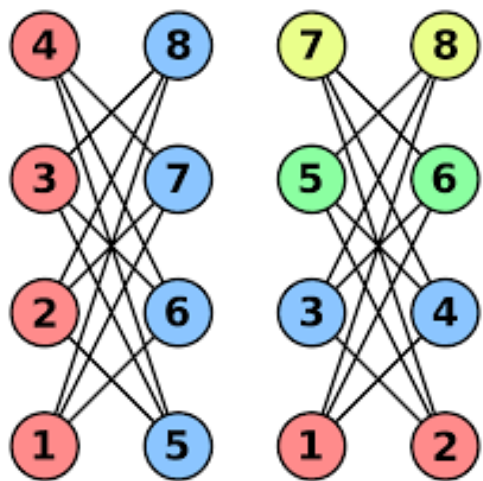
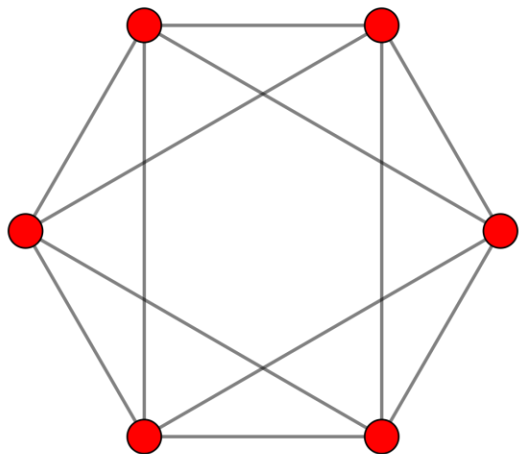


ЕКСТРЕМАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФІВ

Баранник Олег

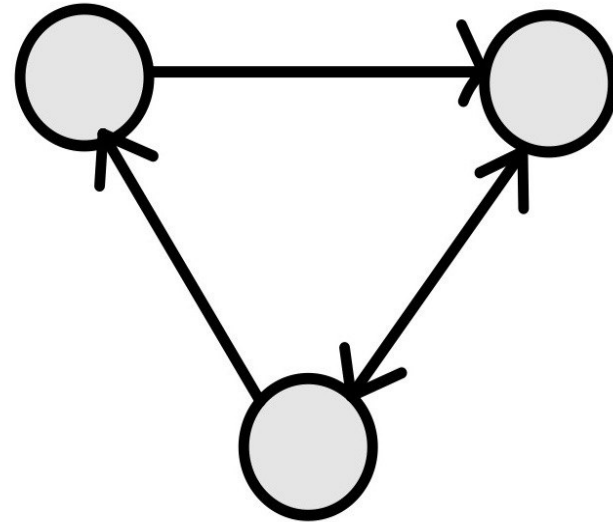


Екстремальна теорія графів є однією зі стародавніх і водночас актуальних галузей математики, яка займається дослідженням екстремальних властивостей графів. Вибір цієї теми обґрунтовується її важливістю і широким спектром застосувань у наукових дослідженнях та практичних задачах

- **Мета і завдання дослідження:** аналіз і вивчення екстремальних властивостей графів, їх класифікація за різними параметрами, а також застосування отриманих знань у практичних сфері.
- **Методи дослідження:** математичні методи та логічні розрахунки для аналізу та моделювання графів, методи комбінаторних конструкцій, метод границь та нерівностей, доведення теорем, алгоритмічні методи для розв'язування практичних задач.

Введемо основні означення

- **Означення 1** Графом називаємо впорядкована пара $G = (V, E)$, де V – непорожня скінченна множина, E – множина, що складається з неупорядкованих пар різних елементів множини V . При цьому множина V називається *множиною вершин графа* G , а множина E називається *множиною ребер графа* G .



Екстремальні характеристики графів

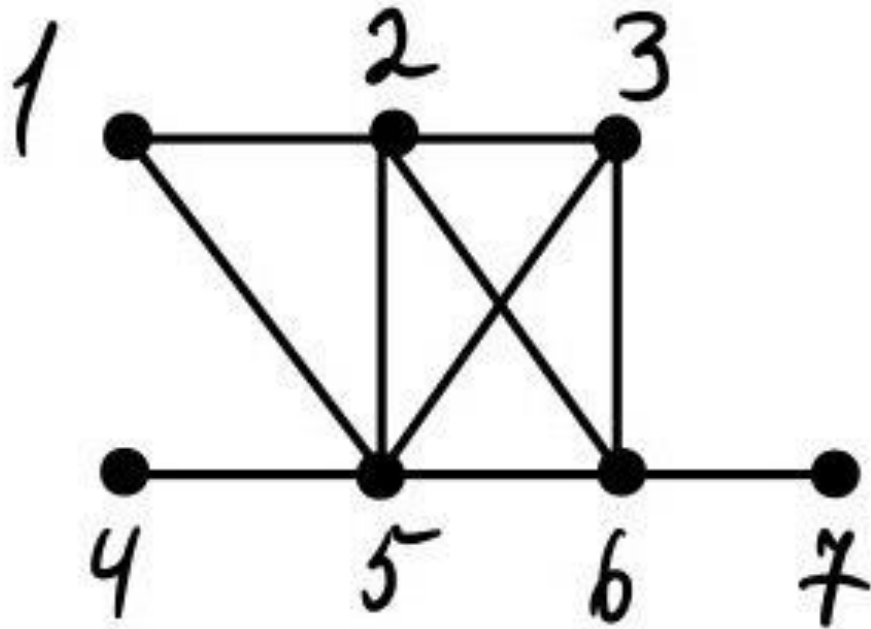
Хроматичне число

Клікове число

Число незалежності графа

Максимальна незалежна множина

Приклад



- У графі найбільшою незалежною множиною є множина $\{1,3,4,7\}$, найбільшою клікою –множина $\{2,3,5,6\}$, найменшим вершинним покриттям - множина $\{2,5,6\}$.

Теорема 1 про незалежну множину та вершинне покриття. Нехай G - граф з множиною вершин V . Множина $U \subseteq V$ є вершинним покриттям графа G тоді і тільки тоді, коли $V - U$ – незалежна множина

- З цієї теореми випливає, що $a(G) + b(G) = n$ для будь-якого графа G з n вершинами.

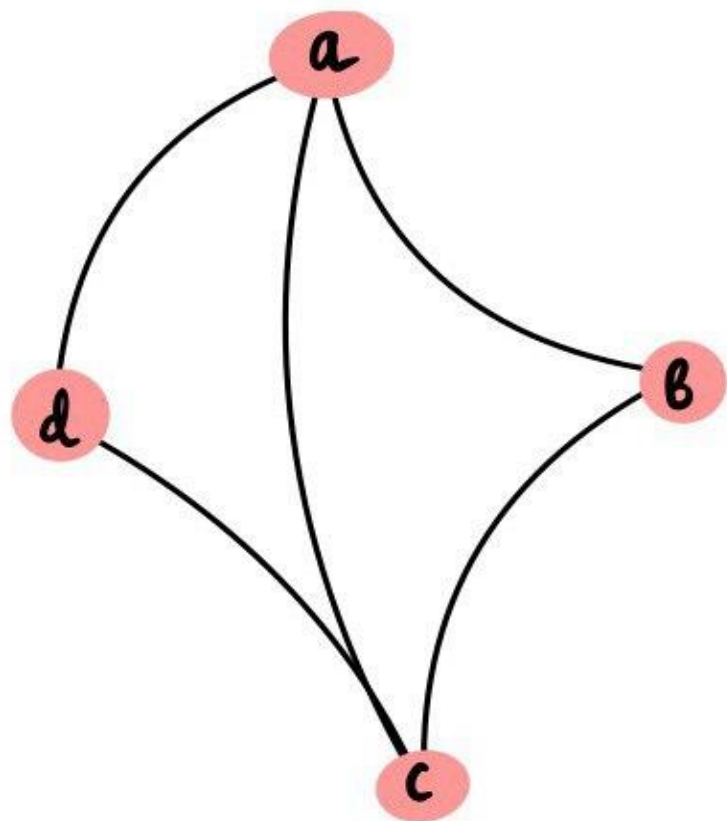
Алгоритм Брона-Кербоша є алгоритмом для знаходження всіх незалежних множин (незалежних клік) у графі. Основна ідея алгоритму полягає в пошуку усіх можливих незалежних множин, починаючи з порожньої множини і розширюючи її вершинами, які ще не є сусідами вершин, що вже містяться в поточній множині. Основні кроки алгоритму Брона-Кербоша:

1. Ініціалізувати поточну незалежну множину як порожню.

2. Для кожної вершини у графі:

- Додати цю вершину до поточної незалежної множини.
- Рекурсивно викликати алгоритм Брона-Кербоша для підграфу, що складається з вершин, які ще не є сусідами поточної вершини.
- Після рекурсивного виклику, вилучити поточну вершину з незалежної множини.

3. Коли всі вершини були розглянуті, вивести знайдені незалежні множини.

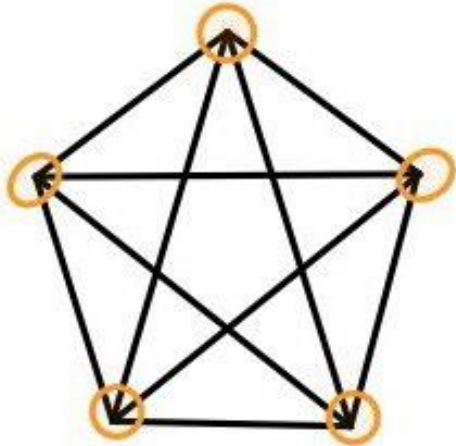


Знайдемо для нього число
незалежності графа та найбільшу
незалежну множину

№	s_k	Q_k^+	Q_k^-
1	-	a,b,c,d	-
2	a	-	-
3	-	b,c,d	a
4	b	d	-
5	b,d	-	-
6	b	-	d
7	-	c,d	a,b
8	c	-	-
9	-	d	a,b,c
10	d	-	b
11	-	-	a,b,c,d

•Знайти число незалежності та хроматичне число графа:

а) K_n ; б) K_n ; n .

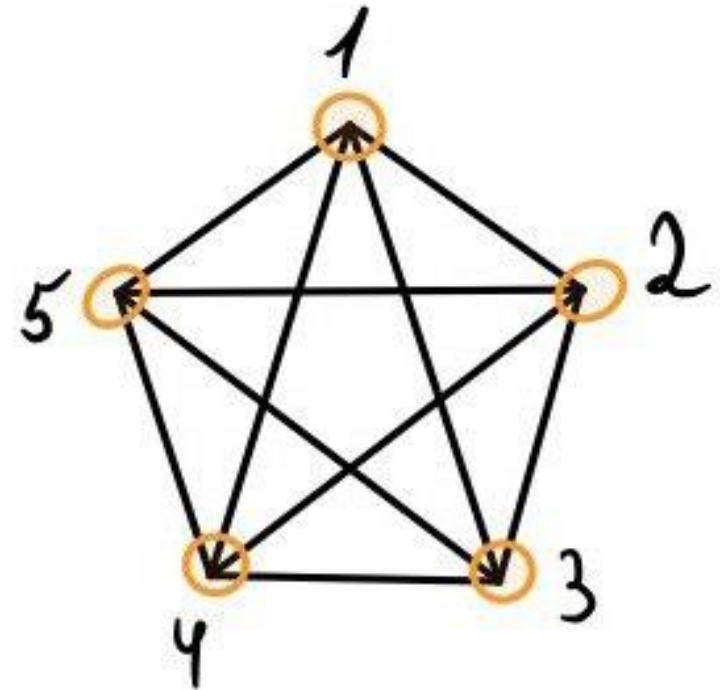


- За умовою ми маємо граф K_n , тобто повний граф на n вершинах.

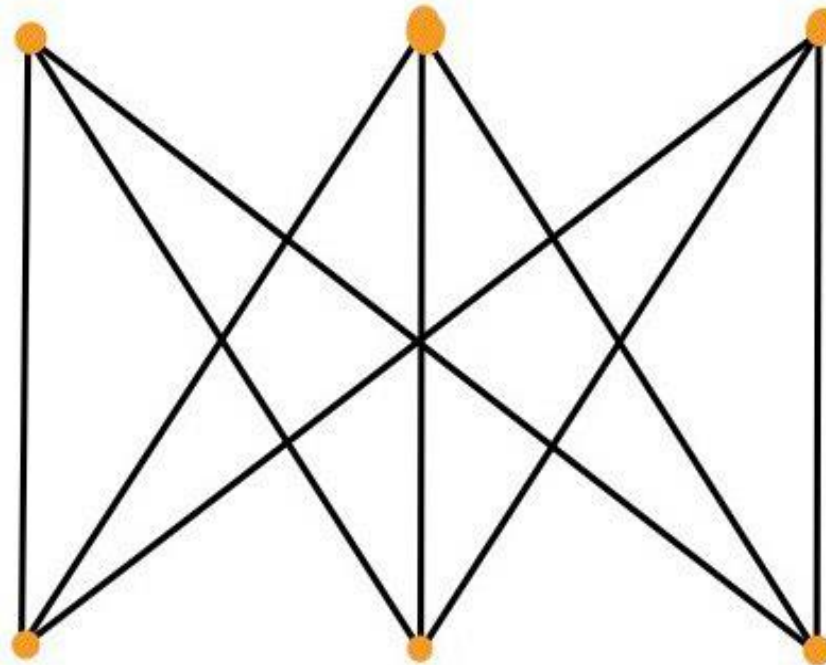
Розглянемо перший пункт - число незалежності. За означенням повного графу будь-які дві вершини графа суміжні між собою, тож число незалежності дорівнюватиме 1.

Розглянемо другий пункт – хроматичне число. Скористаємося графічним способом, щоб знайти хроматичне число графу K_5 , де візьмемо граф K_5 (рисунок 4) і підпишемо його вершини (рисунок 5), де одному числу відповідає один колір, де суміжні вершини не повинні мати однакового кольору.

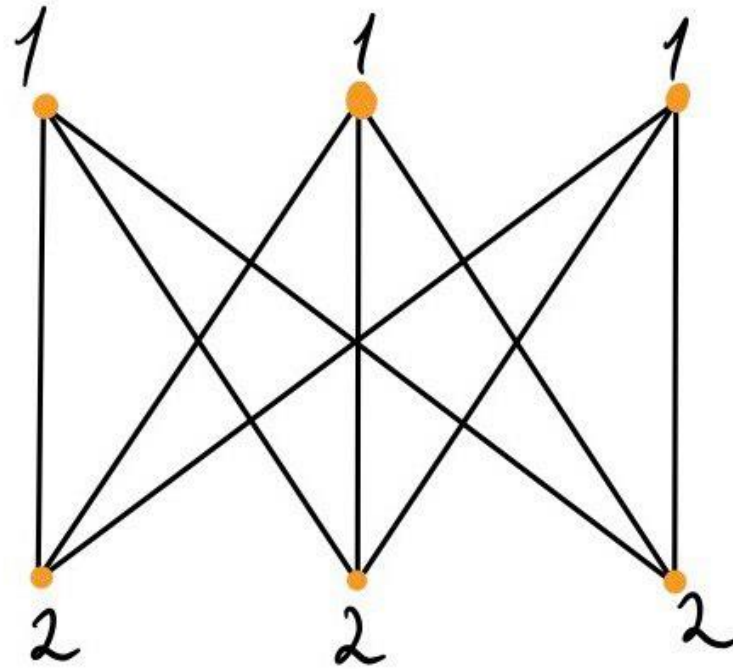
Отже, можемо зробити висновок, що хроматичне число для повного графа дорівнюватиме кількості вершин графа, оскільки вони всі суміжні

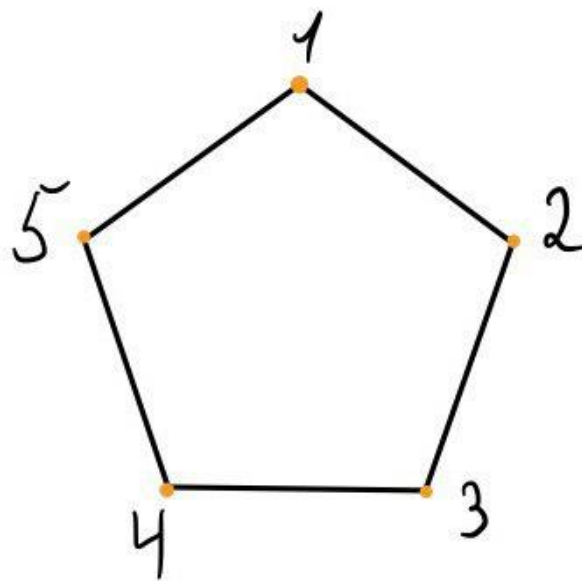
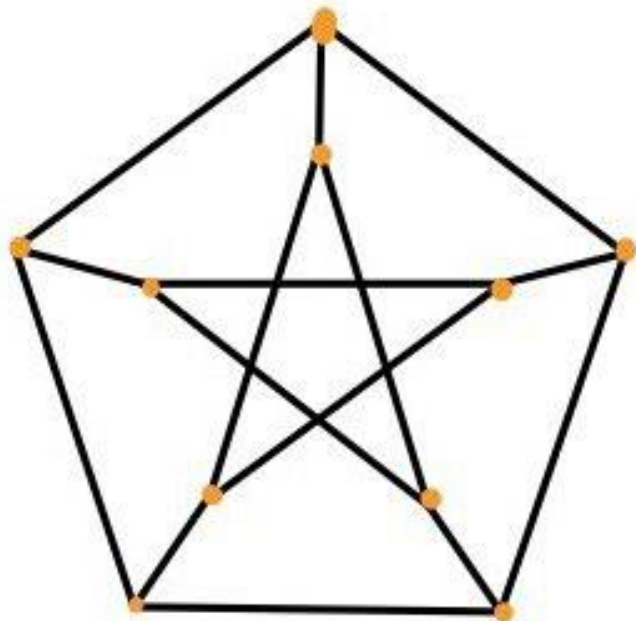


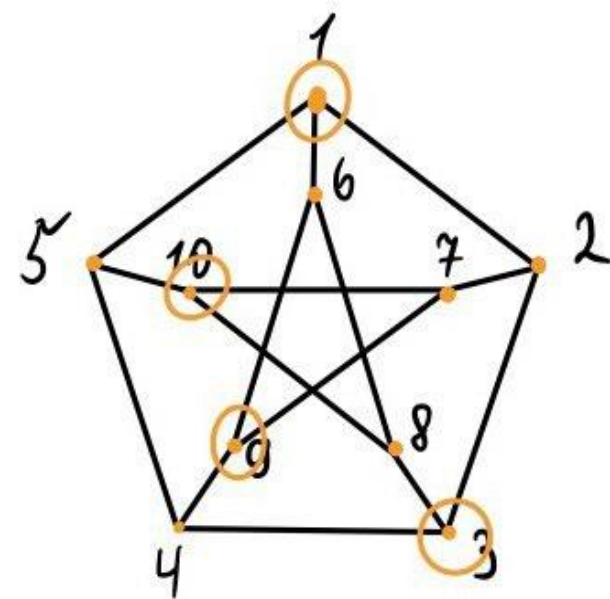
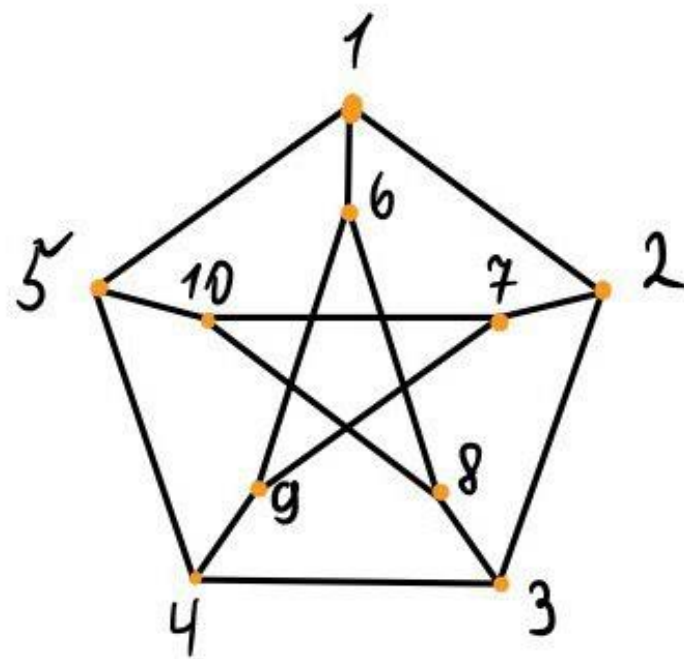
Б) За умовою ми маємо повний дводольний граф $K_{n,n}$; $n=3$. Для зручнішого візуального огляду представимо його як граф $K_{3,3}$,



Маємо другий пункт – хроматичне число. Скористаємося графічним способом, щоб знайти хроматичне число графу $K_{3,3}$, де візьмемо граф $K_{3,3}$ (рисунок 6) і підпишемо його вершини (рисунок 7) різними кольорами, які позначаються числами.







- Маємо перший пункт - число незалежності. Оскільки у верхній частині графа ми можемо вибрати вершини, які не мають суміжності між собою (за визначенням графу), ми можемо взяти n вершин, оскільки вони утворюють незалежну множину. Проте, якщо ми спробуємо взяти $n + 1$ вершину, то завжди знайдуться дві вершини, які будуть суміжними одна з одною. Тому неможливо взяти більше ніж n вершин, що утворюють незалежну множину.

Приклад

Деякий граф правильно розфарбований у кольорів, причому його не можна правильно розфарбувати у меншу кількість кольорів. Доведіть, що в цьому графі існує шлях, вздовж якого зустрічаються вершини всіх k кольорів рівно один раз

- Кольори, які пофарбований граф, занумеруємо від 1 до k . Ті вершини кольору 2, які не є сусідами ні з якими вершинами кольору 1, перефарбуємо в колір 1. Нове забарвлення буде правильним, тому в ньому k кольорів. Значить, якісь вершини кольору 2 не перефарбовані і тому є сусідами з вершинами кольору 1. Аналогічно, вершини кольору 3, які не є сусідами з вершинами кольору 2, перефарбуємо в колір 2, і т.п. до останнього кольору

- Після цього розглянемо якусь вершину кольору k . Вона не перефарбована, і тому є сусідом з вершиною кольору $k-1$. Ця вершина теж не перефарбована, оскільки інакше її початковий колір був би k , і вона не могла б бути сусідами з вершиною того ж кольору. Якщо вершина не перефарбована, то вона є сусідом з вершиною кольору -2 , і т. д. Продовжуючи цей процес, побудуємо шлях з вершин до квітів, які не були перефарбовані.

Висновки

- У цій курсовій роботі я розглянув базові екстремальні характеристики графів. Висвітливши основні означення і складові характеристик, такі як число незалежності, хроматичне число, клікові числа, я проілюстрував їх практичне застосування в знаходженні екстремальних значень графів, вирішивши конкретні завдання, пов'язані зі знаходженням екстремальних значень цих характеристик для реальних графів. Зокрема, використавши алгоритм Брона-Кербоша, де показав його ефективність у вирішенні важливих задач, пов'язаних з екстремальною теорією графів.