УДК 004.42:510.69

Шкільняк С. С.

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ РЕНОМІНАТИВНИХ ЛОГІК КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Побудовано секвенційні числення реномінативних композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

Ключові слова: логіка, предикат, композиційно-номінативний підхід, логічний наслідок, секвенційне числення.

Програмно-орієнтовані логічні формалізми, будовані на основі композиційно-номінативного підходу, називаються композиційно-номінативними логіками. Такі логіки вивчались, зокрема, у [1]. Дослідження відношень логічного наслідку в різних семантиках для цих логік здійснено у [3; 4]. У цій праці на основі властивостей відношень логічного наслідку для множин формул будуються секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів реномінативного рівня – реномінативних логік (РНЛ). Розмаїття семантик та відношень логічного наслідку дає різні варіанти таких числень. Тут побудовано реномінативні секвенційні числення для відношень $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$, $|=_{T}$, $|=_{F}$, $|=_{TF}$ у неокласичній (часткові однозначні предикати), пересиченій (тотальні неоднозначні предикати), загальній (часткові неоднозначні предикати) семантиках. Для таких числень доведено теореми коректності та повноти.

Секвенцію визначаємо як множину формул, специфікованих символами $_{\vdash}$ та $_{\dashv}$, які не належать до алфавіту мови. Секвенції позначаємо $_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$, де усі формули множини $\mathbf{\Gamma}$ специфіковані (відмічені) зліва символом $_{\vdash}$, усі формули множини Δ – символом $_{\dashv}$. Не деталізуючи, секвенції позначаємо як Σ.

Секвенційне числення для заданого відношення логічного наслідку $|=$ будується так: секвенція $_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ вивідна (має виведення) $\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}|=\Delta$.

Поняття замкненої секвенції (вони грають роль аксіом) уточнюється по-різному в різних численнях для різних відношень $|=$. При цьому має виконуватись умова: якщо секвенція $_{\vdash}\mathbf{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ замкнена, то $\mathbf{\Gamma}|=\Delta$.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відношення $|=$.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева називають секвенційними. Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція Σ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ. Таке дерево назвемо виведенням секвенції Σ.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо за працями [1; 3; 4].

1. Різновиди реномінативних секвенційних числень

Нагадаємо основні властивості відношень логічного наслідку для множин формул ($|=$ означає: для неокласичної семантики – це $|=_{Cl}$, $|=_{T}$,

$\models_F$, $\models_{TF}$; для пересиченої — $\models_{Cm}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$; для загальної — $\models_{TF}$).

U) Нехай $\mathbf{\Gamma}\models\Delta$ та $\Delta\subseteq\Sigma$, тоді $\mathbf{\Gamma}\models\Sigma$; нехай $\mathbf{\Gamma}\models\Delta$ та $\mathbf{\Gamma}\subseteq\mathbf{\Lambda}$, тоді $\mathbf{\Lambda}\models\Delta$.

$$\neg\neg_{\vdash})\ \neg\neg\Phi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta \Leftrightarrow \Phi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta.$$

$$\neg\neg_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\neg\neg\Phi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\Phi.$$

$$\vee_{\vdash})\ \Phi\vee\Psi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta \Leftrightarrow \Phi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta \text{ та } \Psi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta.$$

$$\vee_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\Phi,\Psi.$$

$$\neg\vee_{\vdash})\ \neg(\Phi\vee\Psi),\mathbf{\Gamma}\models\Delta \Leftrightarrow \neg\Phi,\neg\Psi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta.$$

$$\neg\vee_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\neg\Phi \text{ та } \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\neg\Psi.$$

$$\mathrm{RT}_{\vdash})\ R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta.$$

$$\mathrm{RT}_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi).$$

$$\neg\mathrm{RT}_{\vdash})\ \neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta.$$

$$\neg\mathrm{RT}_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi).$$

$$\mathrm{RR}_{\vdash})\ R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta.$$

$$\mathrm{RR}_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi).$$

$$\neg\mathrm{RR}_{\vdash})\ \neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta.$$

$$\neg\mathrm{RR}_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(\Phi)) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(\Phi).$$

$$\mathrm{R}\neg_{\vdash})\ R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta.$$

$$\mathrm{R}\neg_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi).$$

$$\neg\mathrm{R}\neg_{\vdash})\ \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta.$$

$$\neg\mathrm{R}\neg_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi).$$

$$\mathrm{R}\vee_{\vdash})\ R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta.$$

$$\mathrm{R}\vee_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi).$$

$$\neg\mathrm{R}\vee_{\vdash})\ \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow$$
$$\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta.$$

$$\neg\mathrm{R}\vee_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,$$
$$\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \text{ та } \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Psi).$$

$$\Phi\mathrm{N}_{\vdash})\ R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \text{ за умови } y\in\nu(\Phi).$$

$$\Phi\mathrm{N}_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \text{ за умови } y\in\nu(\Phi).$$

$$\neg\Phi\mathrm{N}_{\vdash})\ \neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi),\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta \text{ за умови } y\in\nu(\Phi).$$

$$\neg\Phi\mathrm{N}_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi) \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi) \text{ за умови } y\in\nu(\Phi).$$

Для $\models_{Cl}$ (неокласична семантика) та $\models_{Cm}$ (пересичена семантика) додатково справджуються (тут $\models$ — це $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$):

$$\neg_{\vdash})\ \neg\Phi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\Phi.$$

$$\neg_{\dashv})\ \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\neg\Phi \Leftrightarrow \Phi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta.$$

Наявність кожного з логічних наслідків у всіх семантиках (неокласичній, пересиченій, загальній) гарантує властивість:

$$C)\ \Phi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta,\Phi.$$

Властивості, які додатково гарантують наявність логічного наслідку:

$$CL)\ \Phi,\neg\Phi,\mathbf{\Gamma}\models\Delta$$

(для неокласичної семантики $\models$ — це $\models_T$, $\models_{Cl}$; для пересиченої — $\models_F$, $\models_{Cm}$);

$$CR)\ \mathbf{\Gamma}\models\Delta,\Psi,\neg\Psi$$

(для неокласичної семантики $\models$ — це $\models_F$, $\models_{Cl}$; для пересиченої — $\models_T$, $\models_{Cm}$).

$$CLR)\ \Phi,\neg\Phi,\mathbf{\Gamma}\models_{TF}\Delta,\Psi,\neg\Psi$$

(для неокласичної й пересиченої семантик).

Для РНЛ можна отримати такі різновиди секвенційних числень.

Відношення $\models_{Cl}$ (неокласична семантика) дає відоме реномінативне секвенційне числення однозначних часткових предикатів [1]. Позначимо його *RnCl*.

Числення *RnCl* формалізує також відношення $\models_{Cm}$ (пересичена семантика).

Відношення $\models_T$ у випадку неокласичної семантики та відношення $\models_F$ у випадку пересиченої формалізуємо за допомогою числення, яке назвемо *RnL*.

Відношення $\models_F$ у випадку неокласичної семантики і відношення $\models_T$ у випадку пересиченої формалізуємо за допомогою числення, яке назвемо *RnR*.

Відношення $\models_{TF}$ у випадку неокласичної та у випадку пересиченої семантики формалізуємо за допомогою числення, яке назвемо *RnLR*. У випадку загальної семантики $\models_{TF}$ формалізуємо за допомогою числення, яке назвемо *RnGS*.

Числення RnCl

Замкненість секвенції Σ дається властивістю С:

С) Σ замкнена, якщо існує формула Φ така, що ${}_{\vdash}\Phi\in\Sigma$ та ${}_{\dashv}\Phi\in\Sigma$.

Наведемо базові секвенційні форми числення *RnCl*.

$${}_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\dashv}A,\ \Sigma}{{}_{\vdash}\neg A,\ \Sigma} \qquad {}_{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\vdash}A,\ \Sigma}{{}_{\dashv}\neg A,\ \Sigma}$$

$${}_{\vdash}\vee\ \frac{{}_{\vdash}A,\ \Sigma \qquad {}_{\vdash}B,\ \Sigma}{{}_{\vdash}A\vee B,\ \Sigma} \qquad {}_{\dashv}\vee\ \frac{{}_{\dashv}A,\ {}_{\dashv}B,\ \Sigma}{{}_{\dashv}A\vee B,\ \Sigma}$$

$${}_{\vdash}\mathbf{RT}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma} \qquad {}_{\dashv}\mathbf{RT}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma}$$

$${}_{\vdash}\mathbf{RR}\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma} \qquad {}_{\dashv}\mathbf{RR}\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma}$$

$${}_{\vdash}\mathbf{R}\neg\ \frac{{}_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma} \qquad {}_{\dashv}\mathbf{R}\neg\ \frac{{}_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma}$$

$${}_{\vdash}\mathbf{R}\vee\ \frac{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{{}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma} \qquad {}_{\dashv}\mathbf{R}\vee\ \frac{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma}{{}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma}$$

$$_{\vdash}\mathbf{\Phi N}\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ \text{при } y\in\nu(A)$$

$$_{\dashv}\mathbf{\Phi N}\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ \text{при } y\in\nu(A)$$

Тут $\nu(A)$ – множина строго неістотних [3] предметних імен формули A.

Числення RnL

Замкненість секвенції Σ дається властивостями C і CL. Властивість CL така:

CL) Σ замкнена, якщо існує формула Φ така, що $_{\vdash}\Phi\in\Sigma$ та $_{\vdash}\neg\Phi\in\Sigma$.

Секвенція Σ замкнена, якщо виконується принаймні одна з C чи CL.

Базовими секвенційними формами числення *RnL* є $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, $_{\vdash}\mathbf{RT}$, $_{\dashv}\mathbf{RT}$, $_{\vdash}\mathbf{RR}$, $_{\dashv}\mathbf{RR}$, $_{\vdash}\mathbf{R}\neg$, $_{\dashv}\mathbf{R}\neg$, $_{\vdash}\mathbf{R}\vee$, $_{\dashv}\mathbf{R}\vee$, $_{\vdash}\mathbf{\Phi N}$, $_{\vdash}\mathbf{\Phi N}$, до яких додаються наведені нижче форми:

$$_{\vdash}\neg\neg\ \frac{_{\vdash}A,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg\neg A,\ \Sigma} \qquad _{\dashv}\neg\neg\ \frac{_{\dashv}A,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg\neg A,\ \Sigma}$$

$$_{\vdash}\vee\ \frac{_{\vdash}A,\ \Sigma \qquad _{\vdash}B,\ \Sigma}{_{\vdash}A\vee B,\ \Sigma} \qquad _{\dashv}\vee\ \frac{_{\dashv}A,\ _{\dashv}B,\ \Sigma}{_{\dashv}A\vee B,\ \Sigma}$$

$$_{\vdash}\neg\vee\ \frac{_{\vdash}\neg A,\ _{\vdash}\neg B,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg(A\vee B),\ \Sigma} \qquad _{\dashv}\neg\vee\ \frac{_{\dashv}\neg A,\ \Sigma \qquad _{\dashv}\neg B,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg(A\vee B),\ \Sigma}$$

$$_{\vdash}\neg\mathbf{RT}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma} \qquad _{\dashv}\neg\mathbf{RT}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma}$$

$$_{\vdash}\neg\mathbf{RR}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma} \qquad _{\dashv}\neg\mathbf{RR}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma}$$

$$_{\vdash}\neg\mathbf{R}\neg\ \frac{_{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma} \qquad _{\dashv}\neg\mathbf{R}\neg\ \frac{_{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma}$$

$$_{\vdash}\neg\mathbf{R}\vee\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma}$$

$$_{\dashv}\neg\mathbf{R}\vee\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma \qquad _{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma}$$

$$_{\vdash}\neg\mathbf{\Phi N}\ \frac{_{\vdash}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ \text{при } y\in\nu(A)$$

$$_{\dashv}\neg\mathbf{\Phi N}\ \frac{_{\dashv}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ \text{при } y\in\nu(A)$$

Числення RnR

Замкненість секвенції Σ дається властивостями C і CR. Властивість CR така:

CR) Σ замкнена, якщо існує формула Φ така, що $_{\dashv}\Phi\in\Sigma$ та $_{\dashv}\neg\Phi\in\Sigma$.

Секвенція Σ замкнена, якщо виконується принаймні одна з C чи CR.

Базові секвенційні форми числення *RnR* такі ж, як і для числення *RnL*.

Числення RnLR

Ззамкненість секвенції Σ дається властивостями C і CLR.

Властивість CLR означає одночасне виконання властивостей CL та CR.

Секвенція Σ замкнена, якщо виконується принаймні одна з C чи CLR.

Базові секвенційні форми числення *RnLR* такі самі, як і для числення *RnL*.

Числення RnGS

Умова замкненості секвенції задається властивістю C.

Базові секвенційні форми числення *RnGS* такі самі, як і для числення *RnL*.

Основну властивість базових секвенційних форм встановлює

Теорема 1. *Нехай* $\frac{_{\vdash}\Lambda_{\dashv}K}{_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta}$ *та* $\frac{_{\vdash}\Lambda_{\dashv}K \quad _{\vdash}X_{\dashv}Z}{_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta}$ – *секвенційні форми. Тоді:*

1) *якщо* $\mathbf{\Lambda}\models\mathbf{K}$, *то* $\mathbf{\Gamma}\models\Delta$; 2) *якщо* $\mathbf{\Lambda}\models\mathbf{K}$ *та* $\mathbf{X}\models\mathbf{Z}$, *то* $\mathbf{\Gamma}\models\Delta$.

Тут $\models$ — одне з відношень $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$, $\models_{T}$, $\models_{F}$, $\models_{TF}$.

2. Побудова секвенційного дерева. Модельні множини

Розглянемо процедуру побудови дерева для секвенції Σ. Вона здійснюється однаково для числень *RnL*, *RnR*, *RnLR*, *RnGS* і подібна до відомої [1] процедури побудови дерева для *RnCl*-числень. Така побудова починається з кореня дерева. Процедуру побудови розіб’ємо на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини *доступних* наразі формул. На початку кожного етапу виконуємо *крок доступу*: до списку доступних формул додаємо по одній формулі зі списків $_{\vdash}$-формул та $_{\dashv}$-формул. Якщо недоступних $_{\vdash}$-формул чи $_{\dashv}$-формул немає (відповідний список вичерпано), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі невичерпаного списку. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (єдина $_{\vdash}$-формула чи $_{\dashv}$-формула, якщо один зі списків порожній).

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі k+1 перевіряємо, чи буде кожен із листів дерева замкненою секвенцією. Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, ми отримали замкнене секвенційне дерево. Якщо – ні, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ. Для цього активізуємо всі доступні формули ξ, які не є примітивними чи їх запереченнями. По черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму.

Секвенційні форми типів **RT** та $\neg$**RT** допоміжні: перед застосуванням однієї з форм іншого типу усуваємо, у разі наявності, тотожні перейменування, застосовуючи належну кількість разів форми типу **RT** чи $\neg$**RT**. Після застосування недопоміжної форми формула дезактивується. Після виконання секвенційної форми формула пасивна. До пасивних та утворених на даному етапі формул секвенційні форми не застосовуються. Повтори формул усуваються.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) процедуру завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево;
2) процедуру завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево;
3) процедури не завершено, маємо нескінченне незамкнене дерево.

За відомою лемою Кеніга нескінченне дерево зі скінченним розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях. Отже, у випадках 2 і 3 у дереві існує шлях, усі вершини якого – незамкнені секвенції. Такий шлях назвемо незамкненим. Усі формули секвенції Σ зустрінуться на цьому шляху і стануть доступними.

Теорема коректності для різних числень формулюється однаково.

Теорема 2 (коректності). *Нехай секвенція* ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}\,{}_{\dashv}\Delta$ *вивідна. Тоді* $\mathbf{\Gamma} \models \Delta$.

Тут $\models$ – це $\models_{Cl}$ чи $\models_{Cm}$ для числення *RnCl*; $\models_{T}$ чи $\models_{F}$ для числень *RnL*, *RnR*; $\models_{TF}$ для числень *RnLR*, *RnGS*. Теорема доводиться індукцією за побудовою замкненого секвенційного дерева для ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}\,{}_{\dashv}\Delta$.

Для доведення повноти збудованих секвенційних числень використаємо метод *модельних* (*хінтікківських*) *множин* [2]. Для різних варіантів числень вводимо відповідні поняття модельної множини специфікованих формул.

Секвенційне числення RnCl

Множина $\boldsymbol{H}$ – C-модельна, якщо виконуються умови:

HC) Не існує формули Φ такої, що ${}_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}$.

H$\neg$) Якщо ${}_{\vdash}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}$; якщо ${}_{\dashv}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}$.

H$\vee$) Якщо ${}_{\vdash}\Phi\vee\Psi \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}$ або ${}_{\vdash}\Psi \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}\Phi\vee\Psi \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\dashv}\Psi \in \boldsymbol{H}$.

HRT) Якщо ${}_{\vdash}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HRR) Якщо ${}_{\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HR$\neg$) Якщо ${}_{\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HR$\vee$) Якщо ${}_{\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$.

HΦN) Якщо ${}_{\vdash}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \nu(\Phi)$, то ${}_{\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \nu(\Phi)$, то ${}_{\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

Тут HC – умова коректності L-модельної множини.

Секвенційне числення RnL

Множина $\boldsymbol{H}$ – L-модельна, якщо виконуються HC, H$\vee$, HRT, HRR, HR$\neg$, HR$\vee$, HΦN, а також HCL, H$\neg\neg$, H$\neg\vee$, H$\neg$RT, H$\neg$RR, H$\neg$R$\neg$, H$\neg$R$\vee$, H$\neg\Phi$N:

HCL) Не існує формули Φ такої, що ${}_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\vdash}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$.

H$\neg\neg$) Якщо ${}_{\vdash}\neg\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}$; якщо ${}_{\dashv}\neg\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}$.

H$\neg\vee$) Якщо ${}_{\vdash}\neg(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\vdash}\neg\Psi \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}\neg(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$ або ${}_{\dashv}\neg\Psi \in \boldsymbol{H}$.

H$\neg$RT) Якщо ${}_{\vdash}\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H$\neg$RR) Якщо ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H$\neg$R$\neg$) Якщо ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H$\neg$R$\vee$) Якщо ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ або ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$.

H$\neg\Phi$N) Якщо ${}_{\vdash}\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \nu(\Phi)$, то ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо ${}_{\dashv}\neg R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \nu(\Phi)$, то ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

Тут HC та HCL – умови коректності L-модельної множини.

Секвенційне числення RnR

Множина $\boldsymbol{H}$ – R-модельна, якщо виконуються HC, H$\neg\neg$, H$\vee$, H$\neg\vee$, HRT, HRR, HR$\neg$, HR$\vee$, HΦN, H¬RT, H¬RR, H¬R¬, H¬R∨, H¬ΦN, а також HCR:

HCR) Не існує формули Φ такої, що ${}_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}$ та ${}_{\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$.

Тут HC та HCR – умови коректності *R*-модельної можини.

Секвенційне числення RnLR

Множина $\boldsymbol{H}$ – *LR*-модельна, якщо виконуються HC, H¬¬, H∨, H¬∨, HRT, HRR, HR¬, HR∨, HΦN, H¬RT, H¬RR, H¬R¬, H¬R∨, H¬ΦN, а також HCLR:

HCLR) Не існують Φ та Ψ такі, що ${}_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}$, ${}_{\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ та ${}_{\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}$, ${}_{\dashv}\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

Тут HC та HCLR – умови коректності *LR*-модельної множини.

Секвенційне числення RnGS

Множина $\boldsymbol{H}$ – *GS*-модельна, якщо виконуються HC, H¬¬, H∨, H¬∨, HRT, HRR, HR¬, HR∨, HΦN, H¬RT, H¬RR, H¬R¬, H¬R∨, H¬ΦN.

Таким чином, визначення *L*-модельної, *R*-модельної, *LR*-модельної та *GS*-модельної множини відрізняються тільки різними умовами їх коректності.

Теорема 3. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях у секвенційному дереві,* $\boldsymbol{H}$ *– множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді* $\boldsymbol{H}$ *– модельна множина відповідного типу* (*C*-, *L*-, *R*-, *LR*-, *GS-модельна*).

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм відповідного числення. Переходи згідно з такими формами узгоджені з однойменними пунктами визначення модельної множини відповідного типу. Кожна формула шляху $\wp$, яка не є примітивною чи її запереченням, рано чи пізно буде розкладена згідно з відповідною секвенційною формою. Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому виконані умови коректності модельної множини (HC для *C*-модельної, HC та HCL для *L*-модельної, HC і HCR для *R*-модельної, HC та HCLR для *LR*-модельної, HC для *GS*-модельної).

Наступні твердження – теореми 4 і 5 – задають побудову контрмоделей за відсутності логічного наслідку. Теореми доводяться індукцією за складністю формули згідно з побудовою модельної множини відповідного типу.

Теорема 4. *Нехай* $\boldsymbol{H}$ *– C-модельна множина. Тоді існують АС* $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{B}=(A,\boldsymbol{I})$ *та* $\delta,\eta\in{}^{V}\!A$ *такі*:

1) ${}_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ *та* ${}_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$;
2) ${}_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ *та* ${}_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)$.

Пари $(\boldsymbol{A},\delta)$ та $(\boldsymbol{B},\eta)$ із такими властивостями будемо відповідно називати *Cl*-контрмоделлю та *Cm*-контрмоделлю.

Нехай $W=nm(\boldsymbol{H})$. Візьмемо деяку A таку, що $|A|=W$, та ін'єктивні $\delta,\eta\in{}^{V}\!A$ з $im(\delta)=W$. Задамо значення базових предикатів на δ, η та на $\mathrm{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)$, $\mathrm{r}^{\bar v}_{\bar x}(\eta)$:

– якщо ${}_{\vdash}p\in\boldsymbol{H}$, то $\delta\in\boldsymbol{T}(p_A)$; якщо ${}_{\dashv}p\in\boldsymbol{H}$, то $\delta\in\boldsymbol{F}(p_A)$;
– якщо ${}_{\vdash}p\in\boldsymbol{H}$, то $\eta\notin\boldsymbol{F}(p_B)$; якщо ${}_{\dashv}p\in\boldsymbol{H}$, то $\eta\notin\boldsymbol{T}(p_B)$;
– якщо ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)\in\boldsymbol{T}(p_A)$; якщо ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)\in\boldsymbol{F}(p_A)$;
– якщо ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\eta)\notin\boldsymbol{F}(p_B)$; якщо ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\eta)\notin\boldsymbol{T}(p_B)$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів задаємо довільно, беручи до уваги обмеження щодо строго неістотності імен $y\in\nu(p)$ для p_A та p_B: для всіх $d,h\in{}^{V}\!A$ таких: $d\|\text{-}\nu(p)=h\|\text{-}\nu(p)$, необхідно $p_A(d)=p_A(h)$, $p_B(d)=p_B(h)$.

Для атомарних формул і формул вигляду $R^{\bar v}_{\bar x}(p)$ твердження теореми випливають з наведеного вище визначення значень базових предикатів. Наведемо доведення кроку індукції для п. H∨. Для інших пунктів доведення аналогічне.

Нехай ${}_{\vdash}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$. Згідно з H∨ ${}_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}$ або ${}_{\vdash}\Psi\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ або $\delta\in\boldsymbol{T}(\Psi_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)\cup\boldsymbol{T}(\Psi_A)=\boldsymbol{T}(\Phi\vee\Psi_A)$. За припущенням індукції для η $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ або $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Psi_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_B)=\boldsymbol{F}(\Phi\vee\Psi_B)$.

Нехай ${}_{\dashv}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$. Згідно H∨ ${}_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}$ та ${}_{\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$ та $\delta\in\boldsymbol{F}(\Psi_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_A)=\boldsymbol{F}(\Phi\vee\Psi_A)$. За припущенням індукції для η $\eta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)$ та $\eta\notin\boldsymbol{T}(\Psi_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)\cup\boldsymbol{T}(\Psi_B)=\boldsymbol{T}(\Phi\vee\Psi_B)$.

Теорема 5. *Нехай* $\boldsymbol{H}$ *– модельна множина, яка може бути L-, R-, LR- чи GS-модельною. Тоді існують АС* $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{B}=(A,\boldsymbol{I})$ *та* $\delta,\eta\in{}^{V}\!A$ *такі*:

1) ${}_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ *та* ${}_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$;
2) ${}_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ *та* ${}_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$.

Такі пари $(\boldsymbol{A},\delta)$ і $(\boldsymbol{B},\eta)$ назвемо *T*-контрмоделлю та *F*-контрмоделлю.

Задамо значення базових предикатів на δ, η і на $\mathrm{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)$, $\mathrm{r}^{\bar v}_{\bar x}(\eta)$:

– якщо ${}_{\vdash}p\in\boldsymbol{H}$, то $\delta\in\boldsymbol{T}(p_A)$; якщо ${}_{\dashv}p\in\boldsymbol{H}$, то $\delta\notin\boldsymbol{T}(p_A)$;
– якщо ${}_{\vdash}p\in\boldsymbol{H}$, то $\eta\notin\boldsymbol{F}(p_A)$; якщо ${}_{\dashv}p\in\boldsymbol{H}$, то $\eta\in\boldsymbol{F}(p_A)$;
– якщо ${}_{\vdash}\neg p\in\boldsymbol{H}$, то $\delta\in\boldsymbol{F}(p_A)=\boldsymbol{T}(\neg p_A)$; якщо ${}_{\dashv}\neg p\in\boldsymbol{H}$, то $\delta\notin\boldsymbol{F}(p_A)=\boldsymbol{T}(\neg p_A)$;
– якщо ${}_{\vdash}\neg p\in\boldsymbol{H}$, то $\eta\notin\boldsymbol{T}(p_A)=\boldsymbol{F}(\neg p_A)$; якщо ${}_{\dashv}\neg p\in\boldsymbol{H}$, то $\eta\in\boldsymbol{T}(p_A)=\boldsymbol{F}(\neg p_A)$;
– якщо ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)\in\boldsymbol{T}(p_A)$; якщо ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)\notin\boldsymbol{T}(p_A)$;
– якщо ${}_{\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\eta)\notin\boldsymbol{F}(p_A)$; якщо ${}_{\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\eta)\in\boldsymbol{F}(p_A)$;
– якщо ${}_{\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)\in\boldsymbol{F}(p_A)$; якщо ${}_{\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar v}_{\bar x}(\delta)\notin\boldsymbol{F}(p_A)$;

– якщо $_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta)\notin\boldsymbol{T}(\neg p_A)$; якщо $_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то $\mathbf{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\eta)\in\boldsymbol{T}(p_A)$.

В усіх інших випадках такі значення задаємо довільно, врахувавши указане в доведенні теореми 4 обмеження щодо строгої неістотності імен.

Наведемо як приклад доведення кроку індукції для пп. HR$\vee$ та H$\neg$R$\vee$. Для інших пунктів доведення аналогічне.

Нехай $_{\vdash}\neg(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно з H$\neg\vee$ маємо $_{\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $_{\vdash}\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg\Phi_A)=\boldsymbol{F}(\Phi_A)$ та $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg\Psi_A)=\boldsymbol{F}(\Psi_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_A)=\boldsymbol{T}(\neg(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg\Phi_B)=\boldsymbol{T}(\Phi_B)$ та $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg\Psi_B)=\boldsymbol{T}(\Psi_B)$, тому $\eta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)\cup\boldsymbol{T}(\Psi_B)=\boldsymbol{F}(\neg(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $_{\dashv}\neg(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно з H$\neg\vee$ маємо $_{\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $_{\dashv}\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg\Phi_A)=\boldsymbol{F}(\Phi_A)$ або $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg\Psi_A)=\boldsymbol{F}(\Psi_A)$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_A)=\boldsymbol{T}(\neg(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg\Phi_B)=\boldsymbol{T}(\Phi_B)$ або $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg\Psi_B)=\boldsymbol{T}(\Psi_B)$, тому $\eta\in\boldsymbol{T}(\Phi_B)\cup\boldsymbol{T}(\Psi_B)=\boldsymbol{F}(\neg(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно з H$\neg$R$\vee$ маємо $_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_A)$ та $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\,\&\,\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_A)=\boldsymbol{T}(\neg(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi))_A)=\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_B)$ та $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_B)$, тому $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_B)\cup\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_B)=\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно з H$\neg$R$\vee$ $_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ або $_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_A)$ або $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_A)$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_A)\cap\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_A)=\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\,\&\,\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_A)=\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)_A)$, тому $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_B)$ або $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_B)$, тому $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)_B)\cup\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_B)=\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\,\&\,\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)_B)=\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)_B)$, звідси $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)_B)$.

3. Повнота реномінативних секвенційних числень

Теорема повноти для різних варіантів секвенційних числень та логічних наслідків формулюється однаково.

Теорема 6 (*повноти RnCl для* $\models_{Cl}$, *неокласична семантика*). *Нехай* $\boldsymbol{\Gamma}\models_{Cl}\Delta$. *Тоді секвенція* $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні RnCl.*

Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma}\models_{Cl}\Delta$ та $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma={}_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях $\wp$. За теоремою 3 множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул шляху $\wp$ – *C*-модельна. Тоді $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

За теоремою 4 існує *Cl*-контрмодель $(\boldsymbol{A},\delta)$: $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Згідно з $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\boldsymbol{\Gamma}$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\delta\in\boldsymbol{F}(\Psi_A)$. Звідси $\delta\in\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Gamma}_A)\cap\boldsymbol{F}(\Delta_A)$, тому $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Gamma}_A)\cap\boldsymbol{F}(\Delta_A)\neq\varnothing$. Це заперечує $\boldsymbol{\Gamma}\models_{Cl}\Delta$.

Теорема 7 (*повноти RnCl для* $\models_{Cm}$, *пересичена семантика*). *Нехай* $\boldsymbol{\Gamma}\models_{Cm}\Delta$. *Тоді секвенція* $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні RnCl.*

Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma}\models_{Cm}\Delta$ та $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Міркуючи як у теоремі 6, отримуємо *C*-модельну множину $\boldsymbol{H}$ таку: $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

За теоремою 4 існує *Cm*-контрмодель $(\boldsymbol{B},\eta)$: $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)$. Згідно з $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\boldsymbol{\Gamma}$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{T}(\Psi_B)$. Звідси $\eta\notin\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Gamma}_B)\cup\boldsymbol{T}(\Delta_B)$, тому $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Gamma}_B)\cup\boldsymbol{T}(\Delta_B)\neq{}^{V}A$. Це заперечує $\boldsymbol{\Gamma}\models_{Cm}\Delta$.

Теорема 8 (*повноти RnL для* $\models_{T}$, *неокласична семантика*). *Нехай* $\boldsymbol{\Gamma}\models_{T}\Delta$. *Тоді секвенція* $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні RnL.*

Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma}\models_{T}\Delta$ та $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Міркуючи як у теоремі 6, отримуємо *L*-модельну множину $\boldsymbol{H}$ таку: $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

За теоремою 5 існує *T*-контрмодель $(\boldsymbol{A},\delta)$: $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$. Згідно з $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\boldsymbol{\Gamma}$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Psi_A)$. Звідси $\delta\in\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Gamma}_A)$ та $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Delta_A)$ $\Rightarrow$ хибно $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Gamma}_A)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta_A)$. Це заперечує $\boldsymbol{\Gamma}\models_{T}\Delta$.

Теорема 9 (*повноти RnR для* $\models_{F}$, *неокласична семантика*). *Нехай* $\boldsymbol{\Gamma}\models_{F}\Delta$. *Тоді секвенція* $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні RnR.*

Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma}\models_{T}\Delta$ та $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Міркуючи як у теоремі 6, отримуємо *R*-модельну множину $\boldsymbol{H}$ таку: $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

За теоремою 5 існує *F*-контрмодель $(\boldsymbol{B},\eta)$: $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$. Згідно з $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\boldsymbol{\Gamma}$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\Psi_B)$. Звідси $\eta\notin\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Gamma}_B)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\Delta_B)$ $\Rightarrow$ хибно $\boldsymbol{F}(\Delta_B)\subseteq\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Gamma}_B)$. Це заперечує $\boldsymbol{\Gamma}\models_{F}\Delta$.

Теорема 10 (*повноти RnR для* $\models_{T}$, *пересичена семантика*). *Нехай* $\boldsymbol{\Gamma}\models_{T}\Delta$. *Тоді секвенція* $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні RnR.*

Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma}\models_{T}\Delta$ та $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Міркуючи як у теоремі 6, маємо *R*-модельну множину $\boldsymbol{H}$ таку: $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$. Далі доводимо так само, як у теоремі 8.

Теорема 11 (*повноти RnL для* $\models_{F}$, *пересичена семантика*). *Нехай* $\boldsymbol{\Gamma}\models_{F}\Delta$. *Тоді секвенція* $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні RnL.*

Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma}\models_{T}\Delta$ та $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Міркуючи як у теоремі 6, маємо *L*-модельну множину $\boldsymbol{H}$: $_{\vdash}\boldsymbol{\Gamma}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$. Далі доводимо так само, як у теоремі 9.

Теорема 12 (*повноти RnLR для* $|\!=_{TF}$, *некласична семантика чи пересичена семантика*). *Нехай* $\mathbf{\Gamma}|\!=_{TF}\Delta$. *Тоді секвенція* ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні RnLR*.

Припустимо супротивне: $\mathbf{\Gamma}|\!=_{TF}\Delta$ та ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma = {}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Міркуючи як у теоремі 6, маємо *LR*-модельну множину $\boldsymbol{H}$: ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

За теоремою 5 існують *T*-контрмодель $(\boldsymbol{A}, \delta)$ та *F*-контрмодель $(\boldsymbol{B}, \eta)$ такі: ${}_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та ${}_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \delta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$; ${}_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та ${}_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H} \Rightarrow \eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$.

Якщо під час виконання HCLR неправильна HCL (тоді маємо HCR), то для *T*-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, а для *F*-контрмоделі отримуємо нетотальний предикат, тому для логіки однозначних предикатів беремо *F*-контрмодель, а для логіки тотальних предикатів – *T*-контрмодель.

Якщо під час виконання HCLR неправильна HCR (тоді маємо HCL), то для *F*-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, а для *T*-контрмоделі отримуємо нетотальний предикат, тому для логіки однозначних предикатів беремо *T*-контрмодель, а для логіки тотальних предикатів – *F*-контрмодель.

Якщо вірні HCL та HCR, то можна брати і *T*-, і *F*-контрмодель.

Для *T*-контрмоделі згідно з ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\mathbf{\Gamma}$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Psi_A)$. Звідси $\delta\in\boldsymbol{T}(\mathbf{\Gamma}_A)$ та $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Delta_A)$, звідки хибно $\boldsymbol{T}(\mathbf{\Gamma}_A)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta_A)$. Це заперечує $\mathbf{\Gamma}_A|\!=_T\Delta$, тому й заперечує $\mathbf{\Gamma}|\!=_{TF}\Delta$.

Для *F*-контрмоделі згідно з ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\mathbf{\Gamma}$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\Psi_B)$. Звідси $\eta\notin\boldsymbol{F}(\mathbf{\Gamma}_B)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\Delta_B)$, звідки неправильно $\boldsymbol{F}(\Delta_B)\subseteq\boldsymbol{F}(\mathbf{\Gamma}_B)$. Це заперечує $\mathbf{\Gamma}_B|\!=_F\Delta$, тому й заперечує $\mathbf{\Gamma}|\!=_{TF}\Delta$.

Теорема 13 (*повноти RnGS для* $|\!=_{TF}$, *загальна семантика*). *Нехай* $\mathbf{\Gamma}|\!=_{TF}\Delta$. *Тоді секвенція* ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta$ *вивідна в численні RnGS*.

Припустимо супротивне: $\mathbf{\Gamma}|\!=_{TF}\Delta$ та ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta$ невивідна. Міркуючи як у теоремі 6, отримуємо *GS*-модельну множину $\boldsymbol{H}$ таку: ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

Далі доводимо так само, як у теоремі 12. При цьому зауважимо, що у випадку загальної семантики можна брати як *T*-контрмодель, так і *F*-контрмодель.

Висновки

Тут побудовано секвенційні числення реномінативних композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Основою побудови є досліджені в попередніх роботах властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Розмаїття таких відношень дає різні варіанти секвенційних числень. Для побудованих числень доведено теореми коректності та повноти.

Література

1. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : КНУ, 2008. – 528 с.
2. Смирнова Е .Д. Логика и философия / Е. Д. Смирнова. – М. : РОССПЕН, 1996. – 304 с.
3. Шкільняк С. С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С. С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
4. Шкільняк С. С. Відношення логічного наслідку для множин формул в композиційно-номінативних логіках / С. С. Шкільняк // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2011. – Т. 125. – С. 22–27.

S. Shkilniak

SEQUENT CALCULI OF RENOMINATIVE LOGICS OF QUASI-ARY PREDICATES

Sequent calculi for renominative composition-nominative logics of partial single-valued, total multiple-valued and partial multiple-valued quasi-ary predicates are constructed. The soundness and completeness theorems for these calculi are proved.

Keywords: logic, predicate, composition-nominative approach, logical consequence, sequent calculi.

Матеріал надійшов 10.10.2011