

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-
МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

ІНДЕКСИ ГРАФІВ КОКСТЕРА

Студент: Забродський Владислав, ПМ-4
Науковий керівник: Тимошкевич Л.М

Основні поняття

- **Графом Кокстера G** називаємо сукупність (G, f) , де G — граф, f — відображення множини ребер графа G у множину, що складається з натуральних чисел, яка строго більші за 2 та символа ∞ .
- **Матриця суміжності** — матриця, елементи якої приймають значення $2 \cos \frac{\pi}{k}$, якщо $f(i, j) = k$, 2, якщо $f(i, j) = \infty$, 0, якщо вершини не з'єднані ребром.
- **Індекс графа** — максимальне власне значення λ_G .
- **Злічений граф Кокстера** — граф Кокстера, що має зліченну множину вершин.
- **Індексом зліченого графа** називаємо додатне число або символ ∞ , яке визначається:

$$\text{ind } G = \sup_{\Gamma \in \text{Fin}(G)} \text{ind } \Gamma$$

Основні твердження

■ Твердження 1 [2 - 4]

G — злічений зв'язний граф. При видаленні вершини або ребра, зменшенні мітки на ребрі графа G його індекс не збільшується.

• Наслідок 1 [2 - 4]

• Нехай G_1, G_2 — злічені графи. $G_1 \subset G_2$. Тоді $ind G_1 \leq ind G_2$.

• Твердження 2 [4 - 5]

Нехай G - злічений зв'язний граф. При підрозбитті внутрішнього ребра, індекс не збільшується.

■ Твердження 3 [2 - 4]

При збільшенні мітки, індекс графа збільшується.

■ Твердження 4 [2]

Нехай G - злічений граф, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність його скінченних підграфів, що задовольняє умовам:

- $G_n \subset G_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = G$

Тоді $ind G = \lim_{n \rightarrow \infty} ind G_n$

Індекс графа, що складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга

Теорема 1 [2, 4]

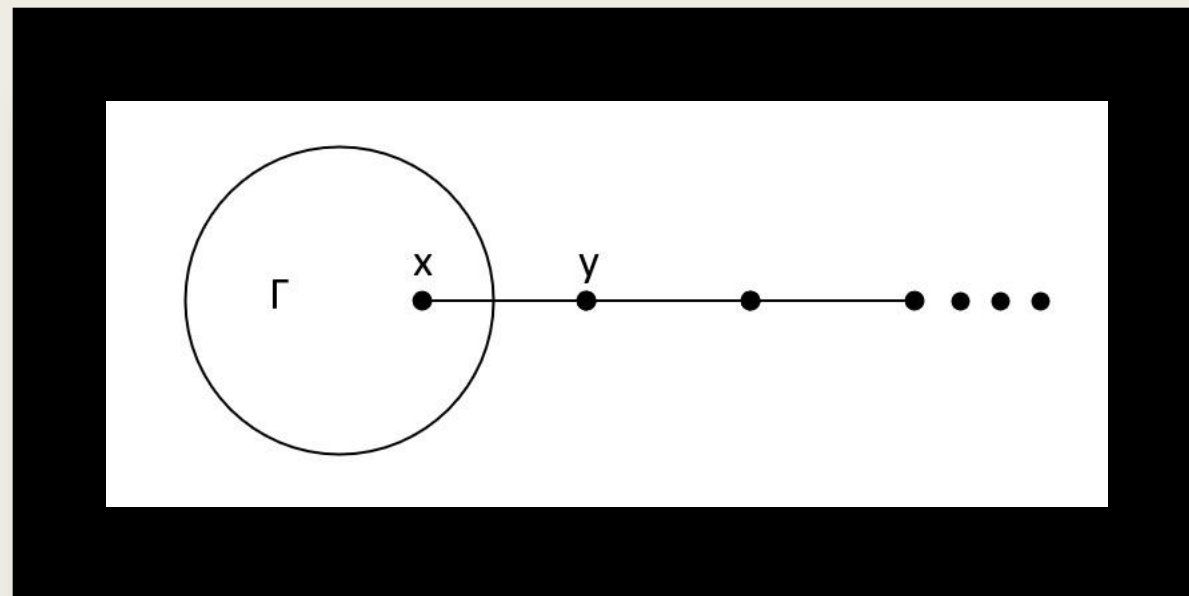
Нехай злічений граф (Γ, x) складається з скінченного графа Γ та нескінченного ланцюга. Тоді:

- Якщо $(\Gamma, x) \in \{A_\infty, D_\infty, B_\infty\}$, то $ind(\Gamma, x) = 2$
- Якщо $(\Gamma, x) \notin \{A_\infty, D_\infty, B_\infty\}$, то $ind(\Gamma, x) > 2$ та є

максимальним коренем

рівняння

$$\frac{P_{\Gamma-x}(\lambda)}{P_\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

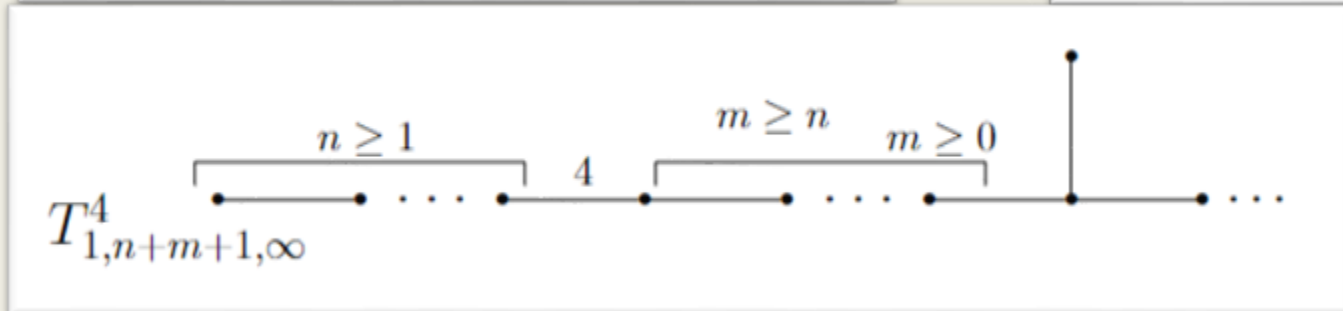
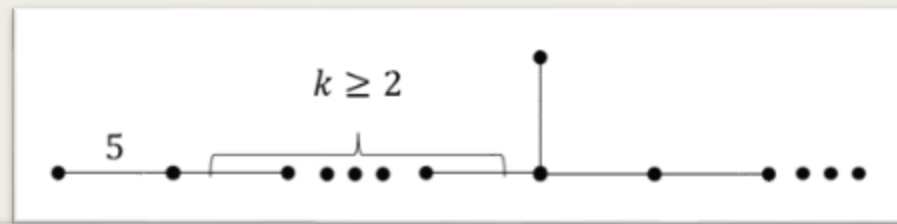
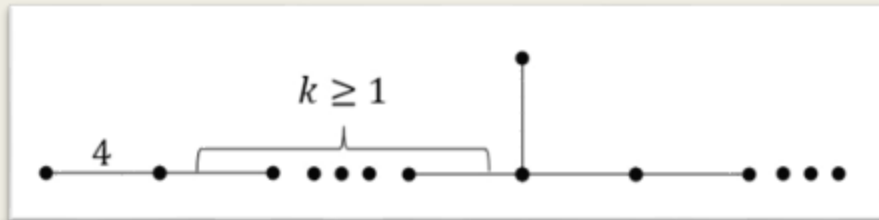


Класифікація злічених графів Кокстера

- Повна класифікація злічених графів Кокстера у проміжку $(\sqrt{\sqrt{5} + 2}, \frac{3}{\sqrt{2}}]$ для підпорядкованих графів $T_{1,k,\infty}$.
- Теорема

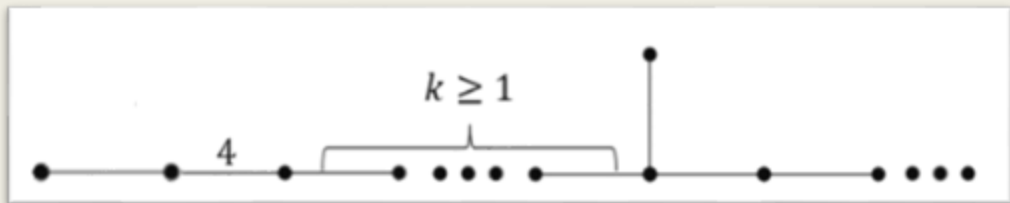
Нехай G – злічений зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом $T_{1,k,\infty}$,
тоді

- Якщо $ind G \in (\sqrt{\sqrt{5} + 2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$, то G – один із графів серії:

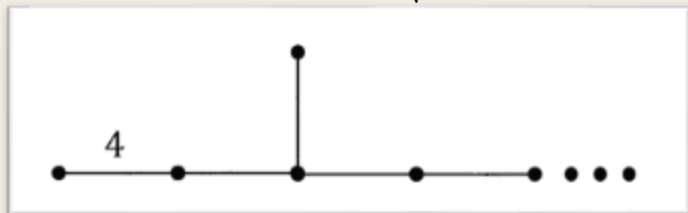


Приклади, використані при доведенні

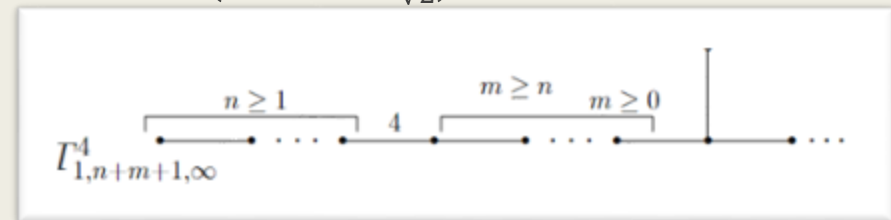
▶ $ind G > \frac{3}{\sqrt{2}}$



■ $ind G \in (\sqrt{\sqrt{5} + 2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$



▶ $ind G \in (\sqrt{\sqrt{5} + 2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$



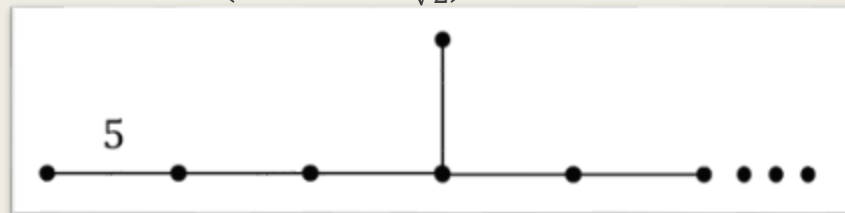
▶ $ind G > \frac{3}{\sqrt{2}}$



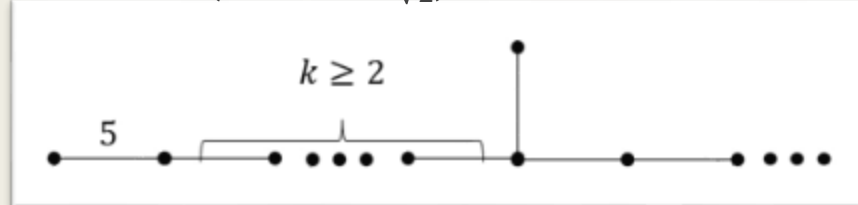
▶ $ind G > \frac{3}{\sqrt{2}}$



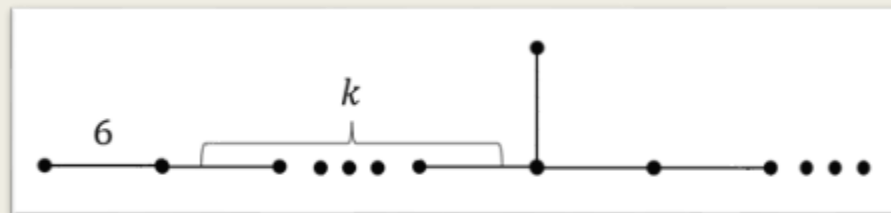
▶ $ind G \in (\sqrt{\sqrt{5} + 2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$



▶ $ind G \in (\sqrt{\sqrt{5} + 2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$



▶ $ind G > \frac{3}{\sqrt{2}}$

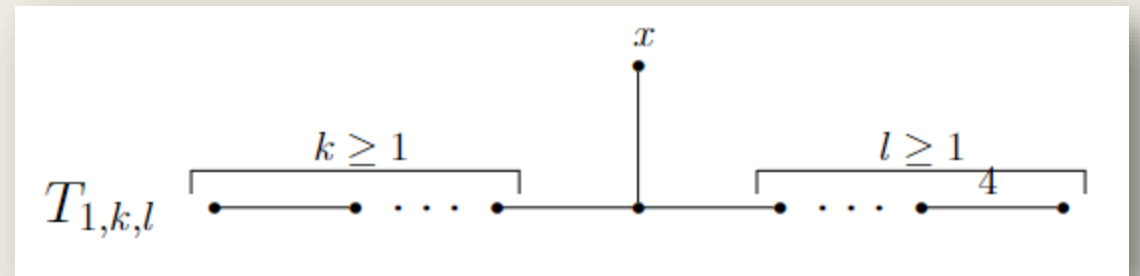
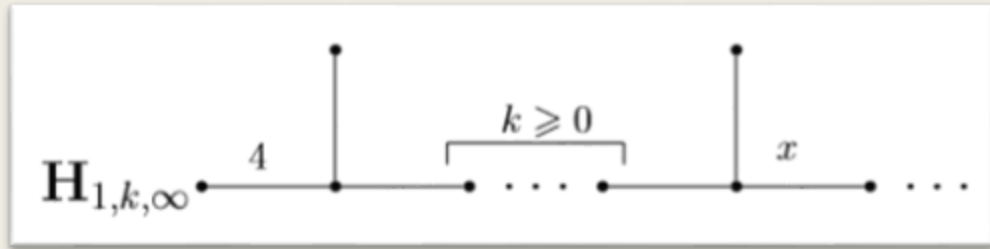
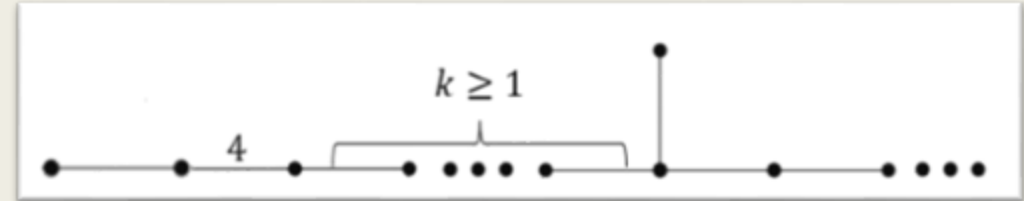
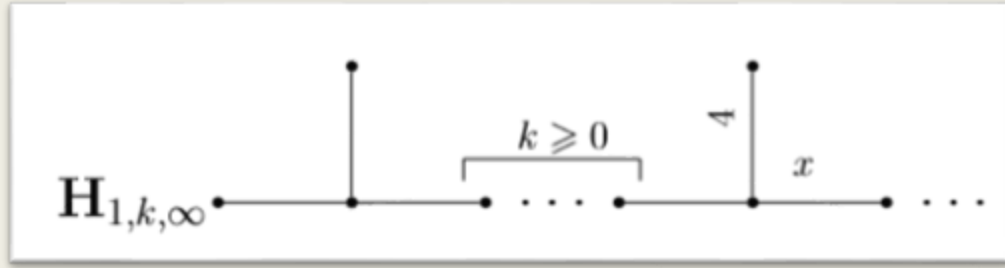


Повна класифікація злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ для підпорядкованих графів $H_{1,k,\infty}$

■ Теорема

Нехай G – злічений зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом $H_{1,k,\infty}$, тоді його індекс належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ тоді і лише тоді, коли всі позначки дорівнюють 3.

Приклади для доведення



Список літератури

1. Самойленко Ю.С., Тимошкевич Л.М., Про спектральну теорію графів Кокстера, “У світі математики” 15 (2009), №3, с.14-24.
2. Коротков А.С., Самойленко Ю.С., Про індекси злічених графів, “У світі математики” 18 (2012), №3, с.7-17.
3. Коротков А.С., Тимошкевич Л.М., Аналог теореми Сміта для злічених графів Кокстера, Доповіді Національної академії наук України, 2013, №12, с. 19–24
4. Тимошкевич Л.М., Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера, Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2015.- 160 с.
5. Svetkovic D. M., Applications of graph spectra, Svetkovic D. M., Gutman I., Zbornik radova. – 2009. – 13(21). – 138 pp.
6. Тимошкевич Л. М., Когут М. В. Класифікація злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

The image features two large, thick black L-shaped brackets. One is positioned on the left side, with its vertical bar extending downwards and its horizontal bar extending to the right. The other is on the right side, with its vertical bar extending upwards and its horizontal bar extending to the left. These brackets frame the central text.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!