Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Магістерська робота
освітній ступінь – магістр

на тему: **«ІТЕРАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО НЕОБУМОВЛЕНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ ДЛЯ ПЕВНОЇ КАТЕГОРІЇ В РОЗДРІБНІЙ ТОРГІВЛІ»**

Виконав: студент 2-го року навчання,
Спеціальності
113 Прикладна математика

Мироненко Роман Олексійович

Керівник: Дрінь С. С.
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Рецензент: ____________________________

Магістерська робота захищена
з оцінкою ____________________________

Секретар ЕК____________________________
(підпис)

«______» ________________ 20___р.

Київ - 2024

Графік підготовки магістерської роботи до захисту

№ з/п	**ПЕРЕЛІК РОБІТ**	Термін виконання	Дата ознайомлення наукового керівника	Підпис наукового керівника	Примітки
1.	Вибір теми, затвердження її на засіданні кафедри та закріплення наукового керівника. Узгодження календарного графіка підготовки магістерської роботи. Ознайомлення студента з критеріями оцінювання магістерської роботи.	жовтень	12.10.2023		
2.	Вивчення джерел, літератури, періодичних видань, наукових публікацій, збір та узагальнення фактів, даних.	жовтень - листопад	16.11.2023		
3.	Складання плану магістерської роботи та узгодження із науковим керівником.	листопад	28.11.2023		
4.	Постановка експерименту, аналіз отриманих результатів наукового дослідження.	листопад - березень	12.03.2024		
5.	Проміжний контроль виконання роботи.	лютий	15.02.2024		
6.	Написаня кваліфікаційної роботи в цілому, ознайомлення зі першим варіантом наукового керівника.	січень - березень	28.03.2024		
	Розділ 1 (постановка проблеми, теоретичні основи, огляд літературних джерел).	квітень	06.04.2024		
	Розділ 2 (аналітично-дослідницька частина).	квітень	15.04.2024		
	Розділ 3 (проєктно-рекомендаційна частина).	квітень	25.04.2024		
7.	Повне завершення написання кваліфікаційної роботи, оформлення її згідно з вимогами й подання на відгук науковому керівнику.	квітень - початок травня	10.05.2024		
8.	Подання магістерської роботи для перевірки письмових робіт студентів НаУКМА на відповідність вимогам академічної доброчесності.	кінець травня	30.05.2024		
9.	Подання на зовнішню рецензію.	кінець травня	25.05.2024		
10.	Підготовка до захисту магістерської роботи на засіданні кафедри: написання доповіді та виготовлення ілюстративного матеріалу.	**до 17 травня**	16.05.2024		
11.	Підготовка до захисту магістерської роботи на засіданні кафедри: написання доповіді та виготовлення ілюстративного матеріалу.	**до 17 травня**	16.05.2024		
12.	Подання магістерської роботи на кафедру з усіма супроводжуючими документами.	**до 29 травня**	29.05.2024		
13.	Публічний захист перед екзаменаційною комісією	згідно з розкладом роботи ЕК	05.06.2024		

Графік узгоджено «_____» _________________ 2024 р.

Науковий керівник ___________________________________
(ПІБ)

Виконавець магістерської роботи ___________________________________
(ПІБ)

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Освітній ступінь магістра

Спеціальність 113 Прикладна математика

Освітньо-наукова програма "Прикладна математика"

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

____

____

"____"________________ 20__ року

ЗАВДАННЯ

ДЛЯ МАГІСТЕРСЬКОЇ РОБОТИ СТУДЕНТУ

Мироненку Роману Олексійовичу

1. Тема роботи: «Ітераційний підхід до необумовленого оптимального вибору для певної категорії в роздрібній торгівлі»

керівник роботи: Дрінь Світлана Сергіївна, кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

затверджені наказом вищого навчального закладу

від "___" ________ 20__ року № ___

2. Строк подання студентом роботи:

3. План роботи:

    1. Вступ
    2. Огляд існуючих методів
    3. Теоретичне представлення ітераційного методу
    4. Адаптація ітераційного методу
    5. Практичне застосування
    6. Висновки
    7. Список літератури

Зміст

Перелік умовних позначень

DFPM - The Discrete Functional Particle Method

SKU - Stock Keeping Unit

SIC - Selective Inventory Control

EOQ - Economic Order Quantity

ARIMA - Auto-regressive Integrated Moving Average

NaN - Not a Number

Анотація

У даній роботі ми розглядаємо сучасні методи оптимізації попиту для групи товарів та досліджуємо ітераційний підхід для знаходження оптимальної кількості товарів у певної заданої категорії.

В ході цієї роботи було досліджено методи прогнозування оптимального попиту та адаптовано метод DFPM (The Discrete Functional Particle Method) до прогнозування оптимального попиту в наперед визначеній категорії, за незмінних зовнішніх умов.

Ця робота показує, як традиційні статистичні методи та передові методи прогнозування за допомогою ітераційного методу DFPM можуть прогнозувати попит, що корисно як для академічних досліджень, так і для практичного застосувань у різних сферах.

1 Вступ

1.1 Актуальність

Роздрібна торгівля - це динамічна галузь, яка постійно розвивається, то ж вибір оптимальної стратегії для певної категорії товарів є ключовим фактором успіху для магазинів роздрібної торговлі. Успіх, в контексті такої задачі, можна охарактеризувати як максимізація прибутків, або ж мінімізація витрат. Ефективне управління запасами дозволяє не лише знизити витрати на утримання товарів на складі, але й підвищити рівень обслуговування клієнтів за рахунок постійної наявності потрібних одиниць товарів. Крім того, правильна стратегія закупівель на основі аналізу даних та прогнозування попиту допомагає уникнути надлишкового або недостатнього запасу товарів, що може призводити до втрат.

Використання ітераційного підходу для пошуку оптимального попиту дозволяє постійно адаптувати стратегії під змінні умови ринку та вимоги споживачів. Цей підхід сприяє більш точному прогнозуванню та зменшенню ризиків недообслуговування чи перенасичення ринку товарами. Таким чином, ефективне управління запасами на основі ітераційного підходу є необхідним елементом стратегії будь-якого сучасного магазину роздрібної торгівлі для досягнення успіху та стійкості на ринку.

1.2 Мета дослідження

Метою дослідження є побудова та застосування ітераційного методу для прогнозування оптимального попиту в умовах невизначеності споживчих уподобань.

Реалізація нашої мети передбачає розгляд таких задач:

- Огляд існуючих методів.
- Ознайомлення з методом DFPM.
- Адаптація, побудова та застосування ітераційного методу DFPM.
- Практичне застосування.

1.3 Опис структури кваліфікаційної роботи

Розділ **"1 Вступ"** містить опис актуальності даного дослідження, мету дослідження, а також огляд задач, що мають бути реалізованими.

Розділ **"2 Огляд існуючих підходів для прогнозування попиту"** містить опис вже відомих методів та підходів, що використовуються для рішення задач прогнозування попиту.

Розділ **"3 Теоретична основа ітераційного підходу"** містить 4 підрозділи: **"3.1 Огляд літератури"** - в якому описується сучасні підходи до побудови ітераційного методу; **"3.2 The Discrete Functional Particle Method"** - де є опис теоретичної складової ітераційного методу DFPM; **"3.3 Постановка задачі"** - де описується постановка задачі оптимізації, яку потрібно виконати; **"3.4 Адаптування методу DFPM до нашої задачі та умов"** - в цьому підрозділі описується як відбувається адаптація ітераційного методу з огляду на поставлену задачу.

Розділ **"4 Практичне застосування та програмна реалізація"** містить 3 підрозділи: **"4.1 Імплементація DFPM"** - де описується реалізація ітераційного методу на тестовому наборі даних; **"4.2 Огляд та підготовка набору даних"** - де описується реальні набори даних та кроки їхньої обробки; **"4.3 Застосування DFPM до реального набору даних"** - де описується реалізація та зміни в побудові ітераційного методу.

Розділ **"Висновки"** містить результати даного дослідження та роздуми про подальший розвиток даного підходу в контексті оптимізації товарів.

Розділ **"Список літератури"** містить список усіх використаних джерел в процесі дослідження.

2 Огляд існуючих підходів для прогнозування попиту

Прогнозування є звичайним статистичним завданням у бізнесі, де воно допомагає прийняти інформативні рішення щодо планування виробництва, а також надає керівництву інформацію для довгострокового стратегічного планування.

Існує величезна кількість наукових праць, що стосуються прогнозування попиту. Деякі з цих досліджень включають методи екстраполяції (Smith Stanley. (2013)), експоненційне згладжування (Hyndman R.J. (2018)), векторні моделі авторегресії (Lütkepohl (2013)), тощо.

Завдання прогнозування, зазвичай, включає п'ять основних кроків:

1. Визначення проблеми.

Часто, це є найскладнішою частиною прогнозування. Ретельне визначення проблеми вимагає розуміння того, як будуть використовуватися прогнози, кому потрібні прогнози та як функція прогнозування вписується в організацію, яка їх потребує.

2. Збір інформації.

Завжди потрібні принаймні два види інформації: статистичні дані та накопичений досвід людей, які збирають дані та використовують прогнози. Інколи, буває важко отримати таку кількість історичних даних, щоб підібрати хорошу статистичну модель. У цьому випадку можна використовувати методи оцінювального прогнозування. Іноді старі дані будуть менш корисними через структурні зміни в прогнозованій системі; В такому разі, можна використовувати лише найновіші дані.

3. Попередній аналіз.

Попередній аналіз, або, як його ще називають - попередній пошуковий аналіз, варто починати з побудови даних у графіку, шукаючи послідовні закономірності, тенденції, сезонність, бізнес-цикли, тощо.

4. Вибір і підгонка моделей.

Найкраща модель для використання залежить від наявності історичних даних, міцності зв'язків між змінною прогнозу та будь-якими пояснювальними змінними, а також від способу використання прогнозів. Зазвичай порівнюють дві-три потенційні моделі. Кожна модель сама по собі є штучною конструкцією, яка базується на наборі припущень (явних і неявних) і зазвичай включає один або більше параметрів, які необхідно оцінити з використанням відомих історичних даних.

5. Використання та оцінка моделі прогнозування.

Після вибору моделі та оцінки її параметрів модель використовують для складання прогнозів. Ефективність моделі можна належним чином оцінити лише після того, як стануть доступними дані за прогнозований період. Було розроблено ряд методів, які допомагають оцінити точність прогнозів. Під час використання моделі прогнозування на практиці виникають численні практичні проблеми, наприклад, як працювати з відсутніми значеннями та викидами або як мати справу з короткими часовими рядами.

Серед прикладів моделей, існують регресійні моделі, методи експоненціального згладжування, моделі ARIMA Бокса-Дженкінса, динамічні регресійні моделі, ієрархічне прогнозування, тощо. В наступних абзацах ми коротко переглянемо деякі з існуючих підходів для прогнозування попиту.

ABC-Analysis

Метод ABC-контролю (Tanwari et al. (2000)) запасів передбачає систему, яка контролює запаси та використовується для різного роду продукції для управління дистрибуції. Він також відомий як вибірковий контроль запасів, або SIC (Selective Inventory Control).

ABC-аналіз - це метод, завдяки якому запаси поділяються на три категорії, тобто A, B і C за спадною вартістю. Предмети категорії A мають найвищу цінність, предмети категорії B нижчі за A, а предмети категорії C мають найнижчу вартість.

Цей метод допомагає бізнесу контролювати запаси, дозволяючи керівництву зосередитися на товарах найвищої цінності (товари A). Варто зазначити, що данний підхід дозволяє доволі варіативне представлення цінності товарів. Це може бути, як і кількісне представлення, відображення вартості, обороту, попиту, тощо.

Метод став невід'ємною частиною бізнесу, і широко використовується для незавершених товарів, промислових виробів, запасних частин, компонентів, готових виробів, складальних елементів, тощо. Відповідно до цього методу, керівництво поділяє товари на три категорії A, B і C; де A — найважливіший предмет, а C — найменш цінний.

Аналіз запасів ABC базується на принципі Парето. Принцип Парето стверджує, що 80% обсягу продажів припадає на 20% найкращих товарів. Це означає, що 20% найкращих товарів принесуть 80% прибутку для бізнесу. Воно також відоме як правило 80/20.

EOQ Method

Економічна кількість замовлення (EOQ) — це ідеальна кількість одиниць, яку компанія повинна придбати, щоб задовольнити попит, одночасно мінімізуючи витрати на запаси, такі як витрати на зберігання, витрати на дефіцит і витрати на замовлення (Presutti Jr and Trepp (1970)). Ця модель планування виробництва була розроблена в 1913 (Erlenkotter (1990)), і з часом лише удосконалювалася. Економічна формула кількості замовлення припускає, що витрати на попит, замовлення та утримання залишаються незмінними.

Формула для розрахунку економічного обсягу замовлення виглядає як

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\frac{2DS}{X}},$$

де, $\mathbf{Q}$ - кількість одиниць EOQ, D - попит(зазвичай, на річній основі), S - вартість замовлення, X - вартість замовлення.

Метою формули EOQ є визначення оптимальної кількості одиниць продукту для замовлення. Якщо це досягнуто, компанія може мінімізувати свої витрати на купівлю, доставку та зберігання одиниць. Формулу EOQ можна модифікувати для визначення різних рівнів виробництва або інтервалів замовлення, а корпорації з великими ланцюгами поставок і високими змінними витратами використовують алгоритм у своєму комп'ютерному програмному забезпеченні для визначення EOQ.

EOQ є важливим інструментом руху грошових коштів. Формула може допомогти компанії контролювати суму готівки, пов'язану з балансом запасів. Для багатьох компаній запаси є найбільшим активом, окрім людських ресурсів, і ці підприємства повинні мати достатньо запасів, щоб задовольнити потреби клієнтів. Якщо EOQ може допомогти мінімізувати рівень запасів, заощаджені кошти можна використати для інших бізнес-цілей або інвестицій.

Якщо згадувати про обмеження, то EOQ передбачає, що споживчий попит постійний. Розрахунок також передбачає, що витрати на замовлення та зберігання залишаються постійними. Цей факт ускладнює або унеможливлює формулу для врахування ділових подій, таких як зміна споживчого попиту, сезонні зміни у витратах на запаси, втрачений дохід від продажів через брак запасів або знижки на покупку, які компанія може отримати, купуючи запаси у великих кількостях.

ARIMA моделі

ARIMA (Auto-regressive Integrated Moving Average) - це спосіб моделювання даних часових рядів для прогнозування (тобто для передбачення майбутніх точок у ряді) таким чином, що:

- Враховується модель зростання/спаду даних.
- Враховується швидкість зміни зростання/спаду даних.
- Враховується шум між послідовними точками часу.

Дані часових рядів - це дані, що складаються з послідовності точок, узятих у послідовні однакові моменти часу.

Такий підхід полягає у розгляді значення Y в момент часу t та додаванні/відніманні значень Y у попередні моменти часу, а також додаванні/відніманні похибок з попередніх моментів часу.

Класична формула для такого підходу виглядає, як:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{dt-1} + \phi_p Y_{dt-p} + \cdots + \theta_1 e_{t-1} + \theta_q e_{t-q} + e_t,$$

де, p означає кількість попередніх («лагових») значень Y, які потрібно додати/відняти до Y у моделі; d означає кількість диференціювань, необхідних для того, щоб перетворити дані у стаціонарний сигнал, тобто такий, що має постійне середнє значення впродовж часу; q позначає кількість попередніх або запізнілих значень для похибки, які додаються або віднімаються до Y. Це відповідає за компонент "ковзної середньої"у моделі ARIMA (Shumway et al. (2017)).

3 Теоретична основа ітераційного підходу

3.1 Огляд літератури

Ітераційні методи є досить новим підходом, хоча й включають класичні методи, такі як ітерація Ландвебера з прискоренням Нестерова та методи спряжених градієнтів (Neubauer (2000), Neubauer (2017)), ітераційні методи на основі методу Рунге-Кутта (Haelterman et al. (2009)). За основу нашого дослідження було взято метод динамічних функціональних частинок (DFPM) (Gulliksson and Mazur (2020)). Цей підхід застосовується для розв'язання рівнянь за допомогою загасаючої динамічної системи другого порядку. Ця динамічна система розв'язується симплексним методом, який спеціально налаштований для консервативних систем.

DFPM був розроблений та застосований для розв'язання багаточленних лінійних матричних рівнянь (Dmytryshyn et al. (2022)). Згодом, цей підхід був адаптований для вирішення таких оптимізаційних проблем, як оптимізація вибору портфеля (Gulliksson et al. (2023)), задля мінімізації ризику.

В нашому дослідження, ми адаптуємо DFPM до сфери роздрібної торгівлі, щоб оптимізувати роботу магазину. В нашому випадку, нам потрібно мінізувати витрати та максимізувати прибуток.

В наступному розділі ми розглянемо теоретичну основу цього ітераційного методу.

3.2 The Discrete Functional Particle Method

Спершу, розглянемо задачу мінімізації без урахування обмежень

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{R}^n} V(\mathbf{u}), \tag{1}$$

де $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - це принаймні двічі неперервно диференційована опукла функція, яка має єдине рішення $\mathbf{u}^*$. Основна ідея розв'язання (1) полягає у використанні того факту, що рішення $\mathbf{u}^*$ для (1), також є стаціонарним рішенням для демпфованої системи другого порядку динамічної

$$\ddot{u}(t) + \eta\dot{u}(t) = -\nabla V(u(t)), \quad \eta > 0, \tag{2}$$

це рішення унікальне та глобально експоненційно стійке, (Ali Jendoubi et al. (2015)). Динамічну систему (2) найефективніше розв'язувати за допомогою симплексного методу, такого як, наприклад, симплексний метод Рунге–Кутта, або метод Стормера–Верле, які були використані у роботі (Hairer et al. (2006)) для переформулювання (2) як системи першого порядку

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -\eta v - \nabla V(u). \end{aligned} \tag{3}$$

Підхід до знаходження розв'язку (1), через розв'язання (2) за допомогою симплексного методу - називається методом DFPM. Поєднання демпфованої динамічної системи з ефективним симплексним розв'язувачем робить DFPM дуже потужним і конкурентоспроможним методом.

Наша задача полягає в тому, щоб застосувати метод DFPM до задачі прогнозування попиту. Оскільки обмеження є лінійними, їх можна усунути, перетворивши початкову задачу на задачу без обмежень, яку можна розв'язати за допомогою DFPM.

Визначимо

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1^T \\ \mu^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix},$$

тоді,обмеження можна записати як $\mathbf{Bw} = \mathbf{c}$, і розв'язок має вигляд $\mathbf{w} = \mathbf{Zu} + \mathbf{g}$, де $\mathbf{Z}$ охоплює нульовий простір матриці $\mathbf{B}$, а $\mathbf{g}$ - є будь-яким розв'язком рівняння $\mathbf{Bw} = \mathbf{c}$.

Після деяких математичних перетворень, задачу мінімізації (11) можна охарактеризувати, як

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{u^T Z^T \Sigma Z u} + \mathbf{2 g^T \Sigma Z u} + \mathbf{g^T \Sigma g} := \mathbf{\Phi(u)}. \tag{4}$$

Тепер, розглядаючи задачу (4): якщо визначити $\mathbf{M} = \mathbf{Z^T \Sigma Z}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{Z^T \Sigma g}$, то ми отримаємо

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n-2}}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{u^T M u} - \mathbf{u^T d}, \quad \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(\mathbf{n-2}) \times (\mathbf{n-2})}, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n-2}}, \tag{5}$$

де ми робимо припущення, що $\mathbf{M}$ - це позитивно-визначена, напівсиметрична матриця. У загальному випадку задачі мінімізації (1) можна визначити

$$V(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T\mathbf{d}, \tag{6}$$

а також сформулювати метод DFPM для $V(\mathbf{u})$ у (6)

$$\ddot{\mathbf{u}} + \eta\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{d} - \mathbf{M}\mathbf{u}, \tag{7}$$

або, як система першого порядку

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\eta\mathbf{v} + (\mathbf{d} - \mathbf{M}\mathbf{u}). \end{aligned} \tag{8}$$

Нам, також, додатково потрібні початкові умови. Нехай, $\mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{u_0}, \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{0}) = \mathbf{v_0}$. Використовуючи симплексний метод Ейлера для (8), ми отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{k+1} &= (I - \Delta t\eta)\mathbf{v}_k - \Delta t(\mathbf{d} - \mathbf{M}\mathbf{u}_k) \\ \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \Delta t\mathbf{v}_{k+1}, \end{aligned} \tag{9}$$

або

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{G}\mathbf{w}_k + \mathbf{b}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t^2\mathbf{M} & \Delta t(1 - \Delta t\eta)\mathbf{I} \\ \Delta t\mathbf{I} & (1 - \Delta t\eta)\mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\Delta t^2\mathbf{d} \\ -\Delta t\mathbf{d} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

де Δt - це крок часу, η - це параметр демпфування, або ж, іншими словами, коефіцієнт згасання. Також, можна визначити $\mathbf{w}_k = [\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k]^T$. Рівняння (10) визначає роботу методу DFPM для нашої задачі.

3.3 Постановка задачі

Розглянемо певну категорію товарів. Нехай $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k)^T$ - це оборот товару за місяць. Вектор середніх значень - μ, а коваріаційна матриця - $\mathbf{\Sigma}$. Вектор ваг - $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_k)^T$, де w_j позначає вагу j-го товару. Позначимо $\mathbf{1}_k$ - k-вимірний вектор одиниць, а $\mathbf{I}$ - одиничну матрицю.

Тоді, постановка нашої задачі виглядатиме, як

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^T\mathbf{1} = 1, \mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} = q, \tag{11}$$

де q — очікувана норма прибутку.

В такому разі, існує частинний випадок розв'язку проблеми оптимізації (11)

$$\mathbf{w} = \frac{C - qB}{AC - B^2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} + \frac{qA - B}{AC - B^2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \tag{12}$$

де $A = \mathbf{1}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}, B = \mathbf{1}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}, C = \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$.

У реальному житті, як μ, так і $\mathbf{\Sigma}$ - є невідомими параметрами, тому ми не можемо визначити $\mathbf{w}$. В такому разі, слід оцінити ці параметри за допомогою вибіркової оцінки. Найвідоміші методи знаходження невідомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i, \quad \text{and} \quad \hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}\right)\left(\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}\right)^T. \tag{13}$$

де $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_N), \quad \mathbf{V} = \mathbf{I} - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, N - кількість спостережень.

3.4 Адаптування методу DFPM до нашої задачі та умов

В нашому випадку, ми маємо справу з роботою магазину роздрібної торговлі, тому ми пропонуємо адаптувати метод DFPM до роботи з нашими вхідними даними. Припустимо, ми маємо наступні набори даних з інформацією про різні товари в магазині.

Табл. 1: Таблиця з кількістю продажів за місяць

	Січень	Лютий	Березень	Квітень
Товар 1	20	15	25	10
Товар 2	30	10	5	20
Товар 3	25	10	10	20
Товар 4	25	10	10	30
Товар 5	25	10	10	20

Нам цікава лише остання інформація, то ж ми будемо орієнтуватись на найсвіжіші дані, щоб знаходити оптимальну кількість товарів на наступний місяць. На цьому етапі, нам потрібно надати продажам певну вагу. Для цього, спочатку, відредагуємо наші дані, та отримаємо інформацію за останній місяць. Представимо ці дані, як вектор ваг - $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_k)^T$, де кількість продажу товарів відображається у відсотках. Тобто, вага j-го продажу - це відсоток від загальної кількості усіх продажів.

Для кращого розумінняі, візуалізуємо це:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Тобто, фактично, ми розраховуємо вагові коефіцієнти, як

$$\mathbf{w}_i = \frac{n_i}{N}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Позначимо обороти відповідних товарів у відповідному місяці через $\mathbf{x}$. Представимо це, як $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k)^T$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 1200 \\ 800 \\ 1100 \\ 1100 \end{pmatrix}$$

З цим набором даних ми можемо розпочати підготовку для застосування методу DFPM. Перш за все, варто знайти середнє значення, а також коваріаційну матрицю. Як μ, так і $\mathbf{\Sigma}$, будуть оціненні за допомогою вибіркових значень. В нашому випадку, формули матимуть вигляд

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

де n - кількість елементів у масиві оборотів, x_i - кожне окреме значення обороту.

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}(X_i, X_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n-1},$$

де $\hat{\mathbf{\Sigma}}(X_i, X_i)$ - це варіація між змінними між змінними X_i.

Тепер, ми можемо розпочати обчислення невідомих змінних, що потребуються для побудови алгоритму ітераційного методу. З огляду на теоретичну основу методу DFPM, ми повинні знайти ще декілька змінних, а саме матриці $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Z}$ та $\boldsymbol{M}$.

Матриця $\boldsymbol{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & ... & \mu_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & ... & \frac{1}{x_i} \end{pmatrix},$$

забезпечує наступні два основних обмеження: перша частина матриці гарантує, що сума ваг буде дорівнювати одиниці. Це обмеження можна записати, як

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i = 1,$$

в той час як друга частина матриці забезпечує, що ми досягнемо заданого рівня очікуваного доходу. Це обмеження записується, як:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i \boldsymbol{\mu}_i = q.$$

У нашому випадку ми використаємо зворотні значення оборотів відповідних товарів для побудови другого рядка матриці $\boldsymbol{B}$. Це зроблено для того, щоб врахувати відносну важливість кожного товару залежно від його обороту.

Таким чином, матриця $\boldsymbol{B}$ виглядатиме наступним чином:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{5000} & \frac{1}{1200} & \frac{1}{800} & \frac{1}{1100} & \frac{1}{1100} \end{pmatrix}.$$

У контексті задачі мінімізації ризику під обмеженням, матриця $\boldsymbol{Z}$ дозволяє нам знайти напрямки, в яких ми можемо змінювати ваги продажів без порушення заданих обмежень. Це дозволяє нам працювати в зменшеному просторі змінних, що спрощує задачу оптимізації. У нашій задачі матриця $\boldsymbol{Z}$ може бути обчислена шляхом транспонування матриці $\boldsymbol{B}$. Це спрощення може здатися неочевидним, але воно має свої підстави, які будуть розглянуті в наступних абзацах.

В алгоритмі методу DFPM, ми припускаємо, що матриця $\boldsymbol{Z}$ повинна бути ортогональною до $\boldsymbol{B}$. Ми, в свою чергу, спрощуємо це обчислення. Оскільки, обмеження на суми ваг та очікуваний дохід є лінійними, їхнє транспонування дає матрицю, яка є ортогональною до обмежень. Також, матриця $\boldsymbol{B}$ має просту структуру, що дозволяє використовувати транспонування як спосіб обчислення $\boldsymbol{Z}$. Це спрощення допустиме завдяки природі наших обмежень і структурі матриці $\boldsymbol{B}$. Воно дозволяє обчислити матрицю напрямків, що є ортогональною до матриці обмежень, без втрати загальної коректності алгоритму.

Також, ми використовуємо спрощену модель з однаковими значеннями на діагоналі матриці $\boldsymbol{M}$, так як ми не враховуваєм конкретні коваріації між активами. Ми пояснили це, при обгрунтуванні знаходження матриці коваріацій, адже ми працюємо лише з однією змінною, а саме оборотом товарів. Натомість, ми враховуємо загальну варіацію усіх оборотів товарів. Це дозволяє зберегти простоту обчислень та дослідження руху в просторі обмежень, що відповідає основним принципам DFPM.

З цією інфрмацією ми готові до побудови ітераційного процесу. Алгоритм має вигляд:

1. Початкова фаза.

Визначення початкових ваг $\boldsymbol{w}$. Цей крок, фактично, вже було зроблено, завдяки представленню кількостей продажу товарів у якості вагових коефіцієнтів.

2. Обчислення вектору, що представляє функцію втрат або вигоди від рішення $\boldsymbol{g}$.

Ми обчислюємо вектор $\boldsymbol{g}$, як добуток матриці B на вектор c.

3. Оновлення $\boldsymbol{v}_k$.

Оновлюємо $\boldsymbol{v}$ на кожному кроці за допомогою формули

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = (1 - \eta dt)\boldsymbol{v}_k + \Delta t(\boldsymbol{g} - M\boldsymbol{u}),$$

де, η - це коефіцієнт згасання, Δt - крок часу, $\boldsymbol{u}$ - вектор впливу.

4. Оновлення $\boldsymbol{u}_k$.

Оновлюємо $\boldsymbol{u}$ за формулою

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k + \Delta t \boldsymbol{v}_{k+1}.$$

5. Повторення ітерацій.

6. Обчислення вагових коефіцієнтів $\boldsymbol{w}$.

Після закінчення ітерацій обчислюємо оптимальні ваги $\boldsymbol{w}$ за допомогою формули

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}.$$

7. Нормалізація вектора вагових коефіцієнтів $\boldsymbol{w}$.

Нормалізуємо ваги $\boldsymbol{w}$, щоб забезпечити, що їх сума дорівнює 1

$$\boldsymbol{w}_{normalized} = \frac{w}{\sum w}.$$

Таким чином, ми знаходимо оптимальні вагові коефіцієнти для кожного з товарів з урахуванням обмежень. Можна визначити Кожна ітерація дозволяє наблизитися до оптимального рішення, враховуючи коефіцієнти демпфування і кроку часу, що дозволяє уникнути швидкого розбіження. Так, як наші вагові коефіцієнти з самого початку були інтерпретовані з кількістей продажів, ми отримуємо оптимальне рішення для подальшого розподілення товарів з огляду на оборот відповідних товарів у минулому місяці.

У наступному розділі, ми застосуємо наш підхід на практиці та поділимось результатами. Також, ми реалізуємо вже існуючий підхід, щоб порівняти оптимізовані кількості товарів і зробити висновки.

4 Практичне застосування та програмна реалізація

В цьому розділі ми імплементуємо ітераційний метод до тестового набору, що був заданий власноруч, а також розглянемо реалізацію і на реальному датасеті, що відображає інформацію про обіг товарів у магазині. Також розглянемо результати роботи ітераційного методу.

4.1 Імплементація DFPM

Спочатку, ми задаємо вхідні дані власноруч, для спрощення побудови ітераційного методу, перед його застосуванням на реальних даних. В такому разі, вхідні дані мають вигляд:

- $x_i = [5000, 1200, 800, 1100, 1100]$.
- $w = [0.1, 0.2, 0.2, 0.3, 0.2]$.

Вектор x_i представляє гіпотетичні значення обороту товарів. w - це представлення вагових коефіцієнтів для п'яти наших товарів відповідно. Зазначимо, що в цій реалізації ітераційного методу, ми задаємо дані власноруч, тобто, не обчислюємо вагові коефіцієнти. В реалізації методу DFPM на реальних даних нам будуть потрібні додаткові операції з масивами, адже нам слід буде обчислювати вагові коефіцієнти, що спочатку будуть представлені, як кількість продажів.

Наступним кроком є ініціалізація та обчислення усіх необхідних змінних, що потрібні для реалізації методу DFPM. Ми описали процес знаходження та вигляд цих змінних у третьому розділі, а саме, в підпункті 3.4, в якому ми розширили сферу застосування ітераційного методу до прогнозування оптимального попиту.

Реалізація ітераційного методу складається з трьох основних кроків, які повторюються на кожній ітерації. Це оновлення векторів g, v та u. Вектор g визначає вплив кожного обмеження на ваги активів, v оновлюється на основі попереднього значення v, поточного значення g, значення матриці M та вектора u. Задані нами параметри Δt і η контролюють крок оновлення і демпфування.

Після завершення ітераційного процесу ми обчислюємо оптимізовані значення w та проводимо їхню нормалізацію. Результатом програми є оптимальний розподіл товарів, з якими ми працювали. Він відображається в якості оновленого векортору w:

- Optimal weights: $[0.37173913043478257, 0.16521739130434782, 0.1434782608695652, 0.15978260869565217, 0.15978260869565217]$.

Ми оптимізували попит на товари з огляду на оборот відповідних товарів у минулому місяці. Наприклад, якщо оборот першого товару в x_i був найбільшим (5000), представлення розподілу його кількості після оптимізації теж має найбільше значення. Результати роботи програми також можна побачити на третьому рисунку в Додатку А.

В наступній частині ми ознайомимось з реальними наборами даних, їх виглядом, усіма операціями по підготовці датасетів до застосування методу DFPM.

4.2 Огляд та підготовка набору даних

Розглянемо набори даних, на якому ми будемо тестувати ітераційний підхід. Початковий вигляд одного з двох таких наборів можна побачити на другому рисунку в Додатку А. В нашому випадку, ми маємо два датасети:

- goods sales.
- goods turnover.

Goods Sales

Цей набір даних містить 4202 записи, що означають кількості продажів відповідних товарів за певний період. Ми нівелюєм період, за який нам доступна інформація про продажі, адже для реалізації нашої задачі ми будемо працювати з найсвіжішою інформацією, тобто даними за останній наявний місяць.

Goods Turnover

Цей набір даних містить 4202 записи, що означають оборот продажу відповідних товарів за певний період.

В наборі даних, також, є так звані нульові записи. Перед початком роботи з імплементації методу DFPM слід попередньо обробити датасети.

На фото в додатку В можна побачити, як виглядають перші 5 рядків датасету. Варто зазначити, що інформація в першому рядку та в першому стовпчику обох датасетів є ідентичною, це перелік товарів усіх категорій та відлік місяців відповідно. Далі, ми будемо проводити однакові дії для підготовки обох наборів даних.

Перш за все, ми проводимо очистку даних від NaN значення, а також проводимо фільтрацію за певною категорією. В наборі даних присутня така логіка дерева категорій:

- Категорія.
  - 1. Домашній затишок та комфорт.
  - 10. Офіс і канцтовари.
  - 11. Товари до свята.
- Група. Приклад для категорії 1.
  - 1.1 Текстиль домашній
  - 1.2 Текстиль кухонний
  - 1.3 Фототовари
- Підгрупа 1. Приклад для групи 1.1
  - 1.1.1 Подушки
  - 1.1.2 Пледи
  - 1.1.3 Комплекти постільної білизни
- Підгрупа 2. Приклад для підгрупи 1.1.1
  - 1.1.1.1 Подушки 70x70
  - 1.1.1.2 Подушки 50x50

– 1.1.1.3 Подушки 40х40

Отже, в нас є категорії товарів, що, в свою чергу, поділені на вужчі сегменти. Ми хочемо працювати з конкретною підгрупою товарів, то ж, з огляду на датасет, обираємо підгрупу товарів та проводимо пошук в датасетах, спочатку за Підгрупою 1 (в нашому випадку, було обрано Підгрупу 1.1), а згодом і за Підгрупою 2. В Підгрупі 2 ми обрали працювати з подушками. Всі вищеперераховані дії були зроблені за допомогою пошуку потрібної комбінації слів у першому стовпчику, і видалення рядка, якщо така комбінація не представлена у першому рядку.

Останньою зміною в датасеті буде представлення інформації про товар лише за останній наявний місяць. На цьому етапі, таким чином, в нас є два масиви даних, які у подальшому ми інтерпретуємо, як необхідні вхідні дані для побудови методу DFPM. Вигляд одного з двох таких масивів представлений на другому рисунку в Додатку А.

4.3 Застосування DFPM до реального набору даних

Процес застосування DFPM до реальних датасетів буде відбуватись так само, як і для тестових даних. В даному випадку, ми ініціалізуємо вектори x_i та w з попередньо оброблених датасетів:

- `df_oborot = pd.read_csv('goods turnover.csv')`.
- `df_sales = pd.read_csv('goods sales_last_month.csv')`.

Спочатку, ми визначили вектор x_i, записавши в нього значення з датасету про оборот товарів. Далі, щоб визначити вектор вагових коефіцієнтів, ми створили новий список y_i, куди записували початкові значення, що були взяті з датасету. Потім ми обраховували суму всіх значень масиву про продажі товарів та визначали кожен елемент вектора w, як відношення початкового значення кількості продажів до загальної суми продажу. Таким чином, ми отримали вектор оборотів та початкові вагові коефіцієнти:

- `x_i` = [13976.25, 25869.13, 28940.49, 11187.86, 20110.25]

- `w` = [0.08918881313482677, 0.3799916515931543, 0.513566161124252l, 0.00041742034228468O7, 0.01683595380548212]

Далі, ми проводимо такі самі кроки для застосування ітераційного методу, що й для тестових даних. В процесі застосування DFPM ми зіткнулись з проблемою, що результат оптимізації повертав значення NaN у нормалізованому векторі w. Згодом, ми перевірили та отримали, що це відбувається через те, що алгоритм DFPM може бути чутливим до масштабу даних. Коли одне значення x_i значно більше за інші - це може призвести до того, що інші значення стануть незначними в розрахунках, що в результаті призводить до нестабільності та помилок. Це пояснюється тим, що реальні дані про оборот продажу товарів не розподілений нормальним чином, в нього немає чітко визначеного середнього значення та визначеного відхилення.

Щоб вирішити цю проблему, ми нормалізували вектор x_i за максимальним значенням. Його нормалізований вигляд:

- `x_i = Normalized Turnover:` [0.48293066 0.89387326 1. 0.38658157 0.69488284]

Після цього, метод почав працювати справно і ми отримали такі результати:

- `Optimal weights:` [0.17523410221729105, 0.2239942392019318, 0.2365866419108758, 0.16380186054272589, 0.2003831561271755].

В цьому випадку, також зберігається закономірність, що спостерігалась на тестовому наборі даних. Оптимізуючи розподіл товарів ми можемо побачити, як впливає оборот товару на фінальний розподіл вагових коефіцієнтів. Якщо оборот третього товару був найбільшим, ми приходимо до такого висновку: оптимальна кількість відповідного товару теж буде найбільша. Протилежна ситуація відбувається з товарами, що мають менший попит.

Таким чином, ми отримуємо оптимальний розподіл товарів певної категорії на наступний місяць, використовуючи оборот та кількість продажів товарів з даної категорії за минулий місяць. Паралельно ми розв'язуємо проблему магазину, при якій не всі товари, які є в наявності, продаються та залишаються на складі. Отриманий оптимальний розподіл, також, дозволяє розв'язати й дану задачу.

Підсумуючи, метод DFPM може бути застосований для розв'язку задачі прогнозування оптимального попиту. Метод може використовуватися в сфері роздрібної торгівлі для оптимізація кількості товарів певної категорії для наступного місяця, спираючись на наявну інформацію з обігу відповідних товарів у минулому місяці.

Висновки

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню прогнозування оптимального попиту шляхом застосування ітераційного методу DFPM.

У другому розділі розглядалися вже інсуючі методи та підходи для прогнозування попиту.

У третьому розділі був здійснений огляд існуючих ітераційних методів(підрозділ 3.1), ознайомлення з теоретичною частиною досліджуваного методу DFPM(підрозділ 3.2), було сформовано постановку задачі(підрозділ 3.3), а також проведено адаптацію DFPM до нашої задачі(підрозділ 3.4).

У четвертому розділі ми провели програмну реалізацію методу DFPM. Ми провели імплементацію DFPM на тестових даних(підрозділ 4.1), оглянули реальний набір даних з інформацією про обіг товару в магазині(підрозділ 4.2), а також застосували DFPM до реальних наборів даних(підрозділ 4.3)

Також були отримані такі результати:

- Спрогнозований оптимальний розподіл кількості товарів певної категорії на тестовому наборі даних.
- Спрогнозований оптимальний розподіл кількості товарів заданої категорії з реального набору даних.

В подальшому, такий підхід до прогнозування попиту та оптимізації кількості товарів може бути розвинений у багатьох напрямках. Може бути здійснене окреме дослідження впливу коефіцієнтів кроку та згасання, також існує можливість поєднання нашого методу з іншими, вже існуючими підходами оптимізації. Можна дослідити додавання додаткових змінних, що присутні в інших методах, наприклад рівень витрат на продукцію, максимальна місткість складу, де зберігається товар, дослідити вплив сезонності на результати, тощо.

Список використаних джерел

Ali Jendoubi, M., Bégout, P., Bolte, J., and Jendoubi, M. (2015). On damped second-order gradient systems. *HAL*, 2015.

Dmytryshyn, A., Fasi, M., and Gulliksson, M. (2022). The dynamical functional particle method for multi-term linear matrix equations. *Applied Mathematics and Computation*, 435:127458.

Erlenkotter, D. (1990). Ford whitman harris and the economic order quantity model. *Operations Research*, 38(6):937–946.

Gulliksson, M. and Mazur, S. (2020). An iterative approach to ill-conditioned optimal portfolio selection. *Computational Economics*, 56(4):773–794.

Gulliksson, M., Oleynik, A., and Mazur, S. (2023). Portfolio selection with a rank-deficient covariance matrix. *Computational Economics*, pages 1–23.

Haelterman, R., Vierendeels, J., and Van Heule, D. (2009). A generalization of the runge–kutta iteration. *Journal of computational and applied mathematics*, 224(1):152–167.

Hairer, E., Hochbruck, M., Iserles, A., and Lubich, C. (2006). Geometric numerical integration. *Oberwolfach Reports*, 3(1):805–882.

Hyndman R.J., Athanasopoulos, G. (2018). *Forecasting: principles and practice, 2nd edition*. OTexts.

Lütkepohl, H. (2013). Vector autoregressive models. In *Handbook of research methods and applications in empirical macroeconomics*, pages 139–164. Edward Elgar Publishing.

Neubauer, A. (2000). On landweber iteration for nonlinear ill-posed problems in hilbert scales. *Numerische Mathematik*, 85(2):309–328.

Neubauer, A. (2017). On nesterov acceleration for landweber iteration of linear ill-posed problems. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 25(3):381–390.

Presutti Jr, V. J. and Trepp, R. C. (1970). More ado about economic order quantities (eoq). *Naval Research Logistics Quarterly*, 17(2):243–251.

Shumway, R. H., Stoffer, D. S., Shumway, R. H., and Stoffer, D. S. (2017). Arima models. *Time series analysis and its applications: with R examples*, pages 75–163.

Smith Stanley., Tayman Jeff., S. D. A. (2013). *A Practitioner's Guide to State and Local Population Projections*. Springer.

Tanwari, A., Lakhiar, A. Q., and Shaikh, G. Y. (2000). Abc analysis as a inventory control technique. *Quaid-E-Awam University research journal of engineering, science and technology*, 1(1).

Додаток А

```
Turnover: [5000, 1200, 800, 1100, 1100]

Initial weights: [0.1, 0.2, 0.2, 0.3, 0.2]

Optimal weights: [0.37173913043478257, 0.16521739130434782, 0.1434782608695652, 0.15978260869565217, 0.159782608695
65217]
```

Рис. 1: Результат роботи на тестових даних

```
            Назва категорії  2019-01  2019-02  2019-03  2019-04  2019-05  \
0        1.1.1.1 подушки 70х70      3.0      0.0      0.0      0.0      0.0
1        1.1.1.2 подушки 50х70    780.0    608.0    799.0     23.0    411.0
2        1.1.1.3 подушки 40х40   1661.0   1752.0   3623.0   2901.0   2179.0
3  1.1.1.4 подушки на стілець   1039.0    904.0    543.0    125.0    203.0
4    1.1.1.5 подушки велюрові   1392.0    345.0   1278.0   1052.0    910.0

   2019-06  2019-07  2019-08  2019-09  ...  2022-09  2022-10  2022-11  \
0    742.0    529.0    725.0   1382.0  ...        0        0        0
1   1425.0    832.0    892.0   1489.0  ...     2886     1613     1079
2   1374.0   3457.0   2387.0   2268.0  ...     7459     2940     4142
3   2010.0   5291.0   3677.0   2186.0  ...     3713     1929     2152
4    685.0   1300.0    866.0    560.0  ...      683      287      136

   2022-12  2023-01  2023-02  2023-03  2023-04  2023-05  2023-06
0        0        0        0        0        0        0        0
1      836      320      230      207      198      187      186
2     9530     5586     7370    10054    11091    11910    13081
3     9074     6690     7459     5316     7165    10394     8518
4       42       26       14      488      127     1772     1173

[5 rows x 55 columns]
```

Рис. 2: Початкове представлення датасету

	Назва категорії	2023-06
0	1.1.1.5 подушки велюрові	641.0
1	1.1.1.4 подушки на стілець	2731.0
2	1.1.1.3 подушки 40х40	3691.0
3	1.1.1.2 подушки 50х70	3.0
4	1.1.1.1 подушки 70х70	121.0

Рис. 3: Вигляд датасету після обробок