A . Таким чином, ми розуміємо, що будь-які 3 школяра з четвірки попарно не дружніх утворюють «команду». Отже, 5 попарно не дружніх школярів складають потрібну п'ятірку.

■

З цієї задачі 2.2.6, як наслідок, одержуємо наступне твердження.

Твердження 2.2.1 $R_3(4; 4) \leq 19$.

Задача 2.2.7.

На математичній олімпіаді змагаються школярі. Відомо, що серед будь-яких 4 з 7316 школярів завжди знайдеться трійка школярів з однієї школи. Довести, що можна обрати 5 школярів, серед яких будь-які 3 будуть утворювати потрібну «трійку».

Розв'язання задачі 2.2.7

□ Зафіксуємо конкретного школяра A . Двох школярів, котрі з однієї школи з A , «об'єднаємо». Скористаємося наступною властивістю:

$$R(n, m) \leq C(n + m - 2, m - 1),$$

тоді

$$R(19, 5) \leq C(19 + 5 - 2, 5 - 1) = C(22, 4) = \frac{22!}{4! \cdot 18!} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7315.$$

Оскільки, то ми можемо стверджувати, що серед школярів, що залишилися або 19 «об'єднаних» попарно, або 5 не «об'єднаних» попарно.

Розглянемо перший випадок. Із Прикладу 1 випливає, що серед 19 «об'єднаних» знайдеться четвірка, де будь-які 3 школярі утворять «трійку». Ця четвірка разом з A утворять потрібну п'ятірку.

В другому випадку, обираємо довільних 3 школярів з 5-ти не «об'єднаних» попарно і додаємо до них A . Серед отриманих 4 школярів за умовою знайдеться «трійка», але при цьому «трійкою» не може бути та «трійка», де знаходиться A . Таким чином, ми розуміємо, що будь-які 3 з 5-ти попарно не «об'єднаних» школярів виявляється «трійкою». Отже, 5 попарно не «об'єднаних» школярів складають потрібну п'ятірку. ■

З цієї задачі 2.2.7, як наслідок, одержуємо наступне твердження.

Твердження 2.2.2 $R_3(5; 4) \leq 7316$.

Задача 2.2.8.

В групі галактик G серед будь-яких 4 з 200 квадрильйонів планет завжди знайдуться «сусіди» (3 планети, котрі знаходяться в одній галактиці). Довести, що можна обрати 6 довільних планет, і будь-які 3 з них будуть «сусідні».

Розв'язання задачі 2.2.8.

□ Розглянемо групу галактик G відносно конкретної планети E . Дві планети, котрі є «сусідами» з E , «об'єднаємо».

Використаємо наступну властивість:

$$R(n, m) \leq C(n + m - 2, m - 1),$$

тож

$$R(7316, 6) \leq C(7316 + 6 - 2, 6 - 1) = C(7320, 5) = 174896347218979460.$$

Оскільки $R(7316, 6) < 200 \cdot 10^{15}$, то ми можемо стверджувати, що серед школярів, що залишилися або 7316 «об'єднаних» попарно, або 6 не «об'єднаних» попарно.

Розглянемо перший випадок. Із Прикладу 2 випливає, що серед 7316 «об'єднаних» попарно гарантовано є п'ятірка, де будь-які 2 планети «об'єднані». Ця п'ятірка разом з E утворюють шістку, де будь-які 3 планети є «сусідами».

Розглянемо другий випадок. Обираємо довільних 3 школярів з 6-ти не «об'єднаних» попарно і додаємо до них E . Серед отриманих 4 планет за умовою знайдуться «сусіди», але при цьому «сусідами» не може бути та трійка, де знаходиться E . Таким чином, ми розуміємо, що будь-яка обрана трійка з 6-ти не «об'єднаних» планет виявляється «сусідами». Отже, 6 попарно не «об'єднаних» планет складають потрібну шістку. ■

З цієї задачі 2.2.8, як наслідок, одержуємо наступне твердження.

Твердження 2.2.3 Довести $R_3(6; 4) \leq 200 \cdot 10^{15}$.

Задача 2.2.9. *Задача про прямокутники.*

На площині розташовано 7316 прямокутників так, що серед будь-яких 4-ьох прямокутників знайдеться 3, що мають спільну точку. Довести, що знайдуться такі 4 прямокутники, що мають спільну точку.

Розв'язання задачі 2.2.9.

□ Оскільки прямокутник – це опукла фігура, то використаємо теорему Хеллі. Оскільки наша розмірність $d = 2$, то теорема Хеллі (Теорема 1.3) стверджує, що при наявності n опуклих фігур на площині, будь-які 3 з них мають непорожній перетин, то всі n мають непорожній перетин. Якщо перетин фігур непорожній, то існує спільна точка у цих фігур. Отже, з попереднього твердження та Твердження 2.2.2 про те, що $R_3(5; 4) \leq 7316$ випливає, що знайдуться такі 4 прямокутники, що мають спільну точку. ■

3 РОЗДІЛ: Теорема Ердеша-Секереша

Означення 3.1 [\[8, ст.10\]](#)

Опуклою називається множина $D \subset \mathbb{R}^2$, якщо відрізок, що з'єднує довільну пару точок множини D , належать цій множині.

Означення 3.2 [\[8, ст.10\]](#)

Опуклою оболонкою множини точок площини називається найменший опуклий многокутник, що містить ці точки.

Означення 3.3

Якщо жодні 3 точки з n ($n \geq 3$) точок не лежать на одній прямій, то ці точки знаходяться в загальному положенні.

Теорема 3.1 [\[8, ст.11\]](#)

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдеться таке число $G(n)$, що серед будь-яких $G(n)$ точок загального положення на площині знайдуться n точок, що є вершинами опуклого n -кутника.

Доведення теореми 3.1. [\[8, ст.11\]](#)

Нехай T – будь-яка множина з n точок в $\mathbb{R}^2$ загального положення. Позначимо кількість точок з T у внутрішній частині 3-підмножини $\{A, B, C\}$ з T як $f(A, B, C)$.

Ми визначаємо наступне червоно-синє забарвлення для 3-підмножин нашої множини T : якщо для 3-підмножини $\{A, B, C\}$, $f(A, B, C)$ – парна, тоді ми зафарбовуємо цю 3-підмножину червоним кольором. Якщо $f(A, B, C)$ – непарна, то ми зафарбовуємо 3-підмножину синім кольором.

Тоді за теоремою Рамсея для гіперграфів випливає, що існує або підмножина S з T порядку n_0 , з якої всі 3-підмножини мають червоний колір або синій колір.

Стверджуємо, що в обох випадках S знаходиться в опуклому положенні. Це означає, що кожна 4-підмножина S не є в опуклій позиції. Припустимо, що деяка 4-підмножина $\{A, B, C, D\}$ множини S не є в опуклій позиції. Оскільки жодні три

точки серед A, B, C, D не знаходяться на одній прямій, тоді одна з чотирьох точок, скажімо D , знаходиться всередині $\{A, B, C\}$. Отримуємо наступну рівність:

$$f(A, B, C) = f(A, B, D) + f(B, C, D) + f(A, C, D) + 1.$$

Тепер, якщо всі 3-підмножини S пофарбовані в червоний колір, ми отримаємо протиріччя оскільки парне число не може бути сумою парних чисел плюс одиниця. В іншому випадку всі 3-підмножини S є пофарбований синім кольором, і тоді ми отримаємо протиріччя, оскільки непарне число не може бути сумою трьох непарних та одиниці. Ми робимо висновок, що 3-підмножина S не може мати внутрішню точку з S . Отже, S — це множина з n_0 точок у опуклому положенні.

Теорема 3.2. [\[9, ст. 111\]](#)

З послідовності $n^2 + 1$ будь-яких дійсних чисел можна утворити монотонну послідовність довжини щонайменше $n + 1$.

Доведення теореми 3.2. (Хаммерслі, 1972). [\[9, ст. 112\]](#)

Покладемо елементи множини $x_1, x_2, \dots, x_m$, де $m = n^2 + 1$, в множину колонок, при цьому нехай x_1 почне першу колонку.

Якщо x_i , де $i \geq 1$, більша або рівна за елемент зверху колонки, то ми кладемо x_i в верх цієї колонки. В інакшому випадку кладемо x_i в початок нової колонки.

Отже, в кінці, коли ми маємо k колонок, ми можемо відслідкувати з останньої колонки монотонно спадну послідовність довжини k . Оскільки $n^2 + 1$ чисел розміщені в колонках, то або кількість колонок буде більше за n або ж якась колонка має висоту більшу за n . В будь-якому випадку, ми знаходимо монотонну послідовність довжини $n + 1$.

Твердження 3.1. Довести, що $G(4) = 5$. [\[19, ст. 6\]](#)

Серед будь-яких 5 точок загального положення на площині знайдеться опуклий чотирикутник.

Доведення твердження 3.1.

□ Розташуємо довільно перші три точки на площині, будемо далі називати їх «трійкою». Далі, наступна точка розташована всередині (показано як (II) на рисунку 3.1) або зовні «трійки». При розташуванні точки зовні «трійки» ми вже отримуємо опуклий чотирикутник (показано як (III) на рисунку 3.1).

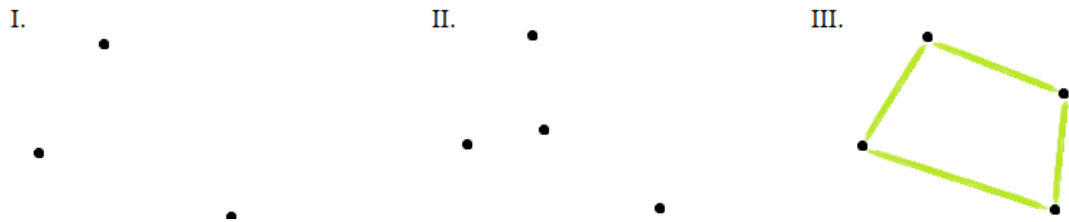


Рисунок 3.1

Розглянемо випадок розташування точки всередині. При розташуванні останньої точки зовні опуклого чотирикутника отримуємо опуклий чотирикутник (рис. 3.2).

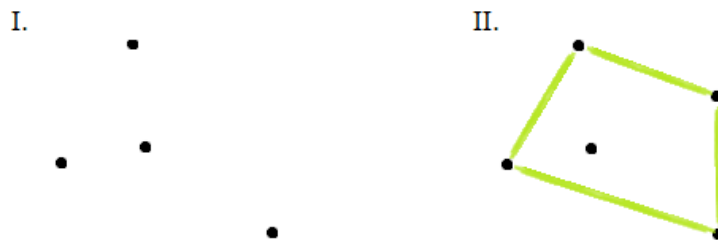


Рисунок 3.2

Тепер розглянемо розташування «останньої» точки всередині трикутника. Маємо три різних варіанти розташування останньої точки (позначено як (I), (II) (III) на рисунку 3.3). Позначимо червоним кольором ту точку трикутника A (A – трикутник в якому розташована остання точка), в якому знаходиться «остання» точка, котра розташована найближче до точки, що знаходиться зовні трикутника. Ми можемо розташувати з двох сторін відносно проведеної висоти з червоних

точок. Таким чином з варіанта (I) ми отримуємо два варіанти позначені як (IV) і (VII) на рисунку 3.3, з варіанта (II) ми отримуємо два варіанти позначені як (V) і (VIII) на рисунку 3.3, з варіанта (III) ми отримуємо два варіанти позначені як (VI) і (IX) на рисунку 3.3. В кожному з цих варіантів утворюється опуклий чотирикутник при з'єднанні «останньої» точки, червоної точки, точки, що знаходиться зовні трикутника A , та чорна точка трикутника A , що розташована до «останньої» точки найближче.

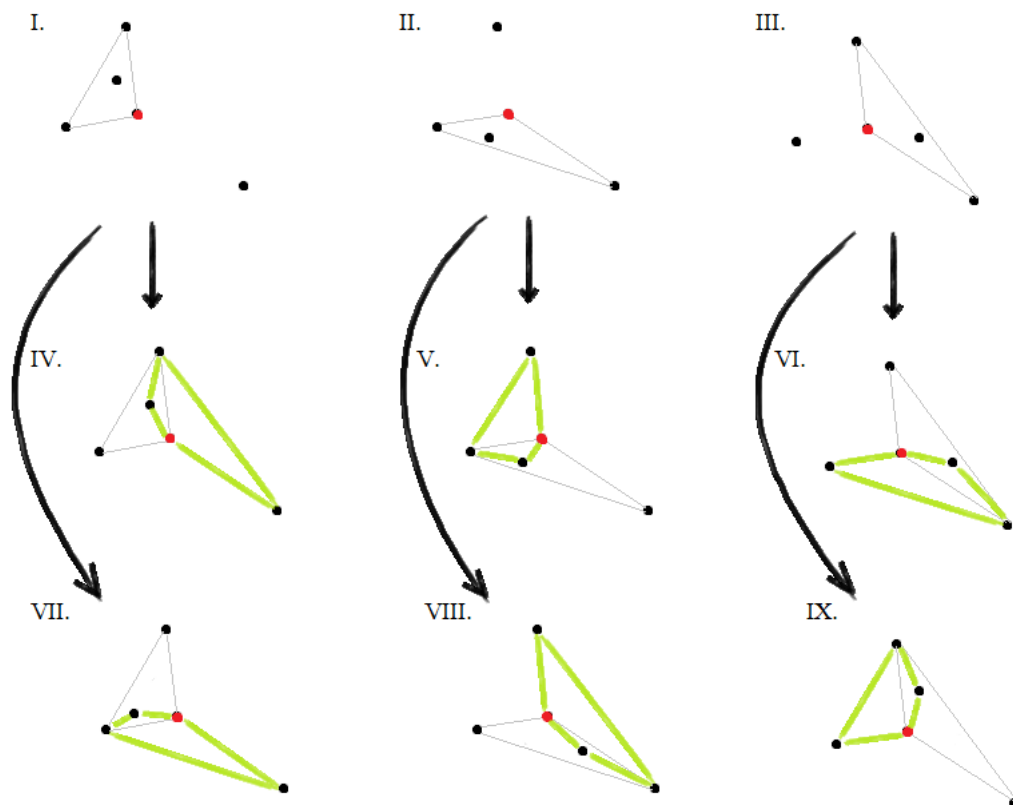


Рисунок 3.3

■

Твердження 3.2. Довести $G(5) \neq 8$. [\[19, ст. 7\]](#)

Знайдеться 8 точок загального положення на площині, серед яких немає випуклого п'ятикутника.

Доведення твердження 3.2.

□ Для доведення нам достатньо навести хоча б один приклад. Розташуємо перші чотири точки так, щоб вони утворювали прямокутник. Далі

розташуємо наступні чотири точки таким прямокутником всередині прямокутника утвореного першими чотирма точками (рис. 3.4). Отже, твердження правильне.

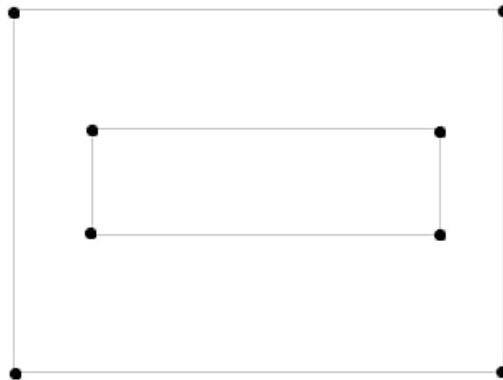


Рисунок 3.4

■

Твердження 3.3. Довести, що $G(5) = 9$. [\[19, ст. 7\]](#)

Потрібно рівно 9 точок загального положення на площині, для утворення на них випуклого п'ятикутника.

Доведення твердження 3.3.

□ З твердження 3. 2 випливає, що 8 точок не достатньо для утворення на них випуклого п'ятикутника. Будемо називати A опуклу оболонку множини з 9-ти точок.

Розіб'ємо задачу на всі можливі випадки. Маємо:

1. A має 5 або більше вершин, тоді опуклий п'ятикутник отримано (показано як (I) на рисунку 3.5);
2. A має 4 вершини і всередині існує опуклий п'ятикутник (показано як (II) на рисунку 3.5);
3. A має 3 вершини і всередині існує опуклий багатокутник, що включає 5 або 6 вершин (показано як (III) на рисунку 3.5);
4. Конфігурація (4, 4, 1) (показано як (IV) на рисунку 3.5);
5. Конфігурація (4, 3, 2) (показано як (V) на рисунку 3.5);
6. Конфігурація (3, 3, 3) (показано як (VI) на рисунку 3.5);
7. Конфігурація (3, 4, 2) (показано як (VII) на рисунку 3.5);

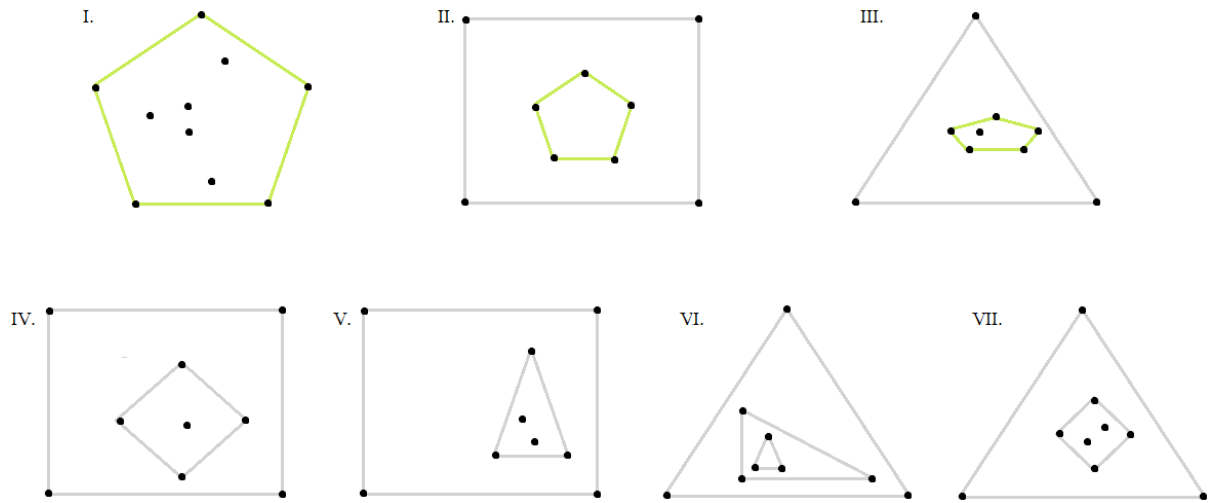


Рисунок 3.5

Бачимо, що нам потрібно розглянути лише 4 останні випадки. Почнемо з конфігурацій $(4, 4, 1)$ і $(4, 3, 2)$. Спочатку доведемо, що в конфігурації $(4, 3, 1)$ є опуклий п'ятикутник. Побудуємо 3 точки, що утворюють трикутник, і покладемо всередину ще 1 точку. Проведемо прямі з точки, що лежить всередині, і проходять через вершини трикутника; ці прямі розділять площину зовні трикутника на 3 області (рис. 3.6).

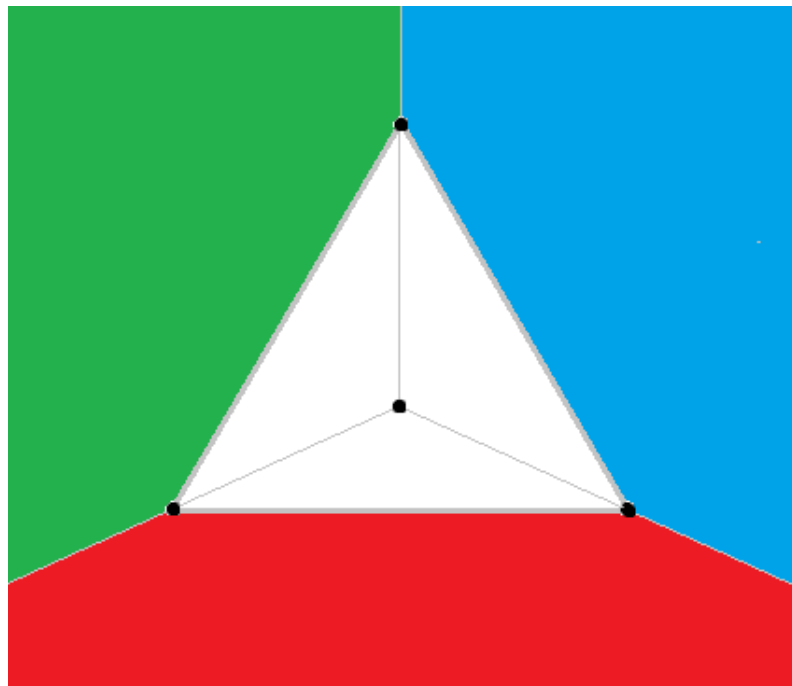


Рисунок 3.6

Оскільки точки розташовані в загальному положенні, то всі 4 точки, що залишаються, будуть розташовані в цих 3 секціях. За принципом Діріхле – мінімум 2 точки будуть лежати в одній області. Якщо в одній секції лежить 2 точки, то буде утворений опуклий п'ятикутник (рис 3.7).

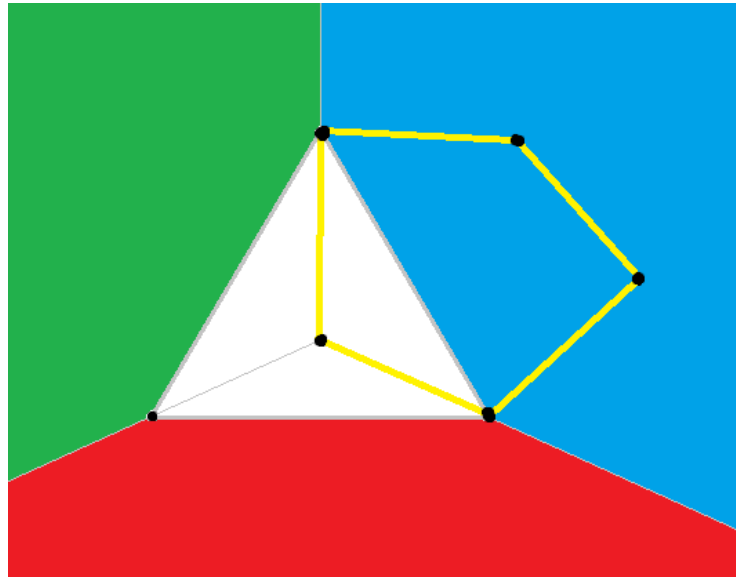


Рисунок 3.7

Оскільки очевидним є те, що конфігурація $(4, 3, 2)$ містить конфігурацію $(4, 3, 1)$, що містить опуклий п'ятикутник. То можна зробити висновок, що конфігурація $(4, 3, 2)$ містить опуклий п'ятикутник. Тепер розглянемо конфігурацію $(4, 4, 1)$. Маємо «внутрішню точку», «зовнішній» та «внутрішній» чотирикутники. Перетворимо «внутрішній» чотирикутник на трикутник, викинувши найдальшу від «внутрішньої точки» точку «внутрішнього чотирикутника» (рис. 3.8).

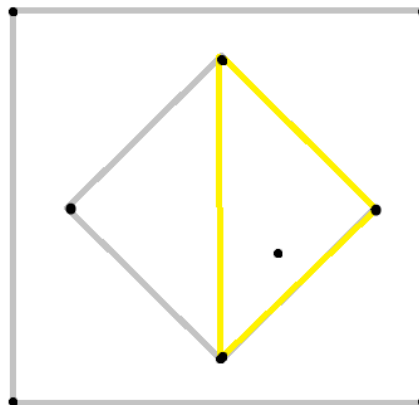


Рис 3.8

Оскільки конфігурація $(4, 4, 1)$ містить конфігурацію $(4, 3, 1)$, котра містить опуклий п'ятикутник. То конфігурація $(4, 4, 1)$ містить опуклий п'ятикутник. Далі розглянемо конфігурацію $(3, 3, 3)$ (показано як (I) на рисунку 3.9). Приберемося зовнішній трикутник та обираємо довільний відрізок у найбільш внутрішньому трикутнику (показано як (II) на рисунку 3.9).

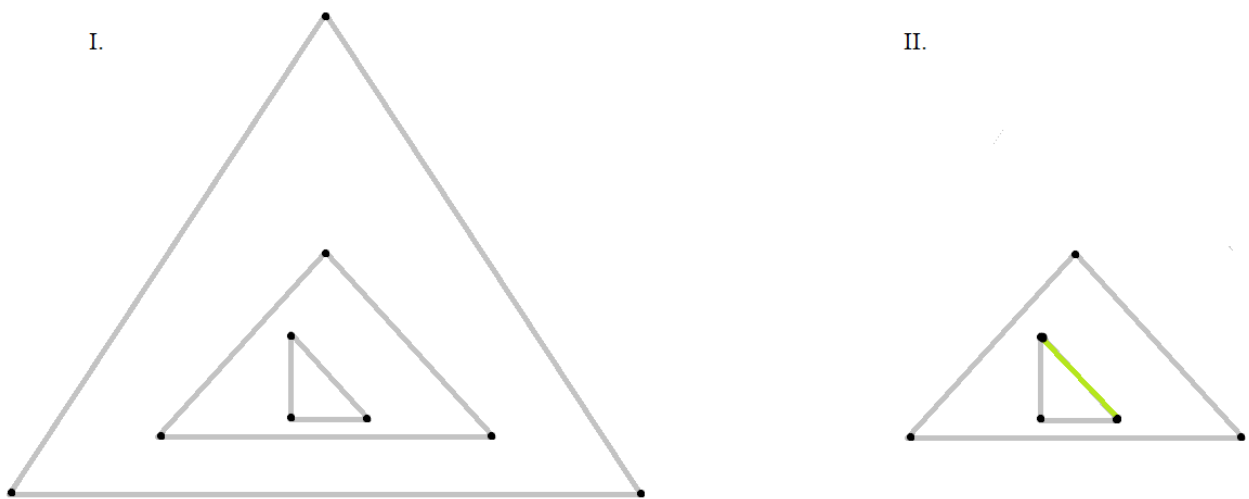


Рисунок 3.9

Проведемо по парі прямих, що проходять через найближчі вершини трикутника, з двох точок обраного відрізка. Ці прямі розіб'ють площу за межами трикутника на 4 області (рис. 3.10).

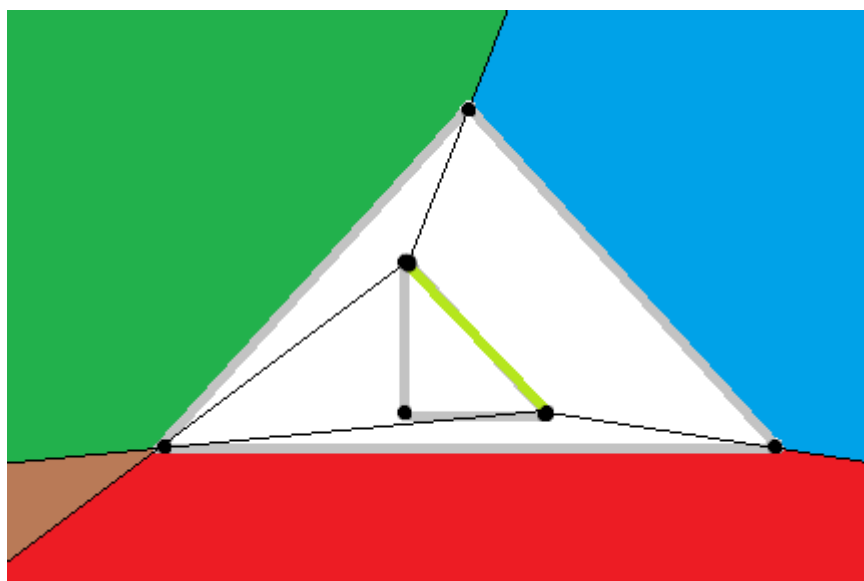


Рисунок 3.10

Оскільки точки розташовані в загальному положенні, то всі 3 точки, що залишаються, будуть розташовані в цих 4 секціях. Будемо використовувати принцип Діріхле. Якщо хоча б 1 точка лежить в синій області (область відділена стороною трикутника, яка паралельна до обраного відрізка), тоді маємо опуклий п'ятикутник (показано як (I) на рисунку 3.11). В іншому випадку мінімум дві точки лежать в зеленій, червоній, зеленій та коричневій або червоній та коричневій області. В такому випадку опуклий п'ятикутник теж утворюється (показано як (II) на рисунку 3.11).

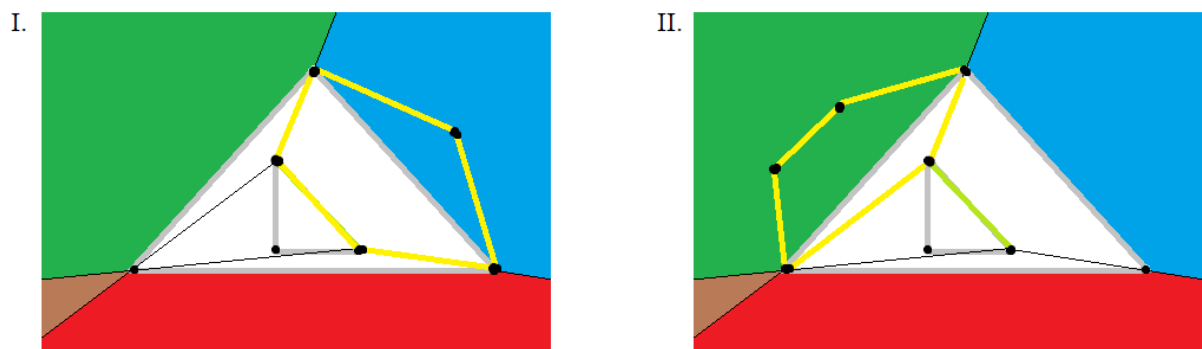


Рисунок 3.11

Отже, в конфігурації $(3, 3, 3)$ існує опуклий п'ятикутник. Останньою розглянемо конфігурацію $(3, 4, 2)$. Прибираємо зовнішній трикутник і побудуємо 2 можливих варіанти чотирикутника з відрізком всередині. Перший – продовження відрізка проходять через протилежні сторони чотирикутника (показано як (I) на рисунку 3.12), другий – продовження відрізка проходять через суміжні сторони чотирикутника (показано як (II) на рисунку 3.12). В другому випадку продовжений відрізок розділяє чотирикутник на область з 1 вершиною і на область A з 3-ма вершинами. В цьому випадку утворюється п'ятикутник при з'єднанні вершин відрізка з 3-ма вершинами області A (показано як (III) на рисунку 3.12).

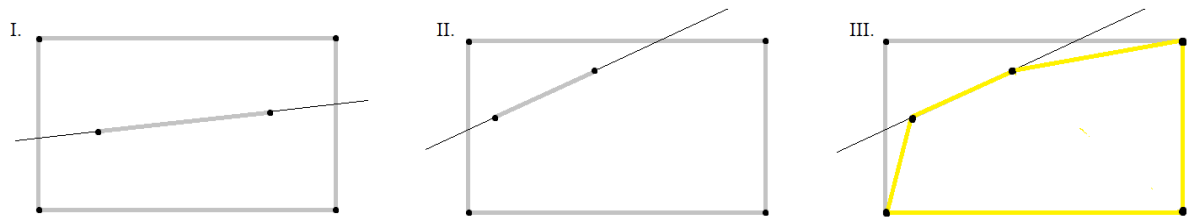


Рисунок 3.12

Розглянемо випадок коли продовження відрізка перетинає протилежні сторони. Проведемо по парі променів до найближчих 2 вершин з обох точок відрізка. Ці промені поділять площу зовні чотирикутника на 4 області (показано як (I) на рисунку 3.12). За принципом Діріхле – маємо 2 варіанти. Перший – маємо або 1 точку в синій або червоній області (область утворена променями проведеними з різних вершин). Другий – маємо 2 точки в зеленій або синій області (область утворена променями з однієї вершини). В першому (показано як (II) на рисунку 3.13) та другому (показано як (III) на рисунку 3.13) варіантах отримуємо опуклий п'ятикутник.

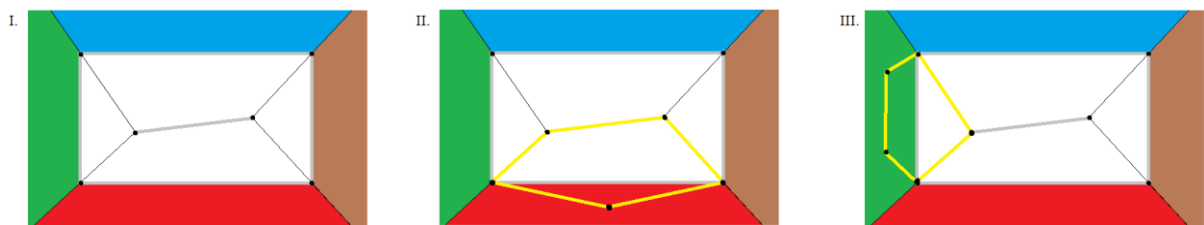


Рисунок 3.13

Отже, можемо стверджувати, що на довільно розташованих 9-ти точках завжди буде утворюватися опуклий п'ятикутник. ■

Висновки

В розділі 1 моєї курсової роботи були розглянуті основні означення та теореми, котрі використовувались в роботі, наприклад: теорема Рамсея для графів, означення та таблиця чисел Рамсея, теорема про оцінку зверху чисел Рамсея та наслідок з неї, означення багатокольорового числа Рамсея та формулювання теореми Хеллі.

В теоретичній частині (2.1) розділу 2 були розглянуті: теорема Рамсея для гіперграфів разом з доведенням, означення числа Рамсея для гіперграфів.

В практичній частині (2.2) розділу було сформульовані та розв'язані задачі про взаємозв'язок деяких чисел Рамсея для гіперграфів та багатокольорових чисел Рамсея (задачі 2.2.1-2.2.5), а також знайдені оцінки для $R_3(5; 4)$ та $R_3(6; 4)$ (твердження 2.2.1 та 2.2.2), що були одержані з розв'язання двох власно сформульованих нетривіальних задач (задачі 2.2.7 та 2.2.8). Також була розв'язана власно сформульована задача 2.2.9 на застосування одержаної оцінки для числа $R_3(5; 4)$ та теореми Хеллі.

В розділі 3 розглянута теорема Ердеша-Секереша, доведення якої базується на теоремі Рамсея для гіперграфів, а також доведення тверджень про те, що $G(4) = 5$, $G(5) \neq 8$ та $G(5) = 9$.

Список літератури

- [1] Rittaud Benoît, Albrecht Heeffer. *The Pigeonhole Principle, Two Centuries Before Dirichlet*. *Math Intelligencer*, Volume 36, Issue 2, 2014, Pages 27-29.
- [2] James Odziemiec Dickson. *An Introduction to Ramsey Theory on Graphs*. Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2011
- [3] R. Duncan Luce, Albert D. Perry. *A method of matrix analysis of group structure*, *Psychometrika*, Volume 14, Issue 2, 1949, Pages 95-116.
- [4] R. E. Greenwood, A. M. Gleason. *Combinatorial Relations and Chromatic Graphs*. *Canadian Journal of Mathematics*, Volume 7, 1955, Pages 1-7.
- [5] Kristina Buschur. *Introduction to Ramsey Theory*. 2011.
- [6] P. Erdos, G. Szekeres. *A combinatorial problem in geometry*. *Compositio Mathematica*, Tome 2, 1935, Pages 463-470.
- [7] F. P. Ramsey. *On a problem of formal logic*. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Volume s2-30, Issue 1, 1930, Pages 264-286.
- [8] Eduard Bosch, Jan-Hendrik Evertse. *Ramsey theory and applications*. Universiteit Leiden, Leiden, 2018.
- [9] J. Michael Steele. *Variations on the Monotone Subsequence Theme of Erdős and Szekeres*. *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, Volume 72, New York, 1995.
- [10] Sukumar Das Adhikari. *Aspects of Combinatorics and Combinatorics and Combinatorial Number Theory*. 2002.
- [11] Ludwig Danzer, Branko Grunbaum, Victor Klee. *Helly's Theorem and It's Relatives*. *Proceedings of Symposium in Pure*, Volume 7, 1963, Pages 101-180.
- [12] Vers Rosta. *Ramsey Theory Applications*. *Electronic Journal of Combinatorics*, Volume 1000, 2004.
- [13] Kerkko Luosto. *Ramsey Theory Is Needed for Solving Definability Problems of Generalized Quantifiers*. *Generalized Quantifiers and Computation, ESSLLI 1997*, *Lecture Notes in Computer Science*, Volume 1754, 1999.

- [14] Phokion G. Kolaitis, Jouko A. Väänänen. *Generalized quantifiers and pebble games on finite structures*. Annals of Pure and Applied Logic, Volume 74, Issue 1, 1995, Pages 23-75.
- [15] Burkhard Monien, Ewald Speckenmeyer. *Ramsey numbers and an approximation algorithm for the vertex cover problem*. Acta Informatica, Volume 22, 1985, Pages 115-123.
- [16] Yair Bartal, Béla Bollobás, Manor Mendel, *Ramsey-type theorems for metric spaces with applications to online problems*, Journal of Computer and System Sciences, Volume 72, Issue 5, 2006, Pages 890-921.
- [17] Prosenjit Bose, Hazel Everett, Sándor Fekete, Michael Houle, Anna Lubiw, Henk Meijer, Kathleen Romanik, Günter Rote, Thomas Shermer, Sue Whitesides, Christian Zelle. *A Visibility Representation for Graphs in Three Dimensions*. Journal of Graph Algorithms Applications, Volume 2, No. 3, 1998, Pages 1-16.
- [18] Helmut Alt, Michael Godau, Sue Whitesides. *Universal 3-dimensional visibility representations for graphs*. Computational Geometry, Volume 9, Issues 1-2, 1998, Pages 111-125.
- [19] Журнал «Квант», Физико-Математический Журнал для Школьников и Студентов, №2, 2009.