Унікально-ексцентрично-точкові графи

Гак Артем Олегович

Науковий керівник: к.ф.-м.н. Козеренко С.О.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”

Основні означення

Відстань $d(u, v)$ між двома вершинами u та v визначається як довжина найкоротшого шляху між u та v.

Ексцентриситет вершини v графа G – найбільша відстань між v і будь-якою іншою вершиною: $e(v) = \max d(v, u), u \not= v : v \in V(G)$

Ексцентричною вершиною для v називаємо таку вершину u, що $e(v) = d(v, u)$

Орграфом ексцентриситетів $ED(G)$ називається орієнтований граф, який має ту саму множину вершин, а дуги визначаються як: $u \to v$, якщо v є ексцентричною для u.

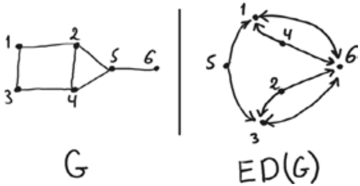


Рис. 1: Граф G та його ексцентричний орграф $ED(G)$.

Означення (1)

Зв'язний граф G називається унікально-ексцентрично-точковим графом (у.е.т.-графом), якщо кожна його вершин має єдину ексцентричну вершину.

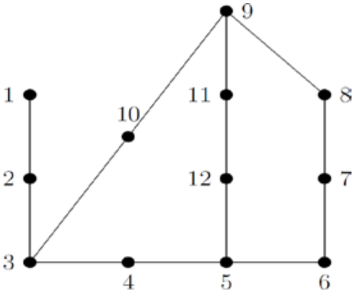


Рис. 2: У.е.т.-граф G.

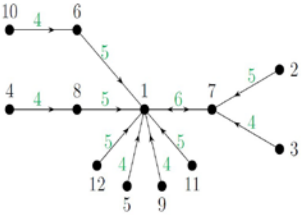


Рис. 3: Орграф ексцентриситетів ED(G) для у.е.т.-графа G на Рис. 2.

Орграфи ексцентриситетів

Твердження

Кожна компонента слабкої зв'язності $ED(G)$ містить єдиний 2-цикл.

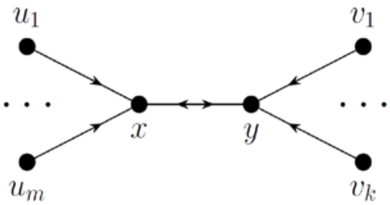


Рис. 1: Функціональний орграф $D_{m,k}$.

якщо обидві вершини 2-циклу мають вхідний степінь 1, називаємо таку компоненту **голою (m=k=0)**,
якщо рівно одна, то **напівголою (m=0, k>0)**,
інакше ж називаємо її **повною (m>0, k>0)**.

У.е.т.-графи діаметра 3

Теорема

Нехай G зв'язний граф, який не є самоцентральним. Тоді G є у.е.т.-графом із $\mathrm{diam}(G) = 3$ *тоді і тільки тоді, коли його доповнення $\overline{G}$ ізоморфне бі-зірці.*

Твердження

Для орграфа D існує у.е.т.-граф G із $\mathrm{diam}(G) = 3$ *такий, що $E_D(G) \simeq D$ тоді і тільки тоді, коли D складається з $l \geq 3$ голих компонент або $D \simeq D_{m,k}$ для $m, k \geq 1$.*

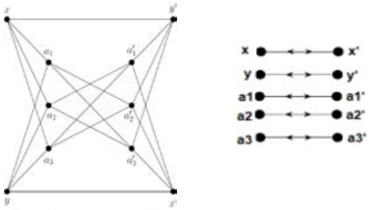


Рис. 7: Ексцентричний клон $K_{2,3}$.

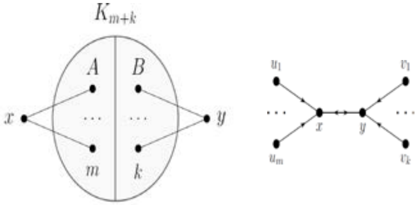


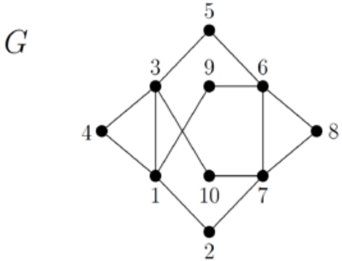
Рис. 8: Несамоцентральний у.е.т.-граф G із $\mathrm{diam}(G) = 3$

У.е.т.-графи діаметра 4

Теорема

Нехай G є несамоцентральним у.е.т.-графом із $\mathrm{diam}(G) = 4$. Тоді виконуються такі твердження:

1. *кожна ексцентрична вершина G лежить на циклі в $ED(G)$;*
2. *якщо $ED(G)$ містить 2-цикл $x \leftrightarrows y$, то x, y породжують голу компоненту в $ED(G)$ тоді й тільки тоді, коли $d_G(x, y) = 3$;*
3. *$ED(G)$ не містить напівголих слабких компонент зв'язності.*



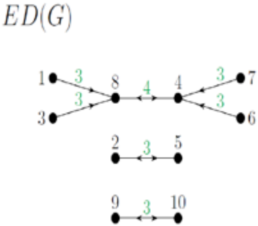


Рис. 25: У.е.т.-граф G та його ED(G), що відповідає рядку № 8, Таблиці 1.

Схема еволюційного алгоритму

Рис. 20: Схема розробленого еволюційного алгоритму.

Порівняння варіантів стартової популяції

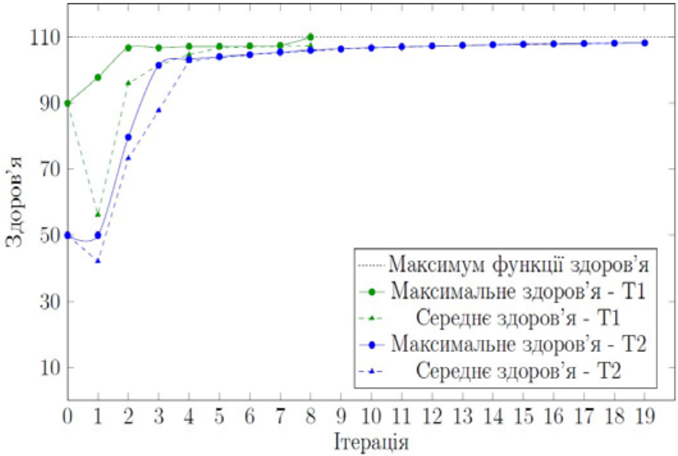


Рис. 19: Графік зміни середнього та максимального здоров'я популяції залежно від стартової популяції. У випадку T1 стартовою популяцією слугує граф із Лістингу. 9, у випадку T2 граф K_2.

Порівняння методів відбору

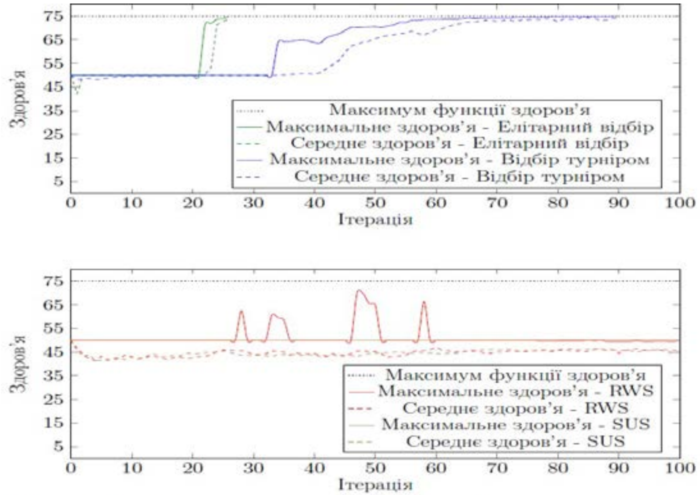


Рис. 18: Графіки зміни середнього та максимального здоров'я популяції залежно від методу відбору (при пошуку у.е.т.-графа G із породженим шляхом у $ED(G)$ довжин ≥ 4).

Таблиця результатів

Табл. 1: Результати еволюційного пошуку у.е.т.-графів із заданими властивостями

№	В. 0	В. 1	В. 2	В. 3	min diam(G)	min комп. $ED(G)$	min $\|V(G)\|$	min $\|E(G)\|$
1	✗	✗	✗	✗	0	0	0	0
2	✓	✗	✗	✗	6-8	2	14	14
3	✗	✓	✗	✗	6	1	12	13
4	✗	✗	✓	✗	5	3–4	15	20
5	✗	✗	✗	✓	5	3–4	16	23
6	✓	✓	✗	✗	6–7	2	15	16
7	✓	✗	✓	✗	6–11	2	26	29
8	✓	✗	✗	✓	4	3	10	14
9	✗	✓	✓	✗	≥ 6	≥ 2		
10	✗	✓	✗	✓	≥ 6	≥ 3		
11	✗	✗	✓	✓	≥ 5	≥ 3		
12	✗	✓	✓	✓	≥ 6	≥ 3		
13	✓	✗	✓	✓	≥ 5	≥ 3		
14	✓	✓	✗	✓	6	3	17	25
15	✓	✓	✓	✗	6-8	2	36	57
16	✓	✓	✓	✓	≥ 6	≥ 3		

У.е.т.-граф, що відповідає рядку 14 таблиця

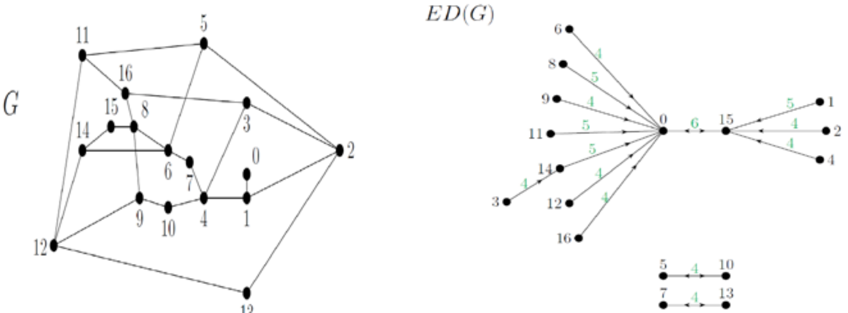


Рис. 26: У.е.т.-граф G та його ED(G), що відповідає рядку № 14, Таблиці 1.

У.е.т.-граф, що відповідає рядку 15 таблиця

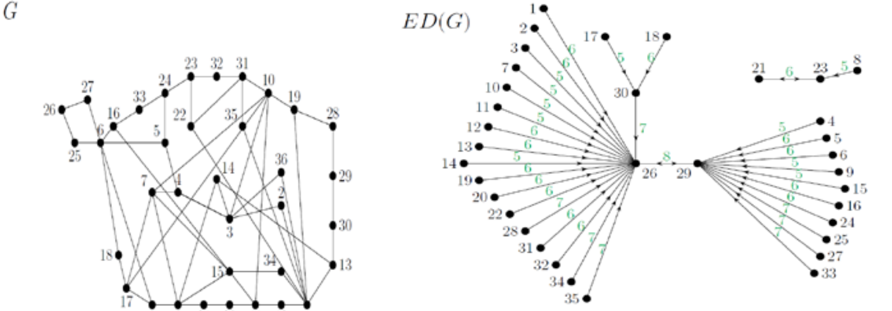


Рис. 27: У.е.т.-граф G та його ED(G), що відповідає рядку № 15, Таблиці 1.

G не є простим циклом, всі компоненти $ED(G)$ голі

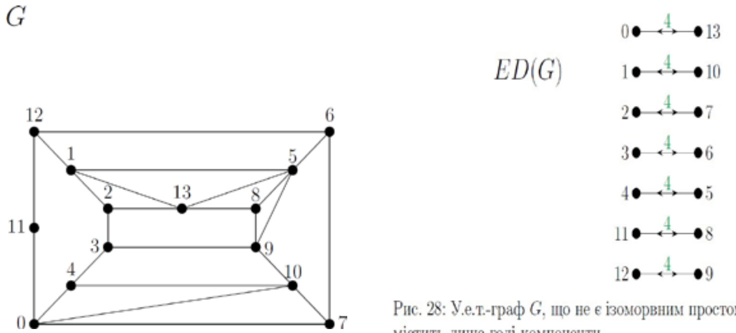


Рис. 28: У.е.т.-граф G, що не є ізоморвним простому циклу, а ED(G) якого містить лише голі компоненти.

Твердження

Нехай G у.е.т-граф із $\operatorname{diam}(G) \geq 4$, тоді довжина найдовшого породженого шляху в $ED(G)$ не перевищує [illegible] $- 1$.

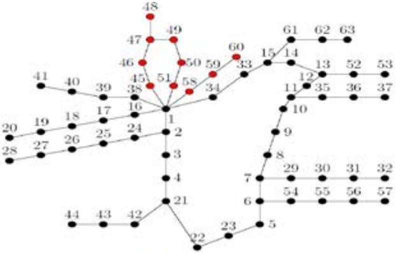


Рис. 29: У.е.т.-граф G такий, що $\mathrm{ED}(G)$ містить породжений ланцюг довжини 5 (Рис 30). Цей граф можна спростити, видаливши вершини позначені червоним, при цьому ланцюг довжини 5 у $ED(G)$ не втратиться.

Довжини породжених ланцюгів $ED(G)$

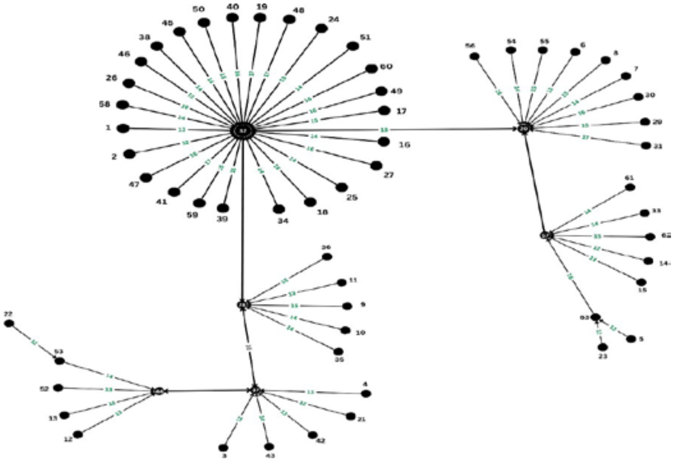


Рис. 30: ED(G) для у.е.т.-графа із Рис 29.

Висновки

1. Охарактеризовано несамоцентральні у.е.т.-графи діаметра 3;
2. Охарактеризовано $ED(G)$ для у.е.т.-графів діамтра 4;
3. Розроблено еволюційний алгоритм для пошуку у.е.т.-графів із заданими властивостями.

Апробація результатів

ECCENTRIC DIGRAPHS OF UNIQUE POINT ECCENTRIC GRAPHS

A. HAK, V. HAPONENKO, S. KOZERENKO

Let G be a simple finite connected undirected graph and $u \in V(G)$ be its vertex. A vertex $v \in V(G)$ is called an *eccentric vertex for* u if $d_G(u,v) = e_G(u)$, where $e_G(u) = \max\{d_G(u,x) : x \in V(G)\}$ denotes the *eccentricity* of a vertex u. One way to capture the local metric structure of a connected graph G is to consider the so-called *eccentric digraph* $Ecc(G)$, which is a digraph with $V(Ecc(G)) = V(G)$ and there is an arc $u \to v$ if v is an eccentric vertex for u.

Еволюційний пошук унікально-ексцентрично-точкових графів із заданими властивостями

А. О. Гак

За'язний граф G називається унікально-ексцентрично-точковим(у.е.т.), якщо кожна його вершина має єдину ексцентричну вершину [3]. Графом ексцентриситетів $ED(G)$ називається орієнтований граф, який має ту саму множину вершин, а дуги визначаються як: $u \to v \iff v$ є ексцентричною для u [1]. Кожна компонента слабкої зв'язності $ED(G)$ містить єдиний 2-цикл. Якщо обидві вершини 2-циклу мають вхідний степінь 1, називаємо таку компоненту голою, якщо рівно одна, то напівголою, інакше ж називаємо її повною. У роботі [2] ставиться питання існування у.е.т. графа із парою взаємно ексцентричних вершин, відстань між якими менша за його діаметр. Використовуючи еволюційні стратегії, вдалось знайти граф на 22 вершинах, який задовольняє цій властивості (її будемо називати нульовою). Введемо ще три властивості:

1) $ED(G)$ містить прості ланцюги довжини більше ніж 2;
2) $ED(G)$ містить напівголу компоненту;
3) $ED(G)$ одночасно містить повну та голу компоненти.

Discrete Mathematics 346 (2023) 113614

Contents lists available at ScienceDirect

ELSEVIER

Discrete Mathematics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/disc

Unique eccentric point graphs and their eccentric digraphs

Artem Hak, Vladyslav Haponenko, Sergiy Kozerenko *, Andrii Serdiuk

Faculty of Computer Sciences, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Skovorody str. 2, 04070 Kyiv, Ukraine

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 19 January 2023
Received in revised form 4 July 2023
Accepted 13 July 2023
Available online 25 July 2023

Keywords:
Unique eccentric point graph
Eccentric digraph
Eccentricity of a vertex
Block graph

A B S T R A C T

We study graph-theoretic properties of eccentric digraphs of unique eccentric point graphs (shortly, uep-graphs). The latter are the connected graphs in which every vertex has a unique eccentric vertex. In particular, we characterize uep-graphs and the corresponding eccentric digraphs in the following classes: self-centered graphs having the number of vertices twice as diameter, block graphs, and graphs with diameter three. Also, we obtain non-trivial properties of weak components in eccentric digraphs of uep-graphs with diameter four and pose several open questions in this direction.

Література

A. Hak, V. Haponenko and S. Kozerenko, *Eccentric digraphs of unique point eccentric graphs*, *Xth All-Ukrainian Conference of Young Scientists in Physics and Mathemathics*, April 16-17, Kyiv, Ukraine, 84–85.

A. Hak, V. Haponenko, S. Kozerenko and A. Serdiuk, *Unique eccentric point graphs and their eccentric digraphs*, *Discrete Mathematics* **346(12)** (2023), 113614.

A. Hak, *Еволюційний пошук унікально-ексцентрично-точкових графів із заданими властивостями*, *Shevchenkivska Vesna – 2023*, April 14, Kyiv, Ukraine, 77.

K.R. Parthasarathy and R. Nandakumar, *Unique eccentric point graphs*, *Discrete Math.* **46(1)** (1983), 69–74.

A. Miasnikov, *Genetic Algorithms and the Andrews-Curtis Conjecture*, *Int. J. Algebra Comput.* **9** (1999), 671–686.

A.Z. Wagner, *Constructions in combinatorics via neural networks*, (2021), https://doi.org/10.48550/arXiv.2104.14516

J. Siek, L.Q. Lee and A. Lumsdaine, *The Boost Graph Library (BGL)*, (2000).