Оператори між множинами в топологічних просторах

Катерина Антошина (ПМ-3)

Національний університет "Києво-Могилянська академія"
Керівник: Козеренко Сергій Олександрович

2020

Зміст

Основні означення

Нехай X довільна непорожня множина і $\tau \subset 2^X$ така родина підмножин множини X, що виконуються наступні умови (аксіоми топології):

- порожня множина і множина X належать τ;
- об'єднання будь-якої сукупності множин з τ міститься в τ;
- перетин кожних двох множин з τ належить τ.

Така родина τ називається топологією на X, а множина X носієм топології. При цьому, пара (X, τ) називається топологічним простором.

Підмножина A топологічного простору X називається відкритою, якщо $A \in \tau$.

Підмножина A топологічного простору X називається замкненою, якщо її доповнення $X \setminus A$ є відкритим. Оператор замикання задає найменшу замкнену множину, яка містить у собі A.

Позначення: $\operatorname{Cl} A$.

Аксіоми Куратовського

Теорема 3.4 [11] Нехай X деяка множина, а $F : 2^X \to 2^X$ відображення. Тоді існує топологія $\tau \subset 2^X$ така, що в ній $F = \mathrm{Cl}$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1. $F(\emptyset) = \emptyset$;
2. $A \subset F(A)$ для всіх $A \subset X$;
3. $F(F(A)) = F(A)$ для всіх $A \subset X$;
4. $F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$ для всіх $A, B \subset X$.

Оператор внутрішності задає найбільшу відкриту множину, яка міститься в A. Позначення: $\operatorname{Int} A$.

Твердження 3.1 Для множини A в топологічному просторі мають місце наступні рівності:

$$\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A),$$

$$\operatorname{Int} A = X \setminus \operatorname{Cl}(X \setminus A).$$

Твердження 3.5 Нехай X деяка множина, а $F : 2^X \to 2^X$ відображення. Тоді існує топологія $\tau \subset 2^X$ така, що в ній $F = \mathrm{Int}$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1. $F(X) = X$;
2. $F(A) \subset A$ для всіх $A \subset X$;
3. $F(F(A)) = F(A)$ для всіх $A \subset X$;
4. $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$ для всіх $A, B \subset X$.

Оператор зовнішності (exterior) $\operatorname{Ext} A$ це сукупність усіх відкритих множин, які не перетинають A. Зовнішність задає найбільшу відкриту множину, яка міститься в $X \backslash A$:

$$\operatorname{Ext} A = \operatorname{Int}(X \backslash A) = X \backslash \operatorname{Cl} A$$

Теорема 3.6 [9] Нехай X деяка множина, а $F : 2^X \to 2^X$ відображення. Тоді існує топологія $\tau \subset 2^X$ така, що в ній $F = \operatorname{Ext}$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1. $F(\emptyset) = X$;
2. $A \cap F(A) = \emptyset$ для всіх $A \subset X$;
3. $F(X \backslash F(A)) = F(A)$ для всіх $A \subset X$;
4. $F(A \cup B) = F(A) \cap F(B)$ для всіх $A, B \subset X$.

Оператор межі ∂ визначається так: $\partial A = \mathrm{Cl}\, A \setminus \mathrm{Int}\, A$.

Теорема 3.7 [9] Нехай X деяка множина, а $F : 2^X \to 2^X$ відображення. Тоді існує топологія $\tau \subset 2^X$ така, що в ній $F = \partial$ тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1. $F(\emptyset) = \emptyset$;
2. $F(A) = F(X \setminus A)$ для всіх $A \subset X$;
3. $F(A) \subset B \cup F(B)$ для всіх $A \subset B \subset X$;
4. $F(F(A)) \subset A$ для всіх $A \subset X$;
5. $F(A \cup B) \subset F(A) \cup F(B)$ для всіх $A, B \subset X$.

Оператори $+$ і $*$ визначаються так [7]: $A^+ = \operatorname{Cl} A \backslash A$, $A^* = A \backslash \operatorname{Int} A$.

Зовнішні характеризації для них також були отримані в роботі [7] та розміщені на с. 12-13 даної курсової роботи.

Задача курсової роботи

Основною задачею курсової роботи є опис множин комутування для всіх пар операторів $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}, \partial, \mathrm{Ext}, +, *$.

$\mathrm{Cl}, \mathrm{Int} \Leftrightarrow A = B \bigtriangleup C$

У 1961 році Левін [12] вирішив цю задачу для операторів Cl та Int:

Теорема 2.13 [12] Оператори Cl та Int комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли A можна зобразити у вигляді симетричної різниці відкрито-замкненої множини із ніде не щільною множиною.

$\mathrm{Int}, \partial \Leftrightarrow A = B \cup C$

Схожий критерій для множин комутування операторів Int та ∂ був отриманий в 1968 році у роботі Стейлі [17]:

Теорема 2.14 [17] Оператори Int та ∂ комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли A можна зобразити у вигляді об'єднання відкрито-замкненої множини із ніде не щільною множиною.

Тому в цій курсовій роботі досліджено інші 13 пар операторів.

$\mathrm{Cl}, \mathrm{Ext} \Leftrightarrow \mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\, A)$

Твердження 4.1 Оператори Cl та Ext комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли її замикання $\mathrm{Cl}\, A$ відкрите.

Наслідок 4.3 У зв'язному топологічному просторі оператори Cl та Ext комутують на непорожній множині A тоді й тільки тоді, коли A всюди щільна.

$\mathrm{Cl}, \partial \Leftrightarrow \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\, A) \subset A$

Твердження 4.5 Оператори Cl та ∂ комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли A є напівзамкненою множиною.

Наслідок 4.6 Якщо множина A замкнена або ніде не щільна, то оператори Cl та ∂ комутують на A.

Наслідок 4.7 Якщо оператори Cl та ∂ комутують на множині A, то її границя ∂A ніде не щільна.

$(\mathrm{Cl}, \partial), + \Leftrightarrow \mathrm{Cl}\, A = A$

Теорема 4.10 Для множини A наступні умови еквівалентні:

1. оператори Cl та $+$ комутують на A;
2. оператори ∂ та $+$ комутують на A;
3. A замкнена.

$\mathrm{Cl}, *$

Зауваження 4.11 Із рівності $\mathrm{Cl}\, A = (\mathrm{Cl}\, A)^* \sqcup \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\, A)$ природньо слідує, що оператори Cl та $*$ комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Cl}(A^*) \sqcup \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}\, A)$.

Твердження 4.12 Якщо A замкнена або ніде не щільна, то оператори Cl та $*$ комутують на A.

Твердження 4.13 Якщо оператори Int та ∂ комутують на множині A, то оператори Cl та $*$ теж комутують на A.

Найбільша теорема курсової

Теорема 4.16 Нехай B є відкрито-замкненою множиною, а множина C є ніде не щільною. Оператори Cl та $*$ комутують на симетричній різниці $B \triangle C$ тоді й тільки тоді, коли перетин $B \cap C$ замкнений.

Характеризація nd-просторів

Топологічний простір називається nd-простором [6] (англ. nodec space), якщо кожна його ніде не щільна множина є замкненою.

Наслідок 4.17 Топологічний простір є nd-простором тоді й тільки тоді, коли кожна множина комутування для пари $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ є також і множиною комутування для пари $\mathrm{Cl}, *$.

(Не)розкладні простори

Топологічний простір називається розкладним [10] (англ. resolvable), якщо його можна представити як диз'юнктне об'єднання двох всюди щільних множин. Інакше, простір є нерозкладним (англ. irresolvable). Далі, простір сильно нерозкладний [8] (англ. strongly irresolvable), якщо кожен його відкритий підпростір нерозкладний. В роботі [15] було показано, що топологічний простір є сильно нерозкладним тоді й тільки тоді, коли кожна його множина із порожньою внутрішністю є ніде не щільною (еквівалентно, кожна всюди щільна множина має всюди щільну внутрішність).

Нові характеризації

Твердження 4.18 Нехай X топологічний простір. Тоді:

1. оператори $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ комутують на кожній відкритій множині тоді й тільки тоді, коли X екстремально незв'язний;
2. оператори $\mathrm{Cl}, \mathrm{Int}$ комутують на кожній ніде не щільній множині тоді й тільки тоді, коли X сильно нерозкладний.

Наслідок 4.19 Оператори Cl та Int комутують на кожній множині в X тоді й тільки тоді, коли X є екстремально незв'язним та сильно нерозкладним.

Субмаксимальний простір

Топологічний простір називається субмаксимальним (англ. submaximal), якщо кожна його всюди щільна множина є відкритою (еквівалентно, кожна множина із порожньою внутрішністю є замкненою).

Твердження 4.20 Топологічний простір є субмаксимальним тоді й тільки тоді, коли множина A^+ (еквівалентно, множина A^*) замкнена для всіх A.

Досконало незв'язний простір

Топологічний простір називається досконало незв'язним [6] (англ. perfectly disconnected), якщо він є T_0-простором та кожна пара його неперетинних множин не має спільних граничних точок.

Теорема 4.21 [1] Простір є досконало незв'язним тоді й тільки тоді, коли він екстремально незв'язний та субмаксимальний.

Наведемо характеризацію в термінах комутування операторів $\mathrm{Cl}, *$.

Твердження 4.22 Оператори Cl та $*$ комутують на кожній множині в X тоді й тільки тоді, коли X досконало незв'язний.

$\mathrm{Int}, \mathrm{Ext} \Leftrightarrow A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$

Твердження 4.23 Для множини A наступні умови еквівалентні:

1. оператори Int та Ext комутують на A;
2. оператори Cl та ∂ комутують на $X \setminus A$;
3. A напіввідкрита.

Наслідок 4.24 Якщо A відкрита або $\mathrm{Int}\, A$ всюди щільна, то оператори Int та Ext комутують на A.

$\mathrm{Int}, + \Leftrightarrow \mathrm{Int}\, A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}\, A)$

Твердження 4.30 Для множини A наступні умови еквівалентні:

1. оператори Int та $+$ комутують на A;
2. оператори Cl та Ext комутують на $X \setminus A$;
3. внутрішність $\mathrm{Int}\, A$ замкнена.

Наслідок 4.31 Якщо оператори Int та ∂ комутують на множині A, то й оператори Int та $+$ також комутують на A.

$\mathrm{Ext}, (\partial, +, *) \Leftrightarrow \mathrm{Cl}\, A = \mathrm{Cl}(X \setminus A) = X$

Теорема 4.33 Для множини A наступні твердження еквівалентні:

1. оператори Ext та ∂ комутують на A;
2. оператори Ext та $+$ комутують на A;
3. оператори Ext та $*$ комутують на A;
4. A та її доповнення $X \setminus A$ є всюди щільними множинами.

Наслідок 4.34 Оператори Ext та ∂ (еквівалентно, $\mathrm{Ext}, +$ або $\mathrm{Ext}, *$) комутують на кожній множині $A \neq \emptyset, X$ тоді й тільки тоді, коли простір X є антидискретним.

$\partial, * \Leftrightarrow \partial A = \mathrm{Cl}(A^*) \wedge \mathrm{Int}(\partial A) = \emptyset$

Твердження 4.36 Оператори ∂ та $*$ комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли її границя $\partial A = \mathrm{Cl}(A^*)$ ніде не щільна.

Наслідок 4.37 Якщо A замкнена або ніде не щільна, то оператори ∂ та $*$ комутують на A.

$+, * \Leftrightarrow \partial A = \mathrm{Cl}(A^*)$

Твердження 4.41 Оператори $+$ та $*$ комутують на множині A тоді й тільки тоді, коли $\partial A = \mathrm{Cl}(A^*)$.

Наслідок 4.42 Якщо оператори ∂ та $*$ комутують на A, то оператори $+$ та $*$ теж комутують на A.

Наслідок 4.43 Якщо A передзамкнена множина (зокрема, якщо A або її внутрішність $\mathrm{Int}\, A$ замкнена), то оператори $+$ та $*$ комутують на A.

Квазі-дискретний простір

Топологічний простір X називається квазі-дискретним (або простором розбиття), якщо його топологія має базу, яка є розбиттям X. Очевидно, що простір є квазі-дискретним тоді й тільки тоді, коли кожна його відкрита множина є замкненою (еквівалентно, кожна замкнена множина є відкритою).

Наслідок 4.46 Для топологічного простору X наступні умови еквівалентні:

1. оператори $\mathrm{Cl}, \mathrm{Ext}$ комутують на кожній множині;
2. оператори Int, ∂ комутують на кожній відкритій (еквівалентно, напіввідкритій) множині;
3. оператори $\mathrm{Int}, +$ комутують на кожній множині;
4. оператори $+, *$ комутують на кожній відкритій множині;
5. X квазі-дискретний.

Плани на майбутнє

У майбутньому планується дослідити задачу опису множин комутування для ширшої кількості пар операторів (наприклад, для операторів похідної множини та ізольованих точок множини), а також розглянути інші типи операторних рівнянь в топологічних просторах не тільки для пар, але й для трійок (рівняння типу $F(G(A)) = H(A)$) та четвірок операторів (рівняння типу $F(G(A)) = H(K(A))$).

Список літератури I

- G. Bezhanishvili, L. Esakia and D. Gabelaia, Some results on modal axiomatization and definability for topological spaces, *Stud. Logica* **81(3)** (2005), 325–355.
- M. Bowron and S. Rabinowitz, Problem 10577: closure, complement and arbitrary union, *Amer. Math. Monthly* **104(2)** (1997), 169.
- M. Bowron, Problem 11059: closure, complement and union, *Amer. Math. Monthly* **111(1)** (2004), 64–65.
- T. A. Chapman, A further note on closure and interior operators, *Amer. Math. Monthly* **69(6)** (1962), 524–529.
- A. Csaszar, γ-quasi-open sets, *Stud. Sci. Math. Hung.* **38(1-4)** (2001), 171-176.

Список літератури II

- E.K. van Douwen, Applications of maximal topologies, *Topology Appl.* **51** (1993), 125–139.
- N. Elez and O. Papaz, The new operators in topological space, *Math. Morav.* **17-2** (2013), 63–68.
- J. Foran and P. Liebnitz, A characterization of almost resolvable spaces, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **40(1)** (1991), 136–141.
- H. Gabai, The exterior operator and boundary operators, *Amer. Math. Monthly*, **71**, (1964), 1029—1031.
- E. Hewitt, A problem of set-theoretic topology, *Duke Math. J.* **10** (1943), 309–333.
- C. Kuratowski, Sur l'operation A de l'Analysis Situs, *Fund. Math.* **3** (1922), 182–199.

Список літератури III

N. Levine, On the commutivity of the closure and interior operators in topological spaces, *Amer. Math. Monthly* **68(5)** (1961), 474–477.

N. Levine, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly* **70(1)** (1963), 36–41.

A.S. Mashhour, M.E. Abd El-Monsef and S.N. ElDeeb, On precontinuous and weak precontinuous mappings, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt* **53** (1982), 47–53.

D. Rose, K. Sizemore and B. Thurston, Strongly irresolvable spaces, *Int. J. Math. Math. Sci.* **2006** (2006), 1–12.

B.M. Scott and Z. Robinson, The boundary topology of a space, *Amer. Math. Monthly* **89(5)** (1982), 307–309.

Список літератури IV

D.H. Staley, On the commutativity of the boundary and interior operators in a topological space, *Ohio J. Sci.* **68(2)** (1968), 84.