УДК 512.54

Олійник А. С.

АМАЛЬГАМОВАНІ ДОБУТКИ НЕСКІНЧЕННИХ ЦИКЛІЧНИХ ГРУП, ПОРОДЖЕНІ СКІНЧЕННИМИ АВТОМАТАМИ

Побудовано скінченні автомати, які визначають точні дії амальгамованих добутків скінченного числа нескінченних циклічних груп на кореневих деревах.

Ключові слова: амальгамований добуток, скінченний автомат, кореневе дерево.

Вступ

Кожна резидуально скінченна група допускає точну дію автоморфізмами деякого локально скінченного кореневого дерева. Проте резидуальна скінченність не є достатньою умовою існування точної дії групи на заданому регулярному кореневому дереві. Крім того, з існування такої дії ще не випливає, що вона визначена конструктивно, а тим більше за допомогою автоморфізмів спеціального вигляду. Найзручнішим способом задання автоморфізмів є той, який використовує скінченні автомати-транслятори. Інакше кажучи, за такого задання отримуємо точну дію заданої групи скінченно становими автоморфізмами регулярного кореневого дерева.

Нагадаємо означення амальгамованого добутку груп [1]. Нехай H — деяка група і $G_i, i \in I$ — така родина груп, що для кожного $i \in I$ задано мономорфізм групи H в G_i. Будемо ототожнювати H з образами цих мономорфізмів. Тоді індуктивна границя родини $(H, G_i, i \in I)$ відносно цих мономорфізмів називається амальгамованим добутком груп $G_i, i \in I$ з об'єднаною підгрупою H. Далі будемо розглядати лише такі амальгамовані добутки, коли група H є неодиничною (у випадку одиничної групи H одержимо вільний добуток груп $G_i, i \in I$), а жоден із мономорфізмів не є сюр'єктивним, тобто H ототожнюється з деякою власною підгрупою $G_i, i \in I$.

Точні дії скінченно становими автоморфізмами регулярного кореневого дерева резидуально скінченних амальгамованих добутків груп будувалися явно у кількох роботах. Таку дію групи $SL_2(\mathbb{Z})$, котра розкладається в добуток циклічних груп порядків 4 і 6, амальгамованих за підгрупою порядку 2, на 4-арному дереві, було запропоновано в [2], а на тернарному дереві — у [3]. Для амальгамованих добутків двох нескінченних циклічних груп зображення скінченно становими автоморфізмами відповідних дерев знайдено в [4].

У цій роботі розглянуто амальгамовані добутки скінченного числа нескінченних циклічних груп. Вказано явно точні дії таких груп скінченно становими автоморфізмами регулярних кореневих дерев, параметри яких визначаються за параметрами амальгамованих добутків.

Автоморфізми кореневих дерев

Нехай X — скінченний алфавіт, $|X| = n \geq 2$, X^* та X^ω — множини усіх слів і нескінченних вправо слів відповідно над X. Множина X^* щодо операції приписування утворює вільний моноїд. Символом $\mathcal{T}_n$ позначимо регулярне кореневе дерево, множиною вершин якого є X^*, коренем — порожнє слово Λ, а дві вершини u і v з'єднані ребром тоді й лише тоді, коли $u = vx$ або $v = ux$ для деякого символу x алфавіту X. Множину X^k всіх слів довжини k називають k-тим рівнем дерева $\mathcal{T}_n$, $k \geq 0$. Кожна вершина цього дерева з'єднана ребром рівно з n вершинами наступного рівня. Множина X^ω ототожнюється з границею дерева $\mathcal{T}_n$ [5].

Позначимо символом $\operatorname{Aut} \mathcal{T}_n$ групу автоморфізмів дерева $\mathcal{T}_n$. Для задання автоморфізмів $\mathcal{T}_n$ можна використовувати мову автоматів-трансляторів (далі просто автоматів) над алфавітом X. Автомат $\mathcal{A}$ над X задається набором $\langle Q, \varphi, \psi \rangle$, де $Q \neq \varnothing$ —

множина внутрішніх станів, $\varphi : Q\times X \to Q$ — функція переходів, а $\psi : Q\times X \to X$ — функція виходів автомата $\mathcal{A}$. Функції переходів і виходів продовжуються на множину $Q \times X^*$ згідно рівностей

$$\varphi(q,\Lambda) = q, \quad \varphi(q, ux) = \varphi(\varphi(q, w), x),$$
$$\psi(q,\Lambda) = \Lambda, \quad \psi(q, ux) = \psi(\varphi(q, w), x),$$

де $u \in X^*$, $x \in X$. Будемо розглядати лише підстановкові автомати, тобто такі, що для кожного стану $q \in Q$ відображення $\lambda_q(\cdot) = \psi(q,\cdot)$ є підстановкою з симетричної групи $Sym(X)$. Автомати можна задавати за допомогою помічених орієнтованих графів, які називаються діаграмами Мура. Множиною вершин такого графа є Q, вершина q має позначку λ_q, а з вершини q_1 у вершину q_2 веде ребро з позначкою x тоді й тільки тоді, коли $\varphi(q_1, x) = q_2$. У кожному стані $q \in Q$ автомат $\mathcal{A}$ визначає відображення $f_{\mathcal{A},q}$ множин X^* та X^ω, задане для довільного слова чи нескінченного слова $x_1x_2\ldots$ рівністю

$$f_{\mathcal{A},q}(x_1x_2\ldots) = \psi(q, x_1)\psi(q, x_1x_2)\ldots$$

Для підстановкового автомата таке відображення буде автоморфізмом кореневого дерева $\mathcal{T}_n$ і навпаки, кожен автоморфізм цього дерева визначається певним відображенням вказаного вигляду. Якщо ж відповідний автомат є скінченним, тобто множина його станів скінченна, то автоморфізм $\mathcal{T}_n$, який задається у кожному стані цього автомата, називається скінченно становим.

Вживається також інший спосіб задавання автоморфізмів дерева $\mathcal{T}_n$ — рекурентний. Довільний автоморфізм $g \in \operatorname{Aut}\mathcal{T}_n$ визначається набором $(g_x, x \in X)\sigma$, у якому $g_x \in \operatorname{Aut}\mathcal{T}_n$, $x \in X$, а $\sigma \in Sym(X)$. При цьому добуток $g \cdot h$ автоморфізмів $g = (g_x, x \in X)\sigma$ та $h = (h_x, x \in X)\tau$ має вигляд:

$$(g_x h_{x^\sigma}, x \in X)\sigma\tau,$$

а обернений до автоморфізму g обчислюється за правилом

$$g^{-1} = ((g_{x^{\sigma^{-1}}})^{-1}, x \in X)\sigma^{-1}.$$

Основна теорема

Наведемо спочатку одну достатню умову, за якої група підстановок є амальгамованим добутком своїх підгруп.

Лема 1. *Нехай група підстановок (G,Ω) породжується своїми підгрупами $G_1,\ldots,G_m$, $m \ge 2$, такими, що $\langle G_1,\ldots,G_{i-1}\rangle \cap G_i = H$ для кожного $i > 1$ і H є підгрупою G_i індекса > 2, $1 \le i \le m$. Якщо множина Ω містить такі непорожні підмножини $\Omega_1,\ldots,\Omega_m$, що попарно не перетинаються і для яких виконано умови:*

1. $\Omega_i^H \subset \Omega_i$, $1 \le i \le m$,

2. $\Omega_j^{G_i\setminus H} \subset \Omega_i$, $1 \le i,j \le m$, $i \ne j$,

то група G є амальгамованим добутком груп $G_i, 1 \le i \le m$, з об'єднаною підгрупою H.

Доведення. Індукція за числом підгруп m. У випадку $m = 2$ твердження леми випливає з [6, *p.168*].

При $m > 2$ позначимо символом K підгрупу G, породжену G_i, $1 \le i \le m-1$, і нехай

$$\Omega' = \cup_{i=1}^{m-1}\Omega_i.$$

Тоді

$$\Omega'^H \subset \Omega', \quad \Omega_m^{K\setminus H} \subset \Omega' \text{ і } \Omega'^{G_m\setminus H} \subset \Omega_m.$$

Отже, для підгруп K, G_m групи G, які перетинаються по H, і підмножин Ω', Ω_m виконано умови леми. Тому G є амальгамованим добутком K і G_m з об'єднаною підгрупою H. За припущенням індукції, K є добутком G_i, $1 \le i \le m-1$ з об'єднаною підгрупою H. Звідси випливає твердження леми.

Розглянемо тепер амальгамований добуток m ($m \ge 2$) нескінченних циклічних груп. Нехай ці групи породжуються, відповідно, елементами $g_1,\ldots,g_m$. Оскільки об'єднана підгрупа є власною неодиничною в кожній з них, то вона породжується відповідно елементами $g_1^{k_1},\ldots,g_m^{k_m}$ для деяких натуральних $k_1,\ldots,k_m \ge 2$. Це означає, що такий амальгамований добуток має задання твірними та визначальними співвідношеннями виду

$$\langle y_1,\ldots,y_m | y_1^{k_1} = \ldots = y_m^{k_m}\rangle.$$

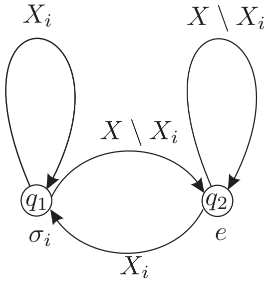
Позначимо його $G(k_1,\ldots,k_m)$.

Теорема 1. *Для довільних натуральних $m \ge 2$, $k_1,\ldots,k_m \ge 3$ група $G(k_1,\ldots,k_m)$ допускає точну дію скінченно становими автоморфізмами кореневого дерева $\mathcal{T}_n$, де $n = k_1 + \ldots + k_m - m + 1$.*

Доведення. Визначимо алфавіт

$$X = \{x_0, x_{1,1},\ldots,x_{1,k_1-1},\ldots,x_{m,1},\ldots,x_{m,k_m-1}\}.$$

Для кожного i, $1 \le i \le m$ позначимо символом σ_i цикл $(x_0x_{i,1}\ldots x_{i,k_i-1})$ з групи $Sym(X)$, символом X_i — множину $X \setminus \{x_0, x_{i,1},\ldots,x_{i,k_i-1}\}$, і визначимо автомат $\mathcal{A}_i$ його діаграмою Мура:



(символом e тут і далі позначено тотожну підстановку). Нехай a_i та b_i — автоморфізми $\mathcal{T}_n$, які визначені цим автоматом у станах q_1 і q_2 відповідно. Тоді

$$a_i = (c_{i,x}, x \in X)\sigma_i,$$

$$b_i = (c_{i,x}, x \in X),$$

де

$$c_{i,x} = \begin{cases} a_i, & \text{якщо } x \in X_i \\ b_i, & \text{якщо } x \in X \setminus X_i \end{cases}.$$

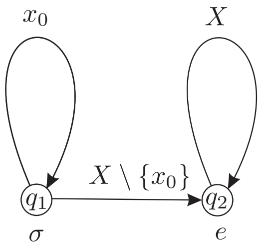
Оскільки множина символів X_i інваріантна відносно дії σ_i, то

$$a_i^2 = (c_{i,x}^2, x \in X)\sigma_i^2,$$

$$b_i^2 = (c_{i,x}^2, x \in X),$$

звідки одержуємо, що порядок автоморфізмів a_i та b_i дорівнює порядку підстановки σ_i, тобто рівний k_i.

Розглянемо автомат $\mathcal{B}$, заданий діаграмою Мура



Символом σ тут позначено транспозицію $(x_0 x_{1,1})$ множини X. Нехай a — автоморфізм, який визначає цей автомат у стані q_1. Зрозуміло, що в стані q_2 він визначає тотожний автоморфізм ϵ. Тому

$$a = (a, \epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon)\sigma$$

і для довільного натурального k одержуємо:

$$a^{2k} = (a^k, a^k, \epsilon, \ldots, \epsilon),$$

$$a^{2k+1} = (a^{k+1}, a^k, \epsilon, \ldots, \epsilon)\sigma.$$

Звідси випливає, що автоморфізм a має нескінченний порядок.

Нехай $K = k_1 \cdot \ldots \cdot k_m$, $l_1 = K/k_1, \ldots, l_m = K/k_m$. Визначимо тепер для кожного i, $1 \le i \le m$ автоморфізм $g_i \in \operatorname{Aut} \mathcal{T}_n$ рівністю

$$g_i = (a_i, a^{l_i}, \ldots, a^{l_i}).$$

Його можна задати автоматом з $k_i + 4$ внутрішніми станами, який легко конструюється з автоматів $\mathcal{A}_i$ та $\mathcal{B}$. Циклічна група $G_i = \langle g_i \rangle$ є нескінченною, оскільки елемент a має нескінченний порядок. Крім того,

$$g_i^{k_i} = (\epsilon, a^K, \ldots, a^K),$$

оскільки порядок a_i рівний k_i. Спільне значення елементів $g_i^{k_i}, 1 \le i \le m$, позначимо символом h.

Нехай G — підгрупа групи $\operatorname{Aut} \mathcal{T}_n$, породжена множиною $\{g_i : 1 \le i \le m\}$. Група G породжується своїми нескінченними циклічними підгрупами $G_i, 1 \le i \le m$. Кожна з них містить підгрупу $H = \langle h \rangle$, причому індекс H у G_i дорівнює $k_i > 2$, $1 \le i \le m$.

Нехай $i > 1$. Для довільного натурального $j < i$ та для натуральних чисел s, t таких, що $s < k_i, t < k_j$, образом вершини $x_0 x_0$ дерева $\mathcal{T}_n$ під дією g_i^s буде вершина $x_0 x_{i,s}$, а під дією g_j^t — вершина $x_0 x_{j,t}$. Тому під дією елементів групи $\langle G_1, \ldots, G_{i-1} \rangle$ вершина $x_0 x_0$ не перейде у $x_0 x_{i,s}$. Отже, кожен елемент перетину $\langle G_1, \ldots, G_{i-1} \rangle \cap G_i$ повинен залишати вершину $x_0 x_0$ нерухомою. У групі G_i стабілізатор цієї вершини дорівнює H. Отже, кожен елемент цього перетину є степенем h, тобто

$$\langle G_1, \ldots, G_{i-1} \rangle \cap G_i = H.$$

Користуючись лемою 1, покажемо, що

$$G \simeq G(k_1, \ldots, k_m).$$

Будемо розглядати дію групи G на множині X^ω. Визначимо непорожні підмножини $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ в X^ω. Покладемо $Y_i = \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,k_i-1}\}$ і нехай

$$\Omega_i = \{x_0 w y x_0 x_0 \ldots : w \in X^*, y \in Y_i\}, 1 \le i \le m.$$

Тоді підмножини Ω_i попарно не перетинаються, бо множини Y_i попарно не перетинаються. Твірний елемент h групи H діє на всіх підмножинах $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ в X^ω тривіально, а отже,

$$\Omega_i^H \subset \Omega_i, \quad 1 \le i \le m.$$

Нехай $i, j \in \{1, \ldots m\}$, $i \ne j$, та $w \in X^*$, $y \in Y_j$. Тоді $u = x_0 w y x_0 x_0 \ldots \in \Omega_j$. Оскільки $Y_j \subset X_i$, то з означення автомата $\mathcal{A}_i$ маємо

$$u^{g_i} = x_0 w_1 y_0 (x_0 x_0 \ldots)^{a_i}$$

для деяких $w_1 \in X^*$ та $y_0 \in X$. Тому,

$$u^{g_i} = x_0 w_1 y_0 x_{i,1} x_0 x_0 \ldots,$$

звідки $u^{g_i} \in \Omega_i$. Це означає, що

$$\Omega_j^{G_i \setminus H} \subset \Omega_i.$$

Тепер, застосовуючи лему 1, одержуємо необхідне твердження.

Заключні зауваження

Обмеження $k_1, \ldots, k_m \geq 3$ в умові теореми 1 не є суттєвим. Коли хоча б одне із цих чисел рівне 2, необхідне твердження виводиться безпосередньо з канонічного вигляду [1] елементів амальгамованого добутку.

Випадок $m = 2$ теореми 1 розглянуто в роботі [4], де для доведення було використано іншу техніку, ніж у цій статті.

Значення числа n в умові теореми 1 можна зменшити до p, де p — найбільший простий дільник добутку $k_1 \cdot \ldots \cdot k_m$. Проте в такому випадку в доведенні з'явиться ряд нових деталей, і автомати, які визначатимуть твірні елементи шуканої групи, матимуть складніший вигляд. Зокрема, зросте число їх внутрішніх станів.

У доведенні теореми 1 замість автоморфізма a можна брати довільний автоморфізм нескінченного порядку. Вибраний автоморфізм найпростіший у тому розумінні, що він задається автоматом із мінімально можливим числом станів. Його можна розглядати як образ так званої додавальної машини [5] під дією природного занурення групи $\mathrm{Aut}\, \mathcal{T}_2$ у групу $\mathrm{Aut}\, \mathcal{T}_n$.

1. Serre J.-P. Trees / J.-P. Serre. Berlin – New-York : Springer, 1980. — 142 p.
2. Brunner A. M. The generation of $GL(n, \mathbb{Z})$ by finite state automata / A. M. Brunner, S. Sidki // International Journal of Algebra and Computation. — 1998. — V. 8. — P. 127–139.
3. Olijnyk A. S. Free products of C_2 as groups of finitely automatic permutations / A. S. Olijnyk // Вопросы алгебры. — 1999. — Вып.14. — С. 158–165.
4. Lavrenyuk Y. Faithful group actions on rooted trees induced by actions of quotients / Y. Lavrenyuk, V. Mazorchuk, A. Oliynyk, V. Sushchansky // Communications in Algebra. — 2007. — V. 35. – P. 3759–3775.
5. Григорчук Р. И. Автоматы, динамические системы и группы / Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский // Труды мат. института им. Стеклова. — 2000. — Т. 231. — С. 134–214.
6. Lyndon R. Combinatorial group theory / R. Lyndon, P. Schupp. — Berlin –New-York : Springer, 1977. — 340 p.

A. S. Oliynyk

AMALGAMATED PRODUCTS OF INFINITE CYCLIC GROUPS, GENERATED BY FINITE AUTOMATA

It is constructed finite automata defining faithful actions of amalgamated products of finite number of infinite cyclic groups on rooted trees.
Keywords: amalgamated product, finite automaton, rooted tree.