

Міністерство освіти та науки України
Національний університет “Києво-Могилянська академія”
Факультет природничих наук
Кафедра фізико-математичних наук

Кваліфікаційна робота
освітній ступень - магістр
**на тему: «ТЕРМОСТАТИСТИЧНІ ПІДХОДИ У ПОБУДОВІ
ІНДУКОВАНИХ МОДЕЛЕЙ ГРАВІТАЦІЇ»**

Виконав студент 2 року навчання
спеціальності

104 Фізика та астрономія

Михайлів Остап Петрович

Керівник Гаврилик Олександр

Михайлович, доктор ф.м.н.,

професор, провідний науковий

співробітник

Рецензент Жохін Анатолій Сергійович,

кандидат ф.м.н.,

старший науковий співробітник

Кваліфікаційна робота захищена

з оцінкою 95 «відмінно»

Секретар ЕК Г.В.Оводенко

« 06 » липня 2022 р.

Київ – 2022

ПЛАН

Вступ.....	2
Розділ 1. Теоретико-методологічні засади дослідження індукованих моделей гравітації.....	4
1.1. Квантово-польові теорії гравітації.....	4
1.2. Термостатистичні теорії гравітації.....	18
Розділ 2. Основи $\{q, (p,q), Q, \mu\}$-числень та їх застосування у нестандартних термодинаміках.....	25
2.1. Математичні основи $\{q, (p,q), Q, \mu\}$ -числень.....	25
2.2. Нестандартні статистики та (q, μ) -деформовані термодинаміки.....	32
Розділ 3. Термостатистичне μ-деформоване рівняння руху гравітаційного поля Ейнштейна та космологічне рівняння Фрідмана.....	46
3.1. Рівняння Ейнштейна з параметром μ -деформації.....	46
3.2. Рівняння Фрідмана з параметром μ -деформації.....	55
Висновки.....	58
Список використаних джерел та літератури.....	65

ВСТУП

Актуальність теми дослідження:

В сучасній теоретичній фізиці існує клас фундаментальних фізичних проблем, які не вдалося вирішити до теперішнього часу. Однією із таких фундаментальних проблем є розробка квантової теорії гравітації, яка могла б об'єднати уявлення про гравітацію з позиції квантової теорії поля з висновками теорії відносності Ейнштейна.

Як квантова теорія поля, так і загальна теорія відносності мають емпіричні підтвердження в спостереженнях та експериментах. Відповідно, теорія відносності є істинною класичною теорією гравітації в макроскопічних масштабах простору-часу та в поясненні космологічних процесів у Всесвіті.

Теорія відносності розглядається як граничний випадок квантової теорії поля, але не існує несуперечливого граничного переходу, який окрім цього зберігав би повноту опису та пояснення гравітації.

Сучасні квантові теорії гравітації не є абсолютно несуперечливими та фрагментарно пояснюють гравітацію на квантовому рівні.

Вирішення проблем несуперечливості та повноти квантової теорії гравітації є актуальними для спільноти фізиків-науковців в 21 ст.

Мета дипломної роботи: розробка індукованої моделі гравітації.

Завданнями дипломної роботи є:

1. Описати новизну та довести ефективність застосування *μ -деформації* до вирішення фізичних проблем.
2. Вивести *μ -деформоване* узагальнення рівняння гравітаційного поля Ейнштейна.
3. Описати та довести вплив *μ -деформованої* гравітації на інфляційне розширення Всесвіту.
4. Підтвердити математичну коректність *μ -деформованих* рівнянь Ейнштейна та Фрідмана.

5. Довести перспективність застосування μ -деформованої гравітації в контексті вирішення астрофізичних проблем.

Об'єкт роботи: індуковані моделі гравітації.

Предметом роботи є термостатистичні підходи у побудові індукованих моделей гравітації.

Методологія:

- У роботі застосовувалися загальнотеоретичні методи аналізу, синтезу та аналогії.
- У якості конкретних методів застосовувалися термостатистичний підхід Верлінде, методи статистичної фізики, методи математичного аналізу, векторно-тензорного числення, диференціальне та інтегральне числення.

Огляд літератури: Квантові теорії гравітації розроблялися у дослідженнях таких авторів: Сахаров А.Д., М.Віссер, Сервантес-Кота, Денен, Бейн, Чайчіан, Оксанен, Туреану, Бекенштейн, Адлер, Камешик, Тронціні, Вентурі, Кан, Шіраїші, Госотані, Шаріпов, Зі, Стелле, Утіяма, ДеВітт, Снайдер, Смолін, Сарданашвілі, Поздєєва, Вернова, Ода, Непомехі, Фуджі, Нарайн, Клейн, Андріанов, Солдаті, Джіаконі, Клусо, Фролов, Фурсаєв, Яскін, Щирба, Кіхенасамі, Бао, Фрідман, Ньюенхайзен, Гаврилик О.М., Діл, Колай, Ерсанлі, Кіббл, Бульвер, Горовіц, Стромінгер, Фінкельштейн, Зельніков, Жульве, Тонін, Зет, Хехл, Ман Хо, Кепхард, Мініч, Сотіріо, Вайнфуртнер, Смілья, Сенай, Кібароглу та ін.

Джерельна база: дипломної роботи становить наукові статті та підручники з теоретичної фізики, математичного аналізу, векторного та тензорного числень, статистичної фізики.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ІНДУКОВАНИХ МОДЕЛЕЙ КВАНТОВОЇ ГРАВІТАЦІЇ

1.1. Квантово-польові теорії гравітації

Генезис теорії індукованої гравітації розпочався в 1967 році на конференції Академії наук СРСР, коли академіком Сахаровим А.Д. була прочитана доповідь на тему “*Вакуумні квантові флуктуації у викривленому просторі та теорія гравітації*”¹.

Доповідь Сахарова А.Д., з міркувань зручності інтерпретаційного опрацювання, варто розкласти на три епістемологічних блоки:

- Метрика та гравітація.
- Емерджентність гравітації як наслідок флуктуацій вакууму.
- Густина флуктуаційної функції Лагранжа.

Перший блок, який умовно називається “ метрика та гравітація ”, описує гравітаційну дію Ейнштейна та її фізичну інтерпретацію.

В Загальній теорії відносності гравітаційна дія Ейнштейна:

$$S(R) = - \frac{1}{16 \pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x$$

(1.1.1)

де G – гравітаційна константа, яка в системі СІ має значення $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{Н м}^2 \text{кг}^{-2}$, визначник метричного тензора $g = \det(g_{\mu\nu})$, R – інваріант тензора Річчі $R_{\mu\nu}$, який за означенням є двічі згорнутим тензором Річчі з контраваріантним метричним тензором $g^{\mu\nu}$, тобто

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

(1.1.2)

де $g^{\mu\nu}$ – метричний тензор другого рангу, який входить в коваріантній формі в диференціальний квадрат відстані:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

¹ А. Д. Сахаров, Вакуумные квантовые флуктуации в искривленном пространстве и теория гравитации, Докл. АН СССР, 1967, том 177, номер 1, ст.70–71

(1.1.3)

$R_{\mu\nu}$ – симетрична білінійна форма задана на дотичному просторі для будь-яких дотичних векторів ріманового многовиду, що лінійно діагоналізує компоненти матриць векторів та визначає автоморфізм дотичного простору.

Дія Ейнштейна описує взаємозв'язок між матерією та простором, відповідно в ЗТВ є диференціація між субстанцією та формою. В цьому контексті необхідно зробити декілька ремарок стосовно цього розрізнення.

По-перше, *матерія є нероздільною від простору*. Це значить, що а пріорі не було онтологічного часового початку встановлення взаємодії між простором та матерією. Як висновок, з нероздільності виводиться визначення часу як континууму подій.

По-друге, *ЗТВ описує простір та матерію на основі поняття гравітаційної взаємодії*. Математичним відображенням взаємозв'язку простору та матерії є дія Ейнштейна та рівняння гравітаційного поля:

$$S = \frac{1}{2\gamma} \int \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_m) d^4x$$

(1.1.4)

де $\mathcal{L}_m$ – густина функції Лагранжа матерії (або фізичного поля), γ – гравітаційна стала Ейнштейна.

Варіюючи дію згідно *принципу найменшої дії*, отримуються рівняння руху поля:

$$\delta S = 0$$

(1.1.5)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \gamma T_{\mu\nu}$$

(1.1.6)

де $T_{\mu\nu}$ – тензор енергії-імпульсу матерії:

$$T_{\mu\nu} = -2 (\delta \mathcal{L}_m / \delta g) + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m$$

(1.1.7)

Якщо ввести космологічну сталу в дію Ейнштейна:

$$S = \frac{1}{2\gamma} \int \sqrt{-g} ([R - 2\Lambda] + \mathcal{L}_m) d^4x$$

(1.1.8)

то рівняння руху поля міститиме космологічний доданок Λ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \gamma T_{\mu\nu}$$

(1.1.9)

ЗТВ описує три типи існування матерії:

- простір
- гравітація (узагальнено – взаємодія будь-якої фізичної природи між будь-якими тілами або фізичне поле)
- маса

Макроскопічний простір та час є неперервними формами існування матерії. Над величинами, як координатами та часом, виконують перетворення Лоренца, зберігаючи при цьому інваріантність просторово-часових величин.

Лоренц-інваріантність не вимагає від простору неперервності, відповідно, час та простір можуть бути дискретними. Перетворення Лоренца для дискретних величин простору та часу запропонував Хартланд Снайдер². В залежності від типу однорідних квадратичних форм, можна отримати різні варіанти Лоренц-інваріантності дискретного простору-часу³.

По-третє, дія Ейнштейна призводить до викривлення простору, і як консеквент виникає узагальнена сила або метрична пружність простору⁴, що протидіє процесу викривлення. Ця метрична пружність простору є гравітаційною силою, яка протидіючи викривленню, генерує феномен притягання-викривлення, що є гравітацією⁵.

² Heartland. Snyder, Quantiz'ed Space-Time. Physical Review. Volume 71, Number 1. January 1, 1947. pp.38-41

³ В фізичній літературі та науковому лексиконі використовується словосполучення Лоренц-коваріантність, що по змісту тотожне Лоренц-інваріантності. Єдиним семантичним нюансом є те, що слово коваріантність характеризує математичні рівняння, які при відповідних перетвореннях зберігають свою структурну форму, а слово інваріантність характеризує фізичні закони, які зберігають незмінність в будь-якій системі відліку.

⁴ В доповіді говориться про метричну пружність простору, і тут проявляється аналогія з механічною системою: пружиною та важком, який розтягує пружину при прикладанні до нього сили в певній точці. Коли пружина розтягується, то виникає протидія цьому процесу, тобто сила пружності. Відповідно, гравітаційна сила є по аналогії метричною пружністю простору.

⁵ Феноменологічно спостережуваний простір має дві фундаментальні властивості: метрику та топологію. Метрика простору є кількісною властивістю, а значить гравітаційна сила чи поле має геометричні властивості, тобто не існує певної математизації простору в ЗТВ, а лише відображення його об'єктивних властивостей.

У другому та третьому блоках формулюється гіпотеза Сахарова: гравітаційна дія Ейнштейна тотожна дії флуктуацій вакууму

$$S(R) \equiv S(R)_{vac}$$

(1.1.10)

По-перше, на виникнення гіпотези Сахарова вплинуло дослідження Казимира про притягання двох металевих пластинок у вакуумі через дію флуктуацій: явище притягання пластинок, механізми якого у флуктуаціях вакууму є аналогією з гравітацією, яка per se є притяганням об'єктів.

По-друге, вакуум задається через скалярне поле на рімановому многовиді, тому виникає залежність дії флуктуацій від інваріанта тензора Річчі або локальної кривизни в точці на многовиді⁶.

По-третє, для опису флуктуацій використовується тензор енергії-імпульсу скалярного поля заданого на многовиді Рімана. В цьому контексті Сахаров використовує теорію збурення та функціональне представлення Фейнмана:

за умови незбуреного стану скалярного поля на рімановому многовиді, тензор енергії-імпульсу та дія флуктуацій тотожно рівні нулеві, а значить відсутні ефекти генерування віртуальних частинок.

Ці величини, як тензор енергії та дія, пропорційні інтегралу по імпульсах віртуальних частинок і тотожні нулеві для незбуреного та невикривленого стану поля заданого на многовиді:

$$T_k \sim S_{vac} \sim \int dk k^3 \equiv 0$$

(1.1.11)

де k – імпульс віртуальної частинки, T_k – тензор енергії-імпульсу віртуальних частинок, S_{vac} – дія флуктуацій вакууму.

Введення гравітації в систему поля заданого на многовиді призводить до виникнення мікроскопічних ступенів свободи, тому інтеграл не тотожний нулеві:

$$\int dk k^3 \neq 0$$

(1.1.12)

⁶ В статті Сахарова про це немає інформації, вона отримана із оглядової статті Мета Віссера, який також пропонує свою модифіковану модель індукованої гравітації.

З міркувань мікроскопіки збурення, Сахаров ототожнює густину функції Лагранжа для флуктуацій поля (збуджений стан спричинений внеском гравітації) із гравітаційною дією, та для вирішення проблеми розбіжності цього інтегралу, розкладає лагранжіан в ряд за степенями скалярної кривизни R :

$$\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(0) + A \int dk k R + B \int \frac{dk}{k} R^2 + \dots$$

(1.1.13)

$A, B \sim 1$, перший доданок дає гравітаційну сталу Ейнштейна⁷, другий доданок цього розкладу дає чисельне значення гравітаційної сталої Ньютона, тобто

$$G = - \frac{1}{16\pi A \int k dk R}$$

(1.1.14)

Для того аби чисельні обчислення не суперечили емпіричним, необхідно щоб ефективною межею інтегрування було значення $k_0 \sim 10^{28}$ еВ⁸.

Чайчіан, Оксанен та Туреану в статті “Індукована гравітація Сахарова та теорія Пуанкаре” описують проблеми розробки квантової теорії гравітації та свій підхід до їх вирішення⁹. Ця модель гравітації є однією із розробок Чайчіан та його колег, окрім неї дослідники розробили некомутативну модель гравітації із твісторною симетрією Пуанкаре¹⁰. Некомутативність цієї моделі базується на ідеї Гайзенберга щодо вимірюваності величин у квантовій механіці та алгебрі Хопфа.

Базовою проблемою в побудові квантової теорії гравітації¹¹ є розбіжності інтегралів по імпульсах частинок в представленні Фейнмана (ultraviolet-divergent problem), які з’являються під час врахування впливу матерії на простір, а математично в рівнянні для лагранжіана взаємодії між простором та матерією. Імпульсні інтеграли графічно задаються замкнутою петлею (one-

⁷ O. Klein, Generalization of Einstein’s Principle of Equivalence so as to Embrace the Field Equations of Gravitation. Physica Scripta. Vol. 9, 69-72, 1974. pp. 69-72

⁸ А. Д. Сахаров, Вакуумные квантовые флуктуации в искривленном пространстве и теория гравитации, Докл. АН СССР, 1967, том 177, номер 1, ст.70–71

⁹ Masud Chaichian, Markku Oksanen and Anca Tureanu, Sakharov’s induced gravity and the Poincaré gauge theory. The Conservative Revolutionary, World Scientific Publishing, 2019, pp. 271-299

¹⁰ M. Chaichian, M. Oksanen, A. Tureanu, G. Zet. Gauging the twisted Poincare symmetry as noncommutative theory of gravitation. Phys.Rev.D79:044016,2009. pp. 1-21

¹¹ T. W. B. Kibble, Lorentz Invariance and the Gravitational Field. J. Math. Phys. 2, 1961. pp.212-221

loop), і розходяться для великих значень енергії, що відповідає верхній границі інтегрування по змінній імпульсу частинок¹².

Проблему розбіжності інтегралів вирішує метод перенормування або ренормування, який апробований експериментально та є базовим для Стандартної Моделі. *Якщо гравітаційне поле задається на викривленому многовиді, то метод перенормування не вирішує проблему розходження інтегралів.*

Варіація дії Ейнштейна-Гільберта¹³ другого порядку по скалярній кривизні також призводить до виникнення проблем, однією з яких є ghost problem, який з'являється в лагранжіані і має негативну енергію та вводить нові ступені свободи в систему взаємодії матерія-простір. Варіації вищих порядків також привносять проблеми, що було досліджено Стелле. Чайчіан та співавтори приймають як дослідницьку позицію, що варіаціями вищих порядків можна знехтувати в наближенні низьких енергій.

В моделі Чайчіана-Оксанен-Туреану задається механізм Сахарова (механізм індукування гравітації) на многовиді Рімана-Картана¹⁴ з викривленням та крученням (ідея ж введення кручення в ЗТВ належить Картану¹⁵).

Пояснюючи кручення¹⁶, науковці акцентують на дослідженні Хехла¹⁷ про вплив кручення на гравітацію: *для великого розподілу маси (матерії) та значень спіну – вплив кручення великий.*

Механізм Сахарова є найважливішим вихідним пунктом моделі Чайчіана-Оксанен-Туреану, який, як припускають дослідники, генерує теорію гравітації Пуанкаре (на противагу ЗТВ Ейнштейна).

Зв'язок між спіном, крученням та обертанням досліджували Ясскін та Стоегер, показавши, що *кручення пов'язане зі спіном, не з обертанням*, та вивівши рівняння гравітаційного поля зі спіном, ротацією та крученням^{18,19}.

¹² В статті Сахарова є наведені числові дані цієї границі: 10^{28} eB, що відповідає імпульсу віртуального гравітона.

¹³ Визгин В.П. Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы) // УФН. 2001, т. 171. № 12. Ст. 1347–1363

¹⁴ С. Е. Степанов, И. А. Гордеева. Геометрия многообразий Римана-Картана. Вестник КемГУ № 3/1 2011 Риманова геометрия. Ст.168-181

¹⁵ Wiktor Szczyrba, The Dynamical Structure of the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble Theory of Gravity. Annals of Physics 158, 1984.pp.320-373

¹⁶ S. Kicheassamy, Lagrange Multipliers in Theories of Gravitation. Annals of Physics 168, 1986.pp. 404-424

¹⁷ F.W. Hehl. Spin and Torsion in General Relativity: I. Foundations. GRG Vol.4, No.4 (1973). pp. 333- 349

¹⁸ David Bao, The well-posed ness of $(N = 1)$ classical supergravity. Journal of Mathematical Physics 26, 1985. pp.329- 333

¹⁹ Philip B. Yasskin, Propagation equations for test bodies with spin and rotation in theories of gravity with torsion. Physical Reviewed, Volume 21, Number 8 15 April 1980.pp. 2081-2094

Математично, кручення вводять в теорію завдяки поняттю афінної зв'язності многовида. Афінна зв'язність на плоскому дотичному розшаруванні ріманового многовида або зв'язність Леві-Чивіта²⁰:

$$Q_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$$

(1.1.15)

задається в локальних координатах:

$$\Gamma^{\rho*}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + K^{\rho}_{\mu\nu}$$

(1.1.16)

де $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ – символ Крістофеля, який за означенням:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

(1.1.17)

$$K^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\rho}_{\mu\nu} + T^{\rho}_{\nu\mu} + T^{\rho}_{\nu\mu}), T^{\rho}_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$$

(1.1.18)

Кручення розкладають через його компоненти: дотичний вектор, аксіальний вектор та тензорні компоненти. Скалярну кривизну визначатимуть через складники цієї декомпозиції.

Метрика координатного базису задається:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu$$

(1.1.19)

де η_{ab} – метрика Мінковського, (e^a_μ, e^b_ν) – ортогональний базис.

Тому спінова зв'язність визначатиметься:

$$\omega^{ab}_\mu = \omega^{ab}_\mu + K^{\nu\rho}_\mu e^a_\nu e^b_\rho$$

(1.1.20)

²⁰ метричний тензор коваріантно сталий.

Ці викладки необхідні для того аби задати компоненти кривизни та кручення через ортогональний базис та спінову зв'язність.

Скалярне поле Φ задають на чотиривимірному просторі Рімана-Картана, в якому лагранжіан матиме форму:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - m^2 \Phi^2 - \sum_{i=1}^5 \xi_i P_i \Phi^2)$$

(1.1.21)

де m – маса скалярного поля та

$$\begin{aligned} P_1 &= R \\ P_2 &= \nabla_\mu V^\mu \\ P_3 &= V_\mu V^\mu \\ P_4 &= A_\mu A^\mu \\ P_5 &= T_{\mu\nu\rho} T^{\mu\nu\rho} \end{aligned}$$

(1.1.22)

Дія

$$S = \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} \Phi D \Phi d^4x$$

(1.1.23)

$$D = \square + m^2 + \sum_{i=1}^5 \xi_i P_i$$

(1.1.24)

тоді однопетлева ефективна дія:

$$S^{(1)} = \frac{i}{2} \ln \det(l^2 D) = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (l^2 D)$$

(1.1.25)

$l^2 D$ – має розмірність довжини:

$$\ln\left(\frac{D}{D(0)}\right) = - \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} [\exp(-i\tau D) - \exp(-i\tau D(0))]$$

(1.1.26)

тоді ефективна дія матиме вигляд:

$$S^1 = S^1_0 - \frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} [\exp(-i\tau D) - \exp(-i\tau D(0))] \quad (1.1.27)$$

Відповідно, фізична дія для індукованої гравітації $S^1_{\text{phys}} = S^1 - S^1_0$ в кінцевій формі виражатиметься через компоненти розкладу підінтегральної функції.

Лагранжіан поля Дірака:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\boldsymbol{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \boldsymbol{\psi} - \nabla_\mu \boldsymbol{\psi} \gamma^\mu \boldsymbol{\psi}) - m \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi} \quad (1.1.28)$$

де γ^μ – матриці Дірака, m – маса поля.

Ефективна дія визначатиметься як логарифм детермінанту:

$$S^{(1)}_{\text{eff}} = -i \ln \det(1D_{1/2}) \quad (1.1.29)$$

$$D \text{ – оператор Дірака: } D \equiv D_{1/2} D^*_{1/2} = (\gamma^\mu D_\mu)^2 + m^2 \quad (1.1.30)$$

Обчислюючи трейси в інтегралах, через які виражається лагранжіан спінорного поля, модель показує можливість генерування теорії гравітації Пуанкаре в границі низьких енергій. Тобто, *якщо задати спінорне поле на многовиді Рімана-Картана, то ефективна дія генеруватиме гравітацію Пуанкаре в границі низьких енергій поля.*

Зв'язок між спінорним полем та гравітацією досліджувався Фінкельштейном, який розробив *q-модель* взаємодії цих полів²¹. Дія Фінкельштейна є інваріантною відносно нелокальних *q-трансформацій*:

$$\int d\tau(q) [R(q) + \boldsymbol{\psi} \sigma^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu(q)) \boldsymbol{\psi}^*] \quad (1.1.31)$$

$$d(q) = \sqrt{-g} d^4x \quad (1.1.32)$$

$$g_{\alpha\beta}(q) = v_\alpha^a \eta_{ab}(q) v_\beta^b \quad (1.1.33)$$

²¹ Robert J. Finkelstein. *q-Gravity*. Letters in Mathematical Physics 38: 1996. pp.53-62

Мет Віссер в оглядовій статті про індуковані теорії гравітації описує мовою сучасної квантової теорії поля гіпотезу Сахарова²². В цьому модерному визначенні вакуумно-флуктуаційного підходу поле задається на многовиді Рімана, що дає можливість вивести *рівняння ефективної дії поля, яка структурно схожа із гравітаційною дією Ейнштейна*. Основним core concept статті Віссера є розробка інтерпретації результату застосування вакуумно-флуктуаційного підходу до гравітації.

Індукована обернена гравітаційна стала в дослідженні Віссера²³:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G(0)} - \frac{1}{2\pi} \text{str}[k(\mu^2) - k(m^2)\ln(\mu^2/m^2)]$$

(1.1.34)

μ є конвенційно визначеною масою для знерозмірення логарифму.

Віссер вводить умови ренормування та можливості обчислити значення індукованої гравітаційної сталої²⁴:

$$\delta\left(\frac{1}{G}\right) = -\frac{1}{2\pi} \delta \text{str}[k(m^2)\ln(m^2/\mu^2)]$$

(1.1.35)

Задаючи уніфіковані теорії поля із порушенням скалярної інваріантності на многовидах Рімана, виводиться ефективна дія для вакуумного функціоналу, яка міститиме доданок із скалярною кривизною Рімана першого степеня²⁵. Через нелокальність квантових феноменів, ефективна дія вакууму задається як середня величина:

$$\langle S \rangle_0 = \int \sqrt{-g} d^4x \langle \mathcal{L} \rangle_0$$

(1.1.36)

$$\langle \mathcal{L} \rangle_0 = \langle \mathcal{L} \rangle_0^{\text{flat.spacetime}} + (16\pi G_{\text{ind}})^{-1} R + o(R^2)$$

(1.1.37)

²² Matt Visser, Sakharov's Induced Gravity: A Modern perspective. Modern Physics Letters A Vol. 17, No. 15n17, 2002.pp. 977-991

²³ Matt Visser, Sakharov's Induced Gravity: A Modern perspective. Modern Physics Letters A Vol. 17, No. 15n17, 2002.pp. 977-991

²⁴ там же

²⁵ S. L. Adler, "Einstein gravity as a symmetry breaking effect in quantum field theory. Rev. Mod. Phys. 54, 1982. pp.729-766

Задаючи середнє значення тензору енергії-імпульсу, та варіюючи це значення, отримується рівняння для індукованої гравітаційної сталої:

$$(8\pi G_{\text{ind}})^{-1} R = \delta \langle T_{\mu}{}^{\mu}(0) \rangle_0$$

(1.1.38)

Якщо скалярне поле задати на многовиді Рімана, то дія цього поля матиме форму:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left[\frac{1}{2} \epsilon \phi^2 R - V(\phi^2) + \text{додаткові доданки} \right]$$

(1.1.39)

де ϕ – скалярне поле, $V(\phi^2)$ – потенціал скалярного поля, екстремальне значення якого $\phi = 0$ виводиться із умов його диференціювання $d[V(\kappa^2)] = 0$ та $d^2[V(\kappa^2)] > 0$

Внаслідок спонтанного порушення скейлінгової інваріантності, виводиться гравітаційна дія

$$S_{\text{grav}} = \int \sqrt{-g} d^4x \frac{1}{2} \epsilon \kappa^2 R$$

(1.1.40)

де ϵ – вільний параметр.

Нелокальності квантових ефектів призводять до того, що середнє значення густини функції Лагранжа для скалярного поля визначатиметься як ряд по параметру κ (маса уніфікаційного поля) та середньому значенню лагранжіана в степені $2n$, тобто

$$\langle \mathcal{L} \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{4-2n} \langle \mathcal{L} \rangle_0^{2n} = \kappa^4 \langle \mathcal{L} \rangle_0^0 + \kappa^2 \langle \mathcal{L} \rangle_0^2 + \langle \mathcal{L} \rangle_0^4 + \dots$$

(1.1.41)

такий розклад є проблематичним з позиції першого (другий доданок можна проінтерпретувати як гравітаційну дію Ейнштейна згідно підходу Сахарова) та третього доданків для яких не діють 4-вимірні та 2-вимірні оператори²⁶.

²⁶ S. L. Adler, “Einstein gravitation as a long wavelength effective field theory,” Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 310, 1983. pp.273-278

В моделі Вайнберга-Салама, яка описує взаємодію між трьома полями: слабким, сильним та електромагнітним, гравітація виникає як ефект цієї взаємодії. Відповідно, дія такої польової взаємодія має форму:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x (\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{grav}})$$

(1.1.42)

$\mathcal{L}_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G} R$ – неренормована густина функції Лагранжа-Гільберта;

$\mathcal{L}_m$ – ренормована густина функції Лагранжа полів матерії.

Слабка взаємодія, яка виводиться із моделі Вайнберга-Салама, описується масивними векторними бозонами, які отримують масу завдяки механізму спонтанного порушення симетрії та скалярних бозонів Хіггса.

Якщо енергії ферміонів є меншими за маси векторних бозонів, тоді теорію Фермі можна вивести з моделі Вайнберга-Салама як низько-енергетичну, довгохвильову теорію ферміонів²⁷. По аналогії виведення теорії Фермі для низько-енергетичних β -розпадів намагаються вивести теорію Ейнштейна-Гільберта²⁸.

Аналогію між теорією Фермі та ЗТВ відображає наявність констант однакової розмірності $1/(\text{mass})^{2,29}$. В цьому контексті варто згадати гравітаційну теорію Сарданашвілі та теорії суперсиметрії, яка формулюється як калібрувальна теорія із редукованою структурою Лоренц-групи, в якій метрика гравітаційного поля реалізується полем Хіггса³⁰. Із перетворень суперсиметрії можна вивести перетворення Пуанкаре, що уможливорює існування зв'язку між суперсиметрією та гравітацією.

Згідно теорії Янга-Мілса при переході від глобальної симетрії до локальної, виникають нові калібрувальні поля, тому при переході від глобальної суперсиметрії до локальної, виникають калібрувальні поля: гравітон зі спіном 2 (це калібрувальне поле, яке зв'язане із перетвореннями Пуанкаре та зсувом в

²⁷ S. L. Adler, "Einstein gravity as a symmetry breaking effect in quantum. Rev. Mod. Phys. 54, 7. 1982. pp.29-766

²⁸ A.V. Smilga. Spontaneous generation of the Newton constant in the renormalizable gravity theory. Preprint ITEP-63 (1982) published in the Proceedings of the conference on Group Theoretic Methods in Physics (Zvenigorod, 1982). pp.1-4

²⁹ A. Zee, "A broken symmetric theory of gravity," Phys. Rev. Lett. 42, 1979. pp.417-421

³⁰ G. Sardanashvily, Lecture on Gauge Gravitation Theory. Gravity as a Higgs Field. 20th International Summer School on Global Analysis and its Applications "General Relativity: 100 years after Hilbert" (Star'a Lesn'a, Slovakia, 2015). pp.1-46

просторі-часі) і нове поле зі спіном $3/2$ (це повинно бути ферміонне поле). Відповідно, *гравітація є локальною суперсиметричною теорією*³¹.

По аналогії з емерджентністю теорії піонів в квантовій хромодинаміці, виводиться низько-енергетича дія теорії Ейнштейна в слабомасивних полях зі спіном 2 ³².

Перша лема Адлера визначає, що лагранжіани ренормованих полів матерії зі спіном 0 , $1/2$ та калібрувальних полів (gauge fields) зі спіном 1 , які задані на викривленому простору-часу, містять доданки пропорційні скалярній кривизні R таких типів³³:

$m_0^2 R$, m_0 – баріонна маса

$M^2 R$, M – масивний регулятор

$\phi^2 R$, ϕ – поле зі спіном 0

Друга лема Адлера стверджує про те, що умови відсутності баріонних мас, чи масивних регуляторів або спін-0 поля є слабомасивними мультиплетами, то в густини функції Лагранжа таких полів немає доданків та множників пропорційних першому порядку скалярної кривизни³⁴.

Першопрохідцем в дослідженні індукованої гравітації з позиції теорії спонтанного порушення симетрії був Фуджі³⁵. В моделях порушення симетрії-індукування гравітації базисом є лагранжіан в формі³⁶:

$$\mathcal{L} = \epsilon \phi^2 R + T + V(\phi^2)$$

(1.1.43)

де V – потенціал порушення симетрії, ϵ – параметр поля.

Якщо фаза нестабільна $\phi=0$, то в лагранжіані немає членів пропорційних R , якщо ж фаза порушення симетрії є стабільною:

³¹ Д. Фридман, П. ван Ньювенхейзен, Супергравітація и унификация законов физики, УФН, 1979, том 128, номер 1, ст.135–160

³² Rafael I. Nepomechie, Einstein Gravity as The low energy effective theory of Weyl gravity. Volume 136B, number 1,2 Physics Letters 23 February 1984, pp.33-37

³³ S. L. Adler, “Order- R vacuum action functional in scalar-free unified theories with spontaneous scale breaking,” Phys. Rev. Lett. 44, 1980. pp.1567-1569

³⁴ S. L. Adler, “A formula for the induced gravitational constant,” Phys. Lett. B 95, 1980. pp.241-243

³⁵ Gaurav Narain, Exorcising ghosts in induced gravity. Eur. Phys. J. C (2017) 77: pp.1-30

³⁶ Yasunori Fujii, Scalar-tensor theory of gravitation and spontaneous breakdown of scale invariance, Physical Reviewed Volume 9, Number 4 15 February 1974, pp.874-876

$$\phi^2 = - m_0^2 / \lambda$$

(1.1.44)

$$\frac{1}{16\pi G} = \varepsilon \phi^2$$

(1.1.45)

З такого рівняння можна отримати індуковану гравітаційну сталу, але вона не обчислюється через наявність як баріонної маси (вимірний параметр), так і маси скалярних полів.

Сервантес-Кота та Денен розробили модель індукованої гравітації (варто зауважити, що це дослідження пов'язує³⁷ теорію індукованої гравітації та космологічні моделі Всесвіту), яка генерується в процесі спонтанного порушення симетрії поля Хіггса, тобто теорія Ейнштейна (ЗТВ) з'являється як ефект порушення симетрії через механізм Хіггса³⁸.

Лагранжیان поля:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{\alpha}{16\pi} \text{tr} \Phi^* \Phi R + \frac{1}{2} \text{tr} \Phi^*_{,\mu} \Phi^{,\mu} - V(\text{tr} \Phi^* \Phi) + L_M \sqrt{-g} \right]$$

(1.1.46)

де R – скалярна кривизна, Φ – $SU(5)$ поле Хіггса та V – потенціал поля;

α – розмірний параметр для регулювання міри гравітаційної взаємодії, а L_M визначає ферміонні та слабомасивні бозонні поля, які належать до калібрувальних полів групи $SU(5)$;

$\Phi^*_{,\mu}$ є коваріантною похідною:

$$\Phi^*_{,\mu} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} + iG[A_\mu, \Phi]$$

(1.1.47)

де $A_\mu = A^a_\mu \tau_a$ – калібрувальні поля симетричної групи, в якій τ_a є генераторами, а g є структурними сталими калібрувальної групи.

З рівняння для індукованої гравітації:

³⁷ E. O. Pozdeeva and S. Yu. Vernova, Induced Gravity Models with Exact Bounce Solutions. Physics of Particles and Nuclei, 2018, Vol. 49, No. 5, pp. 914–917

³⁸ J. L. Cervantes-Cota and H. Dehnen .Induced gravity inflation in the $SU(5)$ GUT. Phys. Rev. D 51, 395 – Published 15 January 1995.pp. 395-404

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + [8\pi\alpha^{-1}V^{-2}V(\chi)(1+2\chi)^{-1}]g_{\mu\nu} = -8\pi\alpha^{-1}V^{-2}(1+2\chi)^{-1}T_{\mu\nu} - 8\pi\alpha^{-1}(1+2\chi)^{-2} * \\ [\chi^*_{\mu}\chi^*_{\nu} - \frac{1}{2}\chi^*_{\lambda}\chi^{*\lambda}g_{\mu\nu}] - \frac{2}{1+2\chi}[\chi^*_{\mu\nu} - \chi^{\lambda}_{\lambda}g_{\mu\nu}]$$

(1.1.48)

та із $G = \lambda^{-1}V^{-2}$ виводиться рівняння Ейнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

(1.1.49)

$$G(\chi) = \lambda^{-1}V^{-2}(1+2\chi)^{-1} \quad G(\chi=0) = G$$

(1.1.50)

де $\chi = \frac{1}{2}(\text{tr}\Phi^*\Phi V^{-2} - 1)$ описує поле Хіггса навколо його ground state.

Якщо $\Phi = VN$, то $\chi = 0$ і $N = \sqrt{\frac{2}{15}} \text{diag}(1,1,1, -3/2, -3/2)$. Відповідно, гравітаційна стала пов'язана із калібрувальнo-бозонними полями групи $SU(5)$ таким співвідношенням:

$$M_X = M_Y = \sqrt{\frac{5\pi}{3}} GV$$

(1.1.51)

Такі теорії гравітації є калібрувальними теоріями, із спробою поєднати загальну теорію відносності та квантову теорію поля³⁹. Окрім польових підходів до розробки моделі квантової гравітації є теорія конденсованого стану та термостатистичний підхід.

³⁹ Philip B. Yasskin, Solutions for gravity coupled to massless gauge fields. Physical Review. Volume 12, Number 8, 15 October 1975. pp.2212-2217

1.2. Термостатистичні теорії гравітації

Теорія конденсованого стану, як підхід до гравітації, намагається вивести ЗТВ та Стандартну модель як низько-енергетичну теорію поля конденсованого стану речовини. Фундаментальним конденсованим станом є 4-вимірний QM (quantum hall) флюїд, з якого за допомогою теорії твістерів в низько-енергетичному наближенні можна вивести ЗТВ та Стандартну модель⁴⁰.

Першопрохідцем у застосуванні термодинаміки до проблем чорних дір є Бекенштейн, який написав про ентропію чорної діри у випадку потрапляння в неї речовини чи поля⁴¹.

Для зовнішнього спостерігача не є можливим опис внутрішньої структури чорної діри, тому судження про те, що у випадку потрапляння речовини/поля в чорну діру зменшується ентропія зовнішнього світу є трансцендентним⁴².

Аналогія між термодинамічною системою та чорною дірою⁴³ виражається в структурі таких рівнянь⁴⁴:

$$dE = TdS - PdV$$

(1.2.1)

$$dM = \theta d\alpha + \Omega dL + \Phi d\theta$$

(1.2.2)

M – момент кількості руху чорної діри, θ – кут обертання, Ω – кутова швидкість, Φ – заряд діри.

Окрім проблеми трансцендентності ентропії, виникає питання істинності другого закону термодинаміки: *коли об'єкт масою m потрапляє в чорну діру з метрикою Шварцшильда, то маса чорної діри не зміниться, це так званий уявний експеримент Героха*. Проблема трансцендентності ентропії вирішується через поняття ентропії Бекенштейна:

$$S = \eta k L^2_p A$$

⁴⁰ Jonathan Bain, The emergence of spacetime in condensed matter approaches to quantum gravity. Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics Volume 44, Issue 3, August 2013, Pp.338-345

⁴¹ J. D. Bekenstein, "Black holes and the second law," Lett. Nuovo Cim.4, 1972. pp.737-740

⁴² Jacob D. Bekenstein, Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. Physical Reviewed Volume 9, Number 12. 1974.pp. 3292-3300

⁴³ Jacob D. Bekenstein, Statistical black-hole thermodynamics. Physical Reviewed Volume 12, Number 10. 15 November 1975.pp.3077-3085

⁴⁴ Jacob D. Bekenstein, Black Holes and Entropy. Physical Reviewed Volume 7, Number 8 15 April 1973.pp.2333-2346

(1.2.3)

де A є площею поверхні чорної діри, L_p – довжина Планка, k – константа Больцмана, η – константа розмірності.

Бекенштейн розробив термодинаміку чорних дір, ввівши поняття ентропії чорної діри, що стало стимулом для дослідників обчислювати ентропії чорних дір в різних теоріях.

З позиції теорії індукованої гравітації Сахарова також є обчислення ентропії Бекенштейна-Хокінга, виконане Фроловим⁴⁵ та Фурсаєвим⁴⁶:

$$S^{BH} = - \sum Tr \rho_i \ln \rho_i - \sum 2\pi \xi_s \int d\sigma < \phi_s^2 >$$

(1.2.4)

Зв'язок моделей індукованої гравітації та космологічних моделей інфляції відображає як спонтанне порушення симетрії, так і канонічне квантування класичних скалярних полів і отримання рівнянь Вілера-ДеВіта.

В моделі Фрідмана рівняння Вілера-ДеВіта набуває форми⁴⁷:

$$[\frac{1}{12\gamma}(\partial^2/\partial(\ln a)^2) + \partial^2/\partial(\ln \sigma)^2 - \frac{1}{2}\partial^2/\partial(\ln \sigma)^2 + (1+6\gamma) a^6 \sigma^2 V(\sigma)] \psi(a, \sigma) = 0$$

(1.2.5)

Застосовуючи підхід теорії графів до гравітації, Кан та Шіраїші розробили модель індукованої гравітації без квадратичних розбіжностей для однопетлевої теорії поля⁴⁸. Підхід базується на аналогії між структурою матриці маси поля та матрицею Лапласа відповідного графа (яка визначається як різниця матриці суміжності та діагональної матриці вузлів).

Якщо задати густину функції Лагранжа:

$$\mathcal{L} = g^{-1} \sum_{k=1}^N F$$

(1.2.6)

⁴⁵ V.P. Frolov, D.V. Fursaev, and A.I. Zelnikov. Black hole statistical mechanics and induced gravity. Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 57 (1997) pp.192-196

⁴⁶ V.P. Frolov and D.V. Fursaev. Mechanism of Generation of Black Hole Entropy in Sakharov's Induced Gravity. Phys.Rev.D56:1997. pp.2212-2225

⁴⁷ Alexander Yu. Kamenshchik, Alessandro Tronconi and Giovanni Venturi. Induced gravity and quantum cosmology. Physical review d 100, 023521 (2019). pp.1-8

⁴⁸ Nahomi Kan and Kiyoshi Shiraishi, Induced Gravity from Theory Space. Progress of Theoretical Physics, Volume 111, Issue 5, May 2004, Pp. 745–755

де $F = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}_k F_k - (D^\mu U_k)^* D_\mu U_k$, U_k – лінк-поля, або медіаторні поля (які моделюються як ребра графа між вузлами-полями) які мають однакові абсолютні значення своїх матриць $f/\sqrt{2}$ на просторі графа та застосувати співвідношення для параметра Швінгера із експонентою як однопетлевою дією поля, то можна отримати розклад:

$$\text{Tr}(\exp[-\Delta(G)t]) = p - (\text{Tr}D)t + \frac{1}{2} [\text{Tr}D^2 + \text{Tr}D]t^2 + \dots$$

(1.2.7)

розходження залежать лише від матриці D (degree matrix of graph), і для кожної теорії поля на графі отримується однакова матриця D та однакове однопетлеве розходження у вакуумі⁴⁹.

Підхід до гравітації як індукованого феномену застосовують в моделюванні процесів формування галактик та зірок⁵⁰.

Гравітаційна дія Ейнштейна $S = \int \sqrt{-g} \, d^4x \, R$ могла мати компоненти пропорційні до R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ які визначали гравітаційну взаємодію в ранньому формуванні Всесвіту⁵¹.

Стелл розвивав ренормований підхід до гравітації⁵², в якій додатковими доданками дії Ейнштейна є похідні скалярної кривизни вищих порядків, показавши, що такі дії вищих похідних порядків⁵³ є формально ренормованими⁵⁴.

Загальну теорію відносності можна вивести із квантової теорії гравітації Вейля (ця теорія базується на конформній інваріантності дії Вейля)⁵⁵.

Квантуючи гравітацію Вейля, виводиться гравітаційна стала:⁵⁶

$$\frac{1}{16\pi G} = -\frac{i}{96} \int K(x) d^4x \, x^2$$

(1.2.8)

⁴⁹ Nahomi Kan and Kiyoshi Shiraishi, Induced Gravity from Theory Space. Progress of Theoretical Physics, Volume 111, Issue 5, May 2004, Pp.745–755

⁵⁰ Zaripov, F. Dark Matter as a Result of Field Oscillations in the Modified Theory of Induced Gravity. Symmetry 2020, 12, 41.pp.1-5

⁵¹ A. Zee, “Spontaneously generated gravity,” Phys. Rev. D 23, 1981. pp.858-866

⁵² K. S. Stelle, Classical Gravity with Higher Derivatives. General Relativity and Gravitation, Vol. 9, No. 4 (1978), pp. 353-371

⁵³ J. Julve, M. Tonin. Quantum Gravity with Higher Derivative Terms. IL :Nouvo Cimento Vol. 46 B, N. 1, 11 Luglio 1978 . Pp.137-152

⁵⁴ K. S. Stelle, “Renormalization of higher derivative quantum gravity,” Phys. Rev. D 16, 1977. pp. 953-969

⁵⁵ David G. Boulware, Gary T. Horowitz and Andrew Strominger. Zero-Energy Theorem for Scale-Invariant Gravity. Volume 50, Number 22 Physical Review Letters 30 May 1983. pp.1726-1729

⁵⁶ A. Zee, “Einstein gravity emerging from quantum Weyl gravity,” Annals Phys. 151, 1983. pp. 431-443

$$\text{де } K(x) = i^2 [\langle T^* T_1(x) T_1(0) \rangle - \langle T^* T_2(x) T_2(0) \rangle] + \langle W(x) \rangle$$

(1.2.9)

Модель гравітаційного поля, яке взаємодіє з квантованим полем матерії досліджувалася Утіамою та ДеВітом. Взаємодія таких полів описується середнім значенням тензора енергії-імпульса, в якому виникає як мінімум три типи сингулярностей: ∞^4 , ∞^2 , $\log \infty$. В моделі Утіама-ДеВіта⁵⁷ описані три технічні способи для знищення цих сингулярностей та отримання асингулярного рівняння для гравітаційного поля, яке взаємодіє із зовнішнім полем $t^{\mu\nu}$:

$$R^* - \frac{1}{2} g^{*\mu\nu} R^* = - \kappa^* \text{ finite } \langle T^{*\mu\nu}(x) \rangle - t^{\mu\nu}$$

(1.2.10)

ЗТВ виникає як наслідок спонтанного порушення симетрії конформних інваріантів⁵⁸. Гравітаційний лагранжіан задається на конформній геометрії Вейля:

$$\mathcal{L} = \int \sqrt{-g} C_{\mu\nu\alpha}{}^\beta C^{\mu\nu\alpha}{}_\beta d^4x$$

(1.2.11)

Нехай

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \{ \gamma(R + \lambda(1 + \nabla_\mu \omega^\mu)) + \beta[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) + \nabla_\mu \rho^\mu] \}$$

(1.2.12)

та виконуються умови:

$$R = - \nabla_\mu \omega^\mu, \quad 1 = - \nabla_\mu \omega^\mu, \quad \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + V(\phi) = \nabla_\mu \rho^\mu$$

(1.2.13)

де τ^μ , ω^μ , ρ^μ – векторні поля, $\sqrt{-g} R = 1$ є інваріантним відносно повного диффеоморфізму.

З дії для індукованої гравітації можна вивести гравітаційну дію Ейнштейна, спершу варіюючи векторні поля⁵⁹:

⁵⁷ Utiama and DeWitt, Renormalization of a Classical Gravitational Field Interacting with Quantized Matter Fields. J. Math. Phys. 3, (1962).pp.608-618

⁵⁸ Lee Smolin, Towards a Theory of spacetime Structure at very short distances. Nuclear Physics B160 (1979).pp. 253-268

$$\delta S / \delta \tau^\mu = -\sqrt{-g} \nabla_\mu \gamma = 0, \quad \gamma(x) = \gamma_-, \quad \gamma_- = \frac{1}{16\pi G}$$

$$\delta S / \delta \lambda = -\sqrt{-g} \nabla_\mu \lambda = 0, \quad \lambda(x) = \lambda_-, \quad \lambda_- = \frac{-2\Lambda}{16\pi G}$$

$$\delta S / \delta \beta = -\sqrt{-g} \nabla_\mu \beta = 0, \quad \beta(x) = \beta_-, \quad \beta_- = 1$$

(1.2.14)

тоді

$$S_{\text{induced}} = \int \sqrt{-g} \, d^4x \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

(1.2.15)

в якій константа Ньютона та космологічна стала є константами інтегрування $\rightarrow$ гравітаційна дія Ейнштейна.

Індукована дія може бути деформована в топологічну теорію поля додаванням поля духів та антидухів. Нехай задані три типи BRST⁶⁰ трансформацій:

$$\delta^{(1)}_B \gamma = \delta^{(1)}_B c^{(1)} = 0, \quad \delta^{(1)}_B \tau^\mu = \nabla^\mu c^{(1)}, \quad \delta^{(1)}_B b^{(1)} = \gamma$$

$$\delta^{(2)}_B \lambda = \delta^{(2)}_B c^{(2)} = 0, \quad \delta^{(2)}_B \omega^\mu = \nabla^\mu c^{(2)}, \quad \delta^{(2)}_B b^{(2)} = \lambda$$

$$\delta^{(3)}_B \beta = \delta^{(3)}_B c^{(3)} = 0, \quad \delta^{(3)}_B \rho^\mu = \nabla^\mu c^{(3)}, \quad \delta^{(3)}_B b^{(3)} = \beta$$

(1.2.16)

де $c^{(i)}$, $b^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) є духами зі значенням $+1$ та -1 (ghost numbers). Три типи BRST трансформацій є нільпотентними $(\delta^{(i)}_B)^2 = 0$ та антикомутативними:

$$\{ \delta^{(i)}_B, \delta^{(j)}_B \} = 0 \quad (\forall i \neq j)$$

(1.2.17)

Додаючи поля-духи до рівняння дії поля, отримується інваріантна відносно BRST трансформацій дія:

$$S_T = S + \int \sqrt{-g} \, d^4x \sum \nabla_\mu b^i \nabla^\mu c^i = \int \sqrt{-g} \, d^4x \{ \gamma(R + \nabla_\mu \tau^\mu) + \lambda(1 + \nabla_\mu \omega^\mu) + \beta[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) + \nabla_\mu \rho^\mu] \} + \int \sqrt{-g} \, d^4x \sum \nabla_\mu b^i \nabla^\mu c^i = \int \sqrt{-g} \, d^4x \{ \delta^{(1)}_B [b^1(R + \nabla_\mu \tau^\mu)] + \delta^{(2)}_B [b^2(1 + \nabla_\mu \omega^\mu)] + \delta^{(3)}_B [b^3(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) + \nabla_\mu \rho^\mu)] \}$$

⁵⁹ Ichiro Oda, Topological induced gravity. International Journal of Modern Physics D Vol. 26 (2017) 1750023.pp.1-16

⁶⁰ Канонічний метод квантування або метод квантування Беккі-Руе-Стора-Тютіна.

(1.2.18)

Застосовуючи q -деформовану алгебру бозонів та ентропійний підхід Верлінде, можна вивести рівняння Ейнштейна із відповідним параметром деформації та знайти його розв'язки для мікроскопічної квантової чорної діри⁶¹:

$$\psi^q(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

(1.2.19)

де $\psi^q = 10\pi V(2mE)^{3/2}g(z,q)/h^3$ та $g(z,q)$ – деформаційний множник пов'язаний із полілогарифмом.

(1.2.20)

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}, \quad F_{\mu\nu} - \text{електромагнітний тензор}$$

(1.2.21)

Деформоване рівняння Ейнштейна розв'язується в 4-вимірній сферично-симетричній метриці:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

(1.2.22)

і його розв'язок:

$$\Delta = 1 - \frac{2Gm}{r} + 1/\psi^q GQ^2/r^2$$

(1.2.23)

де Q – заряд чорної діри.

Андріанов з колегами розробили модель виникнення гравітації в некомпактному (4+1)-вимірному просторі-часі та дослідили її вплив на

⁶¹ E Dil, E Kolay, C C Ersanli, On the deformed Einstein equations and quantum black holes. Journal of Physics: Conference Series 766 (2016) 012004.pp.1-7

формування (3+1)-вимірного Всесвіту локалізованого на брані із спонтанним порушенням трансляційної інваріантності⁶².

З огляду на те, що брана може виникати як класичне рішення рівнянь ефективної теорії поля і як результат порушення дискретної симетрії чи трансляційної інваріантності, в моделі вводять базові поля у вакуумі.

П'ятивимірні координати задаються як $X^A = (x^\mu, z)$, $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$,

$(\eta^{AA}) = (+, -, -, -, -)$, а локалізація брани відбувається за умови $z = z_0$ для вакуумної експектації (флуктуації) для скалярного поля $\langle \Phi(X) \rangle_0 = \varphi(z)$. Скалярне поле необхідне для локалізації брани, але цього не достатньо для пояснення виникнення маси у ферміонних полів, які є польовим джерелом генерування гравітації. Взаємодія ферміонних полів призводить до порушення трансляційної інваріантності та виникнення локалізованої брани.

Теорію гравітації в гамільтоновому формалізмі розробили Туреану, Оксанен та Клусон⁶³. Гамільтоніан моделі:

$$H = \int (NH(0) + N(i)H(i) + \lambda(N)p(N) + \lambda(i)p(i))d^3x + H_{\text{surf}} \quad (1.2.24)$$

$$H_0 = 2p^{ij}K_{ij} - \frac{1}{2}P^{ij}G_{ijkl}P^{kl}\alpha^{-1}h^{-1/2} + P^{ij(3)}R_{ij} + P^{ij}K_{ij}K + D_iD_jP^{ij} - \frac{P}{2}({}^{(3)}R - K_{ij}K^{ij} + K^2) - \sqrt{h}\Lambda - \frac{\sqrt{h}}{2\kappa}({}^{(3)}R - K_{ij}K^{ij} - K^2) - \alpha\sqrt{h}C_{ijkn}C^{ijk}_n$$

$$H_{\text{surf}} = \frac{-1}{\kappa} \oint \sqrt{\sigma} d^2x N^{(2)}K + \oint s(i) d^2x (D_jNP^{ij} - ND_jP^{ij} + 2N_jp^{ij} + 2N^jP^{ik}K_{ik}) \quad (1.2.25)$$

⁶² A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, P. Giacconi, and R. Soldati, Induced Gravity and Universe Creation on The Domain Wall in Five-Dimensional Space–Time. Theoretical and Mathematical Physics, 148(1): 2006. pp.880–894

⁶³ Josef Kluson, Markku Oksanenb, Anca Tureanu. Hamiltonian analysis of curvature-squared gravity with or without conformal invariance. Phys. Rev. D. 2014. pp.1-45

РОЗДІЛ 2

ОСНОВИ $\{q, (p,q), Q, \mu\}$ -ЧИСЛЕНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У НЕСТАНДАРТНИХ ТЕРМОДИНАМІКАХ

2.1 Математичні основи $\{q, (p,q), Q, \mu\}$ -числень

Визначення: Коалгеброю називається трійка (C, Δ, ε) , де C – векторний простір, $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$, $\varepsilon: C \rightarrow k$ – лінійні відображення, які задовольняють аксіоми Coass, Coun.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id}} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

(2.1.1)

Coun:

$$\begin{array}{ccccc} k \otimes C & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & C \otimes k \\ & \swarrow & \uparrow \Delta & \searrow & \\ & C & & & \end{array}$$

(2.1.2)

Лінійне відображення є відображенням векторного простору V над полем K у векторний простір W , тобто $f: V_K \rightarrow W_K$ з властивостями адитивності, однорідності та лінійності:

$$f(\gamma x) = \gamma f(x)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\gamma x + \delta y) = \gamma f(x) + \delta f(y)$$

(2.1.3)

Відображення Δ називається *комноженням* (коасоціативно та має коодиницю), а ε – *коодиниця* коалгебри, id – тотожне відображення, символ $\otimes$ позначає тензорний добуток векторних просторів та є лінійним відображенням просторів з точністю до ізоморфізму.

Визначення: Біалгеброю називається $(H, \mu, \eta, \varepsilon, \Delta)$, де (H, μ, η) є алгеброю, а (H, Δ, ε) – коалгебра. Для будь-яких елементів біалгебри виконуються умови:

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1$$

$$(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$$

$$(1) = 1$$

$$(2.1.4)$$

H – векторний простір (лінійний простір над полем K , який є множиною M та містить елементи, якими є вектори множини та у якій визначені унарна, бінарна операції та виконуються наступні аксіоми: комутативність додавання, асоціативність додавання, існування протилежного та нульового векторів; асоціативність множення, існування одиничного вектора, дистрибутивність додавання та множення).

Визначення: Нехай $(H, \mu, \eta, \varepsilon, \Delta)$ – деяка біалгебра. Оператор S на H називається антиподом біалгебри H , якщо

$$S * \text{id}_H = \text{id}_H * S = \eta \circ \varepsilon$$

$$(2.1.5)$$

Алгеброю Хопфа називається біалгебра з антиподом.

Твердження: Не кожна біалгебра має антипод. Якщо ж антипод існує, то лише один. Нехай S та $S^\wedge$ антиподи, тоді

$$S = S * (\eta\varepsilon) = S * (\text{id}_H * S^\wedge) = (S * \text{id}_H) * S^\wedge = (\eta\varepsilon) * S^\wedge = S^\wedge$$

$$(2.1.6)$$

Антипод задовольняє співвідношення:

$$\sum_x S(x^\wedge) S(x) = \varepsilon(x)1 = \sum_x S(x^\wedge) x^\wedge \text{ для } \forall x \in H$$

$$(2.1.7)$$

В теорії деформованих алгебр важливою є наступна теорема:

Теорема: Нехай H – скінченновимірна алгебра Хопфа з антиподом S . Тоді біалгебра H^* є алгебра Хопфа з антиподом S^* .

Оператор S^* є транспонованим до S , тому $\forall \alpha \in H^*, x \in H$ виконуватиметься

$$(\sum_{\alpha} \alpha' S^*(\alpha''))(x) = \sum_{(\alpha)(x)} \alpha'(x') S^*(\alpha'')(x'') = \sum_{(\alpha)(x)} \alpha'(x') \alpha''(Sx'') = \alpha(\sum_{(x)} x'(Sx'')) \\ = \alpha(\eta \varepsilon(x)) = \varepsilon^* \eta^*(\alpha)(x)$$

(2.1.8)

Теорія Хопфа відіграє важливу роль для квантових груп, в яку вводиться деформоване числення.

Визначення: Деформованим числом називається :

$$[x]_q = (q^x - q^{-x}) / (q - q^{-1})$$

(2.1.9)

Представлення деформованого числа: Якщо $q \in \mathbb{R}$, то $[x] = \frac{\sinh(\tau x)}{\sinh(\tau)}$ та $q = e$, $\tau \in \mathbb{R}$

(2.1.10)

Якщо $q \in \mathbb{R}$, то $[x] = \frac{\sin(\tau x)}{\sin(\tau)}$ та $q = e^{ti}$, $\tau \in \mathbb{R}$, в границі при $q \rightarrow 1$ $\lim_{q \rightarrow 1} [x] = x$

(2.1.11)

Для $x(0,1,2,3)$ $[0] = 0$, $[1] = 1$, $[2] = q + q^{-1}$, $[3] = q^2 + 1 + q^{-2}$

(2.1.12)

Визначення: n – факторіал

$$[n]! = [n][n-1] \dots [2][1]$$

(2.1.13)

Визначення: n – біноміальні коефіцієнти

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m]!}{[m-n]![n]!}$$

(2.1.14)

Визначення: Формула бінома Ньютона

$$[a \pm b]^m = \sum_{k=0}^m \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} a^{m-k} (\pm b)^k \text{ в границі при } q \rightarrow 1 \quad [n]! \rightarrow n!, \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \rightarrow \binom{m}{n}$$

(2.1.15)

Приклади деяких функцій:

$$e_q(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[n]!} a^n x^n$$

(2.1.16)

$$\sin_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} / [2n+1]!$$

(2.1.17)

$$\cos_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} / [2n]!$$

(2.1.18)

Визначення: Похідна для q – функцій:

$$D_x^q f(x) = (f(qx) - f(q^{-1}x)) / (q - q^{-1})x$$

(2.1.19)

Визначення: Невизначений інтеграл:

$$\int f(x) d_q x = (q^{-1} - q) \sum_{n=0}^{\infty} x q^{2n+1} \int (q^{2n+1} x) + \text{const}$$

(2.1.20)

Формалізм Q -числення є одним із класів числення, який також використовується в нестандартних термодинаміках як певна математична модифікація q -числення, і за означенням:

$$[x]_Q = (Q^x - 1) / (Q - 1)$$

(2.1.21)

x може бути як числом, так і оператором; Q – параметр деформації, $Q \neq 0, 1$, $Q \in \mathbb{R}$ та $Q = e^T$, $T \in \mathbb{R}$

Q -числа:

$$[0]_Q = 0, [1]_Q = 1, [2]_Q = Q + 1, [3]_Q = Q^2 + Q + 1$$

(2.1.22)

Q -числа можна визначити через обернені Q^{-1} :

$$[x]_Q = Q^{x-1}[x]_{1/Q}$$

(2.1.23)

Також існує зв'язок між q та Q -числами:

$$[x]_q = q^{1-x}[x]_Q \text{ та } Q = q^2$$

(2.1.24)

Для факторіала Q -числа та біноміальних коефіцієнтів:

$$[n]_Q! = [n]_Q [n-1]_Q \dots [1]_Q$$

(2.1.25)

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_Q = \frac{[m]!}{[m-n]![n]!}$$

(2.1.26)

Тригонометричні функції також можна виразити через параметр Q -деформації такими співвідношеннями:

$$\sin_Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} / [2n+1]_Q!$$

(2.1.27)

$$\cos_Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} / [2n]_Q!$$

(2.1.28)

для яких виконується рівність:

$$\sin_Q(x) \sin_{1/Q}(x) + \cos_Q(x) \cos_{1/Q}(x) = 1$$

(2.1.29)

Для функцій $f(x)$ правило диференціювання набуває форми:

$$D_x^Q f(x) = (f(Qx) - f(x)) / (Q - 1)x$$

(2.1.30)

Правило Ляйбніца трансформується:

$$D_x^Q (f_1(x)f_2(x)) = (D_x^Q (f_1(x))f_2(Qx) + f_1(x)(D_x^Q f_2(x)))$$

$$D_x^Q (f_1(x)f_2(x)) = (D_x^Q (f_1(x))f_2(x) + f_1(Qx)(D_x^Q f_2(x)))$$

(2.1.31)

Визначення: Невизначений інтеграл

$$\int f(x) d_Q x = (1 - Q) \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(Q^s x) Q^s + \text{const}$$

(2.1.32)

Одним із підходів до побудови нестандартного розподілу Бозе-Ейнштейна є використання μ -числення.

μ -алгебру задається через такі комутаційні співвідношення:

$$[a, a^*] = \varphi_\mu(N+1) - \varphi_\mu(N)$$

(2.1.33)

$$aa^* \equiv \varphi_\mu(N)$$

(2.1.34)

де a, a^* оператори породження-знищення, $\varphi_\mu(N)$ – структурна функція деформації:

$$\varphi_\mu(N) = \frac{N}{1 + \mu N}$$

(2.1.35)

Якщо ввести оператор кількості частинок, то матимемо такі комутаційні співвідношення:

$$[N, a^*] = a^*, [N, a] = -a$$

(2.1.36)

Визначення: μ -число визначається:

$$[n]_\mu = \frac{n}{1 + \mu} = \varphi_\mu(n)$$

(2.1.37)

Визначення: Похідна μ -числа:

$$D_x^\mu x^n = [n] x^{n-1}$$

(2.1.38)

для похідної k -го порядку:

$$(D_x^\mu)^k x^n = [n]_\mu! x^{n-k} / [n-k]_\mu!$$

(2.1.39)

Визначення: Факторіал для деформованого числа:

$$[n]_\mu = \frac{n!}{[n, \mu]}$$

$$[n, \mu] = [1+\mu][1+2\mu]\dots[1+n\mu]$$

(2.1.40)

Експоненціальна та логарифмічна функції задаються:

$$e_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n) / [n]_\mu!$$

(2.1.41)

$$\ln_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n / [n]_\mu$$

(2.1.42)

Визначення: Правило Ляйбніца для μ -добутку:

$$D_x^\mu (x^n x^m) = D_x^\mu (x^m x^n) = \frac{n+m}{1+\mu(n+m)} x^{n+m-1}$$

(2.1.43)

2.2. Нестандартні статистики та (q, μ) -деформовані термодинаміки

Розвиток статистичної науки розпочався в 19 ст., коли були сформульовані перші статистичні поняття та закони. Така плеяда вчених як Максвелл, Клаузіус, Больцман та інші, були першопрохідцями в розробках теорії ентропії, зв'язку ентропії та інформації, способах розрахунків кількості мікростанів системи, ймовірнісних розподілів молекул за швидкостями та інше.

В 20 ст. виникають нові концепції, такі як статистика Фермі-Дірака, Бозе-Ейнштейна, які набувають визначення класичних та квантових статистик. В цей час з'являються поняття парастатистики та деформованих статистик.

Виникають такі статистики, як: Голдейна-Ву, Поліхронакоса, Джентіле та інші.

Термостатистичний підхід Верлінде до розробки деформованого рівняння гравітації Ейнштейна базується на фундаментальних основах статистичної фізики, тому варто розглянути деякі нестандартні статистики.

Статистика Голдейна-Ву

В дробовій статистиці Голдейна-Ву вводиться поняття параметра статистичної взаємодії:

$$g = (-d_{N+\Delta N} - d_N)/\Delta N$$

(2.2.1)

де d_N – розмірність простору одночастинкового стану системи з N частинок.

Якщо $g = 1$, то отримується система ферміонів, тому що зменшується кількість доступних станів на 1, а у випадку $g = 0$ система не матиме обмежень на виникнення заповнень стану цієї системи, тому це бозонні стани.

Кількість мікростанів системи визначається:

$$W_j = [G_j + (N_j - 1)(1 - g)]! / \{N_j! [G_j - gN_j - (1 - g)]!\}$$

(2.2.2)

G_j – виродження рівня системи.

Статистику Голдейна-Ву називають дробовою виключною статистикою, а частинки які описуються нею *ексклюзони* або *g-они*.

Середнє число заповнення системи виражатиметься:

$$n_j = 1/[w(e^{\varepsilon - \mu/T}) + g]$$

(2.2.3)

$$w^g(x)[1+w(x)]^{1-g} = x = e^{\varepsilon-\mu/T}$$

(2.2.4)

Статистика Поліхронакоса

Кількість чисел заповнення j -го стану з енергією ε_j визначається:

$$n_j = 1/[z^{-1}e^{\varepsilon_j/T} + \gamma]$$

(2.2.5)

де T – температура, z – активність.

Якщо перша частинка займає стан G , то друга може зайняти один із $(G-\gamma)$ станів, третя займе один із $(G-2\gamma)$ станів і так далі. Загальна кількість мікростанів системи визначається комбінаторно через кількість способів розміщення N частинок за G способами:

$$W = \prod_j G_j (G_j - \gamma)(G_j - 2\gamma)\dots(G_j - (N_j - 1)\gamma)/N_j!$$

(2.2.6)

В границі при $\gamma = \pm 1$ для кількості мікростанів, отримуються розподіли Фермі та Бозе.

Перетворивши вираз для кількості мікростанів, виводиться формула:

$$W = \prod_j \gamma^{N_j} (G_j/\gamma)!/N_j!(G_j/\gamma - N_j)!$$

(2.2.7)

Для того аби отримати вираз для чисел заповнення стану, необхідно розв'язати варіаційну задачу на умовний екстремум:

$$\delta \ln W - \beta \delta E + \nu \delta N = 0$$

(2.2.8)

кількість чисел заповнення виразиться:

$$n_j = 1/[w(e^{\varepsilon-\mu/T}) + \gamma]$$

(2.2.9)

В контексті застосування полілогарифмів, можна отримати термодинамічні функції в статистиці Поліхронакоса. Для кількості частинок:

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon)n(\varepsilon) = A \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{D/2-1} / [Z^{-1} e^{\varepsilon/T} - \gamma] = AT^{D/2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{1}{\gamma} \text{Li}_{D/2}(z\gamma)$$

(2.2.10)

Енергія системи:

$$E = \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon)n(\varepsilon) = A \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{D/2} / [Z^{-1} e^{\varepsilon/T} - \gamma] = AT^{D/2+1} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right) \frac{1}{\gamma} \text{Li}_{D/2+1}(z\gamma)$$

(2.2.11)

На одну частинку в системі припадає енергія:

$$\frac{E}{N} = \frac{D}{2} \frac{T}{\rho\lambda} \frac{1}{\gamma} \text{Li}_{D/2+1}(z\gamma)$$

(2.2.12)

де добуток $\rho\lambda = \frac{1}{\gamma} \text{Li}_{D/2}(z\gamma)$

(2.2.13)

Статистика Джентіле

Теоретичним узагальненням розподілів Бозе-Ейнштейна та Фермі-Дірака є статистика Джентіле. Для розподілу Бозе-Ейнштейна характерна необмеженість в зайнятті стану макроскопічно великою кількістю частинок, а для розподілу Фермі навпаки – обмеження в одному стані для однієї частинки.

Розподіл Джентіле є серединним, в тому значенні, що можна ввести число R , яке обмежуватиме екстремальну заселеність стану термостатистичної системи, тобто при $R = 1$ отримується розподіл Фермі, а при $R = \infty$ розподіл Бозе.

Повна кількість частинок та енергія системи:

$$N = \sum_i n_i$$

(2.2.14)

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i$$

(2.2.15)

Статистична сума системи:

$$Z_N = \sum_{\{n\}} \exp\left(-\frac{1}{T} \sum_i n \varepsilon_i\right) \quad (2.2.16)$$

в якій T є температурою, $\{n_i\}$ описує стани системи.

Записавши велику статистичну суму та враховуючи термодинамічний потенціал, отримується кількість частинок системи:

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N \quad (2.2.17)$$

$$z = e^{\mu/T} \quad (2.2.18)$$

$$\Xi = \prod_i \sum_n [z \exp(-\varepsilon_i/T)]^n \quad (2.2.19)$$

$$\Omega = -T \ln \Xi \quad (2.2.20)$$

$$N = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T,V} = \sum_i \left[\frac{1}{[z^{-1} e^{\varepsilon_i/T} - 1]} - \frac{(R+1)}{[z^{-(R+1)} e^{(R+1)\varepsilon_i/T} - 1]} \right] \quad (2.2.21)$$

Число заповнень системи:

$$n_i = \frac{1}{[z^{-1} e^{\varepsilon_i/T} - 1]} - \frac{(R+1)}{[z^{-(R+1)} e^{(R+1)\varepsilon_i/T} - 1]} \quad (2.2.22)$$

Функція розподілу отримується:

$$n = \left\{ \frac{1}{[z^{-1} e^{\varepsilon_i/T} - 1]} \right\} - \left\{ \frac{(R+1)}{[z^{-(R+1)} e^{(R+1)\varepsilon_i/T} - 1]} \right\} \quad (2.2.23)$$

В граничних випадках:

$$n_{R=1} = \left\{ \frac{1}{[z^{-1} e^{\varepsilon_i/T} - 1]} \right\} - \left\{ \frac{(R+1)}{[z^{-(R+1)} e^{(R+1)\varepsilon_i/T} - 1]} \right\} = \frac{1}{[z^{-1} e^{\varepsilon_i/T} + 1]} \quad (2.2.24)$$

$$n_{R=\infty} = \{1/[z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1]\} - \{(R+1)/[z^{-(R+1)}e^{(R+1)\varepsilon/T} - 1]\} = 1/[z^{-1}e^{\varepsilon_i/T} - 1]$$

(2.2.25)

Неекстенсивна статистика Цалліса

Неекстенсивні статистики використовують для опису систем з неадитивною ентропією.

Поняття ентропії визначається через логарифм кількості мікростанів: стан з енергіє E реалізується з імовірністю

$$\int P(E) dE = 1$$

(2.2.26)

Якщо кількість мікростанів з енергією меншою E визначити як $\Gamma(E)$, то імовірність реалізації стану з енергією E задається через функцію розподілу $p(E)$:

$$P(E) = \frac{d\Gamma(E)}{dE} p(E)$$

(2.2.27)

В проміжку ΔE кількість мікростанів буде:

$$\Delta\Gamma = \frac{d\Gamma}{dE} \Delta E$$

(2.2.28)

тоді ентропія визначиться:

$$S = \ln\Delta\Gamma = -\ln p(E)$$

(2.2.29)

Логарифм кількості мікростанів можна задати як адитивну величину, тобто

$$\ln p(E_j) = C + \beta E_j$$

(2.2.30)

E_j – енергія відповідає стану j. Тоді

$$S = \ln\Delta\Gamma = -\ln p(E) = -\langle \ln p(E) \rangle = -\sum_j p_j \ln p_j$$

(2.2.31)

Аддитивність ентропії визначатиметься як:

$$S(A+B) = S(A) + S(B)$$

(2.2.32)

Рівність для адитивного рівняння може порушуватися, і відповідно ентропія може набувати неадитивного визначення.

Цалліс ввів узагальнену ентропію:

$$S_q = \frac{1}{q-1} (1 - \sum_{j=1}^W p_j^q), \quad \sum_{j=1}^W p_j = 1$$

(2.2.33)

для якої виконується умова:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B)$$

(2.2.34)

Якщо продиференціювати суму імовірностей, то отримається результат:

$$-\left(\frac{d}{d\beta} \sum_{j=1}^W p_j\right) \Big|_{\beta=1} = -\sum_{j=1}^W p_j \ln p_j = S$$

(2.2.35)

Ентропію Цалліса можна записати через q -логарифм:

$$\ln_q x = (x^{1-q} - 1)/(1-q)$$

$$S_q = \ln_q W$$

(2.2.36)

Для того щоб знайти ймовірності p_j необхідно використати метод множників Лагранжа. Екстремум ентропії Цалліса визначатиметься:

$$\sum_j^W p_j = 1$$

(2.2.37)

$$\sum_j^W p_j \varepsilon_j = E$$

(2.2.38)

Розв'язуючи варіаційну задачу:

$$\delta \left\{ \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^W (p_j - p_j^q) - \alpha \sum_j^W p_j - \beta \sum_j^W p_j \varepsilon_j \right\} = 0$$

(2.2.39)

$$\frac{1}{q-1} (1 - q p_j^{q-1}) - \alpha - \beta \varepsilon_j = 0$$

(2.2.40)

$$p_j = \left\{ \frac{1 - (q-1)(\alpha + \beta \varepsilon_j)}{q} \right\}^{1/q-1}$$

(2.2.41)

Ввівши статистичну суму:

$$Z_q^{-1} = \left\{ \frac{1 - (q-1)\alpha}{q} \right\}^{1/q-1}$$

(2.2.42)

Ймовірність

$$p_j = \frac{1}{Z(q)} [\exp_q (\varepsilon_j/T)]^{-1}$$

(2.2.43)

Існують також модифікації підходу Цалліса: статистика Курадо-Цалліса, Цалліса-Мендеша-Пластіно. Екстремум ентропії виводять за умови нормування імовірностей:

$$\sum_j^W p_j = 1$$

(2.2.44)

ввівши узагальнену енергію:

$$\sum_j^W p_j^q \varepsilon_j = U_q$$

(2.2.45)

Розв'язуючи рівняння:

$$\frac{q}{q-1} p_j^{q-1} + \beta q \varepsilon_j p_j^{q-1} + \alpha = 0$$

(2.2.46)

Ймовірність запишеться:

$$p_j = \frac{1}{Z(q)} [1 - (1-q)\varepsilon_j]^{1/1-q}$$

(2.2.47)

$$Z(q) = \sum_{j=1}^W [1 - (1-q)\beta\epsilon_j]^{1/1-q}$$

(2.2.48)

Окрім узагальнення Цалліса, варто виокремити ентропію Рейні, Курадо та Каніадакіса.

q, μ – деформовані термодинаміки

Комутаційне співвідношення для операторів породження та знищення:

$$[a, a^*]_q = aa^* - qa^*a = 1$$

(2.2.49)

задає *q-деформовану алгебру*

Алгебра операторів породження та знищення визначається такими співвідношеннями:

$$[a^*, a^*] = [a, a] = 0, [N, a^*] = a^*, [N, a] = -a$$

(2.2.50)

де N – оператор кількості частинок:

$$N|n\rangle = n|n\rangle$$

(2.2.51)

Діючи на вакуумний стан $|0\rangle$, отримується:

$$(a^*)^n|0\rangle = \text{const}|0\rangle, a|0\rangle = 0$$

(2.2.52)

Нехай $|n\rangle^k$ – ненормовані стани, тоді

$$a^*|n\rangle^k = |n+1\rangle^k, a|n\rangle^k = A_n|n-1\rangle^k$$

$$aa^*|n\rangle^k = a|n+1\rangle^k = A_{n+1}|n\rangle^k$$

(2.2.53)

Вводячи параметр деформації:

$$aa^*|n\rangle^k = (1+qa^*a)|n\rangle^k = |n\rangle^k + qa^*A_n|n-1\rangle^k = (1+qA_n)|n\rangle^k$$

$$A_{n+1} = 1 + qA_n$$

$$A_0 = 0, A_1 = 1, A_2 = 1 + q, A_3 = 1 + q(1 + q) = 1 + q + q^2$$

$$A_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = (q^n - 1) / (q - 1)$$

(2.2.54)

відповідно $A_n \in q$ -числом, і нормовані стани можна виразити через q -факторіал:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n(q)]!}} (a^*)^n |0\rangle$$

(2.2.55)

Для операторів породження та знищення:

$$a^*|n\rangle = \sqrt{[n+1](q)}|n+1\rangle$$

$$a|n\rangle = \sqrt{[n](q)}|n-1\rangle$$

(2.2.56)

тоді добутки:

$$a^*a = [N]_q, aa^* = [N+1]_q$$

(2.2.57)

а оператор кількості частинок визначиться:

$$N_q = \frac{1}{\ln q} \ln(1 + (q-1)a^*a)$$

(2.2.58)

Комутаційні співвідношення та визначення для оператора породження частинок виконуються для осцилятора Арика-Куна, для якого параметр деформації q задається в інтервалі дійсних чисел $[0,1]$.

Комутаційні співвідношення для операторів породження та знищення можна записати в іншій формі через степеневі залежності параметра деформації:

$$A = q^{N/2}a, A^* = a^*q^{N/2}$$

(2.2.59)

$$AA^* - q^2A^*A = 1$$

(2.2.60)

В представленні Фока, оператори матимуть форму:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n](B)!}} (A^*)^n |0\rangle, A|0\rangle = 0, N|n\rangle = n|n\rangle$$

$$[n](B)! \equiv [n]^B!$$

$$[n]^B = q^{n-1} [n] = (q^{2n-1} - 1)/(q^2 - 1)$$

(2.2.61)

де позначення B використовується для бозонів.

Відповідно, комутаційні співвідношення в представленні Фока запишуться:

$$A^*A = [N]^B, AA^* = [N+1]^B$$

(2.2.62)

Для ферміонів виконуватимуться такі співвідношення:

$$f^*f + qf^*f = q^{-N}, [N, f] = -f, [N, f^*] = f^*$$

(2.2.63)

Нормовані стани ферміонів:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n](f)!}} (f^*)^n |0\rangle, f|0\rangle = 0, N|n\rangle = n|n\rangle$$

(2.2.64)

$$[n]^f = \{q^{-n} - (-1)^n q^n\} / \{q + q^{-1}\}$$

(2.2.65)

$$f^*f = [N]^f, ff^* = [N+1]^f$$

$$F = q^{N/2} f, F^* = f^* q^{N/2}$$

$$FF^* + q^2 F^* F = 1$$

(2.2.66)

Тоді оператор стану для ферміонів визначатиметься:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n](F)!}} (F^*)^n |0\rangle, F|0\rangle = 0, N|n\rangle = n|n\rangle$$

$$[n]^F = \{1 - (-1)^n q^{2n}\} / \{q^2 + 1\}$$

(2.2.67)

Записавши функцію Z для термодинамічної системи:

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$$

(2.2.68)

та для будь-якого оператора O , середнє значення:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}(e^{-\beta H} O)$$

(2.2.69)

Тоді оператор Гамільтона:

$$H = \omega N$$

(2.2.70)

для бозе-системи:

$$H = \frac{1}{2}(a^*a + aa^*)$$

(2.2.71)

для фермі-системи:

$$H = \frac{1}{2}(f^*f - ff^*)$$

(2.2.72)

Відповідно, функція

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \omega n} = e^{\beta \omega} / (e^{\omega} - 1)$$

(2.2.73)

Якщо параметр $q = e^{i\pi/3}$, то для станів $|3\rangle$, $|4\rangle$, $|5\rangle$ отримується матричне представлення операторів породження, знищення та кількості частинок:

$$a_R = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_R^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, N_R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(2.2.74)

тоді функція

$$Z = e^{-3\beta\omega} + e^{-4\beta\omega} + e^{-5\beta\omega}$$

(2.2.75)

для бозонів:

$$\langle a(*)a \rangle = \langle [N] \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n [n] e^{-\beta\omega n} = (e - 1) / (e^{2\beta\omega} - (q + q^{-1})e^{\beta\omega} + 1)$$

$$\langle A(*)A \rangle = \langle [N](B) \rangle = 1 / (e^{\beta\omega} - q^2)$$

(2.2.76)

для ферміонів:

$$\langle a(*)a \rangle = \langle [N](f) \rangle = (e - 1) / (e^{2\beta\omega} + (q + q^{-1})e^{\beta\omega} - 1)$$

$$\langle F(*)F \rangle = \langle [N](F) \rangle = 1 / (e^{\beta\omega} + q^2)$$

(2.2.77)

Для (p, q) -осцилятора виконуватимуться такі співвідношення:

$$aa^* - qa^*a = p^{-N}, \quad aa^* - p^{-1}a^*a = q^N$$

$$[N, a^*] = a^*, \quad [N, a] = -a$$

(2.2.78)

оператори породження та знищення:

$$a^*|n\rangle = \sqrt{[n+1](p, q)}|n+1\rangle$$

$$a|n\rangle = \sqrt{[n](p, q)}|n-1\rangle$$

(2.2.79)

$$[x]_{p, q} = (q^x - p^{-x}) / (q - p^{-1})$$

(2.2.80)

Також існують осцилятори Біденгарна-Макфарлейна та Тамма-Данкова:

при $p=q$, отримуються такі комутаційні співвідношення:

$$[a, a^*]_q = aa^* - qa^*a = q^{-N}$$

(2.2.81)

$$[a, a^*]_q^{-1} = aa^* - q^{-1} a^* a = q^N$$

$$[N, a^*] = a^*, [N, a] = -a$$

(2.2.82)

при $q = q^{-1}$, алгебру операторів породження-знищення і відповідно кількості частинок визначають:

$$[a, a^*]_q = aa^* - qa^*a = q^N$$

(2.2.83)

μ -деформована термодинаміка

Структурна функція для деформованого осцилятора:

$$\varphi_\mu(N) = \frac{N}{1+\mu N}$$

(2.2.84)

Кількість частинок виражається через велику статистичну суму:

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln \mathcal{E}$$

(2.2.85)

для деформованого випадку, кількість частинок буде:

$$N^\mu = z D^\mu \ln \mathcal{E}$$

(2.2.86)

де D^μ є деформованою похідною та визначається:

$$D^\mu = [n]_\mu X^{n-1}$$

$$[n]_\mu = \frac{n}{1+\mu n}$$

(2.2.87)

Розписавши явно вираз для великої статистичної суми:

$$N^\mu = z D^\mu \ln \mathcal{E} = - z D^\mu \sum_j \ln(1 - ze^{-\epsilon_j/T})$$

(2.2.88)

Розклавши в ряд та застосувавши похідну:

$$N^{\mu} = z \sum_j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} e^{-l \epsilon_j / T} [l] z^{l-1} = \sum_j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} e^{-l \epsilon_j / T} [l] z^l$$

$$N^{\mu} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} [l] z^l + \sum_{j>0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} e^{-l \epsilon_j / T} [l]_{\mu} z^l$$

(2.2.89)

Для логарифма великої статистичної суми виконуватиметься:

$$\ln \mathcal{E}^{\mu} = \sum_{l=1}^{\infty} [l] z^l / l^2 + V_D / \lambda_D \sum_{l=1}^{\infty} [l]_{\mu} z^l / l^{D/2+2}$$

(2.2.90)

Ввівши поняття полілогарифма, логарифм суми та рівняння стану можна записати:

$$\text{Li}^{\mu}_s(z) = \sum_{l=1}^{\infty} [l] z^l / l^{s+1}$$

(2.2.91)

$$\ln \mathcal{E}^{\mu} = \text{Li}^{\mu}_s(z) + V_D / \lambda_D \text{Li}_{D/2+1}^{\mu}(z)$$

(2.2.92)

$$\frac{p}{T} V_D = \ln \mathcal{E}^{\mu} = \text{Li}^{\mu}_s(z) + V_D / \lambda_D \text{Li}_{D/2+1}^{\mu}(z)$$

p – тиск системи та її об’єм V .

(2.2.93)

РОЗДІЛ 3

ТЕРМОСТАТИСТИЧНЕ μ -ДЕФОРМОВАНЕ РІВНЯННЯ РУХУ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЕЙНШТЕЙНА ТА КОСМОЛОГІЧНЕ РІВНЯННЯ ФРІДМАНА

3.1. Рівняння Ейнштейна з параметром μ -деформації

Кількість частинок класичної термостатистичної системи визначається:

$$N = z \frac{d}{dz} \ln Z$$

(3.1.1)

$$z = e^{\beta a}$$

(3.1.2)

$$\ln Z = - \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta \varepsilon_i})$$

(3.1.3)

де z – активність, β – обернена температура $\frac{1}{T}$, a – хімічний потенціал, ε_i – одностинкова енергія, $\ln Z$ – логарифм великої статистичної суми.

Для μ -деформованої системи кількість частинок залежить від μ -похідної логарифма великої статистичної суми та активності:

$$N^\mu = z D_z^\mu \ln Z$$

(3.1.4)

розкривши вираз для статистичної суми, кількість частинок:

$$N^\mu = - z D_z^\mu \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta \varepsilon_i})$$

(3.1.5)

де за дефініцією μ -похідна та μ -число⁶⁴:

$$D_z^\mu \{x^n\} \stackrel{\text{def}}{=} [n] x^{n-1} \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

$$[n]_\mu = \frac{n}{1+\mu}$$

(3.1.6)

⁶⁴ A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik. Nonstandard deformed oscillators from q - and p , q -deformations of Heisenberg algebra. SIGMA 12, 047 (2016).pp.1182-1191

Математично, кількість частинок деформованої системи визначається через μ -похідну від логарифма великої статистичної суми.

Логарифмічну функцію канонічно розкладається в ряд Тейлора, нехтуючи додатковими членами та нескінченно малими доданками ряду:

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{(n-1)} x^n$$

(3.1.7)

діючи μ -похідною на кожен доданок ряду⁶⁵:

$$D_z^\mu \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta \varepsilon_i}) = - \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{-\beta \varepsilon_i})^n [n]_\mu z^{n-1}$$

(3.1.8)

отримується вираз для кількості частинок деформованої системи:

$$N^\mu = - z D_z^\mu \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta \varepsilon_i}) = z \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{-\beta \varepsilon_i})^n [n]_\mu z^{n-1} = \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{-\beta \varepsilon_i})^n [n]_\mu z^n$$

(3.1.9)

обмежене значення:

$$0 \leq |ze^{-\beta \varepsilon_i}| < 1$$

(3.1.10)

вважаємо, що нерелятивістська одночастинкова енергія:

$$\varepsilon_i = p_i^2/2m$$

(3.1.11)

Для основного стану системи енергія $\varepsilon_0 = 0$, $z \rightarrow 1$, тому доданок при $i=0$ є розбіжним і виокремлюється:

$$N^\mu = \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (e^{-\beta \varepsilon_i})^n [n]_\mu z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [n]_\mu z^n$$

(3.1.12)

⁶⁵ О.М. Чубай, А.А. Ровенчак. Ідеальний Бозе-газ у деяких деформованих термодинаміках. Зв'язок між параметрами деформацій. Укр. фіз. журн. 2020. Т. 65, № 6. ст.496-505

Для великого об'єму та кількості частинок системи, необхідно перейти від дискретного сумування до інтегрування по неперервній змінній k :

$$\sum_i \rightarrow v/(2\pi\hbar)^3 \int d^3k$$

(3.1.13)

отримуючи вираз для деформованої кількості частинок системи:

$$N^\mu = 4\pi v/(2\pi\hbar^2)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [n]_\mu z^n \int_0^\infty dp p^2 e^{-\beta p^2/2m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [n]_\mu z^n$$

$$N^\mu = v/\lambda^3 \sum_{n=1}^{\infty} [n]_\mu (1/n^{5/2}) z^n + N_0^\mu, \quad N_0^\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [n]_\mu z^n$$

(3.1.14)

де довжина хвилі де Бройля:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{mkT}} \hbar$$

(3.1.15)

Нескінченний степеневий ряд з μ -деформованими числовими множниками є за означенням полілогарифмом:

$$g_l^{(\mu)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} [n]_\mu z^n / n^{(l+1)}$$

$$n^{5/2} \quad \text{звідки } l = \frac{3}{2}$$

(3.1.16)

тоді кількість частинок визначатиметься через полілогарифми $[g_{3/2}^{(\mu)}(z), g_0^{(\mu)}(z)]$:

$$N^\mu = v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z)$$

(3.1.17)

Внутрішня енергія термодинамічної системи задається як часткова похідна від деформованого логарифма великої статистичної суми:

$$U^\mu = -\frac{\partial}{\partial z} \ln Z^\mu$$

(3.1.18)

де за означенням, деформований логарифм:

$$\ln Z^\mu = v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z)$$

(3.1.19)

Записавши полілогарифми для індексів $l = 5/2$ та $l = 1$:

$$g_{5/2}^{(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [n]_{\mu} z^n / n^{7/2}$$

$$g_1^{(\mu)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [n]_{\mu} z^n / n^2$$

(3.1.20)

отримується компактний та розгорнутий вирази для деформованого логарифма великої статистичної суми:

$$\ln Z^{\mu} = v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z) = v/\lambda^3 \sum_{n=1}^{\infty} [n]_{\mu} z^n / n^{7/2} + \sum_{n=1}^{\infty} [n]_{\mu} z^n / n^2$$

(3.1.21)

Діючи частинною похідною по змінній z у функціональному виразі для деформованого логарифма:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \ln Z^{\mu} &= \frac{\partial}{\partial z} [v/\lambda^3 \sum_{n=1}^{\infty} [n]_{\mu} z^n / n^{7/2} + \sum_{n=1}^{\infty} [n]_{\mu} z^n / n^2] = [v/\lambda^3 \sum_{n=1}^{\infty} [n]_{\mu} z^{n-1} / n^{5/2} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [n]_{\mu} z^{n-1} / n] = v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z) \end{aligned}$$

(3.1.22)

визначається внутрішня енергія деформованої системи:

$$U^{\mu} = v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z)$$

(3.1.23)

Рівняння стану системи детермінується логарифмом великої статистичної суми та параметрами системи як тиск, температура та об'єм:

$$\frac{pV}{kT} = \ln Z^{\mu}$$

(3.1.24)

$$\frac{pV}{kT} = v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z)$$

(3.1.25)

Вільна енергія системи для деформованого випадку:

$$F^{\mu} = \beta N^{\mu} - pV = [v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z)] - pV$$

(3.1.26)

з рівняння стану визначається добуток тиску та об'єму:

$$pV = kT[v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z)]$$

(3.1.27)

підставляючи множник pV в рівняння для вільної енергії:

$$F^\mu = \beta N^\mu - pV = \beta[v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z)] - kT[v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z)]$$

(3.1.28)

В рівнянні для вільної енергії необхідно явно виписати залежність величин від температури та коефіцієнта k :

$$z = e^{\beta/kT}$$

(3.1.29)

логарифмуючи рівняння для z :

$$\ln z = \frac{\beta}{kT} \ln e \rightarrow \beta = kT \ln z$$

(3.1.30)

Вільна енергія в явній відносно температури формі запишеться:

$$F^\mu = \beta N^\mu - pV$$

$$F^\mu = kT \ln z [v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z)] - kT [v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z)]$$

(3.1.31)

Ентропія деформованої термостатистичної системи:

$$S = \frac{1}{T} (U^\mu - F^\mu)$$

(3.1.32)

покладаючи в рівняння явні вирази для внутрішньої енергії та вільної енергії системи:

$$S = \frac{1}{T} [v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z) - kT \ln z [v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z)] + kT [v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z)]$$

(3.1.33)

помноживши обернену температуру та кожен доданок ентропійного рівняння та згрупувавши їх:

$$S = \frac{1}{T} v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} g_0^{(\mu)}(z) - \frac{1}{T} kT \ln z v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) - \frac{1}{T} kT \ln z g_0^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} kT v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} kT g_1^{(\mu)}(z)$$

(3.1.34)

$$S = -\frac{1}{T} kT \ln z v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) - \frac{1}{T} kT \ln z g_0^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} kT v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} kT g_1^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} g_0^{(\mu)}(z) = \frac{1}{T} kT v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} kT g_1^{(\mu)}(z) - \frac{1}{T} kT \ln z v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) - \frac{1}{T} kT \ln z g_0^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} g_0^{(\mu)}(z) = \frac{E}{T} [v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z) - \ln z v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) - \ln z g_0^{(\mu)}(z)] + \frac{1}{T} [v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z)]$$

(3.1.35)

ввівши скорочені позначення для виразів:

$$v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z) - \ln z v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) - \ln z g_0^{(\mu)}(z) = \zeta_{\mu}(z)$$

$$v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + g_0^{(\mu)}(z) = \zeta_{\mu}^0(z)$$

(3.1.36)

отримується рівняння для деформованої ентропії системи в залежності від параметра μ -деформації:

$$S = \frac{E}{T} \zeta(z) + \frac{1}{T} \zeta_{\mu}^0(z)$$

(3.1.37)

Статистична рівновага системи (statistical equilibrium) досягається за умови рівності нулевій похідної від ентропії:

$$\frac{d}{dx} S(E, x) = 0$$

(3.1.38)

Розкриваючи диференціальне рівняння для ентропії:

$$\frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

(3.1.39)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -F$$

(3.1.40)

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \nabla S$$

(3.1.41)

Підносячи до третього степеня вираз для хвилі де Бройля:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{mkT}} \hbar \rightarrow \lambda^3 = \hbar^3 \left(\frac{2\pi}{mE} \right)^{3/2}$$

(3.1.42)

та покладаючи його в рівняння для ентропії:

$$\begin{aligned} \frac{E}{T} [v/\lambda^3 g_{5/2}^{(\mu)}(z) + g_1^{(\mu)}(z) - \ln z v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) - \ln z g_0^{(\mu)}(z)] + \frac{1}{T} [v/\lambda^3 g_{3/2}^{(\mu)}(z) + \\ g_0^{(\mu)}(z)] = \frac{E}{T} [v g_{5/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + g_1^{(\mu)}(z) - \ln z v g_{3/2}^{(\mu)}(z) \\ m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 - \ln z g_0^{(\mu)}(z)] + \frac{1}{T} [v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + g_0^{(\mu)}(z)] \end{aligned}$$

(3.1.43)

отримується вираз деформованої ентропії:

$$\begin{aligned} S_\mu = \frac{1}{T} v g_{5/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{5/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + \frac{E}{T} g_1^{(\mu)}(z) - \frac{1}{T} \ln z v g_{3/2}^{(\mu)}(z) \times \\ \times m^{3/2} E^{5/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 - \frac{E}{T} \ln z g_0^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} [v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + g_0^{(\mu)}(z)] \end{aligned}$$

(3.1.44)

Диференціюючи деформовану ентропію по змінній E:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{1}{T} v g_{5/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{5/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + \frac{E}{T} g_1^{(\mu)}(z) - \frac{1}{T} \ln z v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{5/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 \right. \\ \left. - \frac{E}{T} \ln z g_0^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} [v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + g_0^{(\mu)}(z)] \right] \end{aligned}$$

(3.1.45)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{1}{T} v g_{5/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{5/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + \frac{E}{T} g_1^{(\mu)}(z) - \frac{1}{T} \ln z v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{5/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 - \frac{E}{T} \ln z \right. \\ \left. g_0^{(\mu)}(z) + \frac{1}{T} [v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + g_0^{(\mu)}(z)] \right] = \frac{5}{2} \frac{1}{T} v g_{5/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 \\ + \frac{1}{T} g_1^{(\mu)}(z) - \frac{5}{2} \frac{1}{T} \ln z v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 - \frac{1}{T} \ln z g_0^{(\mu)}(z) + \frac{3}{2} \frac{1}{T} \\ v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{1/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 \end{aligned}$$

(3.1.46)

Спростуючи та групуючи доданки в рівнянні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial E} = & \frac{5}{2} \frac{1}{T} v g_{5/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 - \frac{5}{2} \frac{1}{T} \ln z v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + \frac{3}{2} \frac{1}{T} \\ & v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{1/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + \frac{1}{T} g_1^{(\mu)}(z) - \frac{1}{T} \ln z g_0^{(\mu)}(z) = \frac{1}{T} \left\{ \frac{5}{2} v m^{3/2} E^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 (\right. \\ & \left. g_{5/2}^{(\mu)}(z) - \ln z g_{3/2}^{(\mu)}(z)) + \frac{3}{2} v g_{3/2}^{(\mu)}(z) m^{3/2} E^{1/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 + g_1^{(\mu)}(z) - \ln z g_0^{(\mu)}(z) \right\} \end{aligned}$$

(3.1.47)

Для зручності опрацювання доданків ентропійного рівняння, вводяться скорочені позначення:

$$g_{5/2}^{(\mu)}(z) - \ln z g_{3/2}^{(\mu)}(z) = \mathfrak{I}_1$$

(3.1.48)

$$\frac{3}{2} \eta g_{3/2}^{(\mu)}(z) E^{1/2} + g_1^{(\mu)}(z) - \ln z g_0^{(\mu)}(z) = \mathfrak{I}_2$$

(3.1.49)

$$v m^{3/2} / (2\pi)^{3/2} \hbar^3 = \eta$$

(3.1.50)

Тоді рівняння для похідної від деформованої ентропії набуде форми:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{5}{2} \eta E^{3/2} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \right\}$$

(3.1.51)

$$\frac{1}{T} \left\{ \frac{5}{2} \eta E^{3/2} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \right\} F = \nabla S \rightarrow \left\{ \frac{5}{2} \eta E^{3/2} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \right\} F = T \nabla S \rightarrow T = \left\{ \frac{5}{2} \eta E^{3/2} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \right\} F / \nabla S$$

(3.1.52)

$$F = m e^\phi \nabla \phi$$

$$\nabla S = -2\pi m N / \hbar$$

e^ϕ – визначає червоний зсув по фазі ϕ .

(3.1.53)

відповідно, температура деформованої системи:

$$T_\mu = \left\{ \frac{5}{2} \eta E^{3/2} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \right\} m e^\phi \nabla \phi \hbar / 2\pi m N = \left\{ \frac{5}{2} \eta E^{3/2} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \right\} e^\phi \nabla \phi \hbar \frac{1}{2\pi N}$$

(3.1.54)

Використовуючи рівність для маси та енергії⁶⁶: $M = \frac{NT}{2}$

(3.1.55)

визначається повна маса системи:

$$M = \frac{1}{2} \int T \, dN$$

$$M = \frac{1}{2} \int T \, dN = \frac{1}{2} \int dN \frac{1}{2\pi N G \hbar} \left\{ \frac{5}{2} \eta E^{3/2} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \right\} e^{\phi} \nabla \phi \hbar$$

(3.1.56)

Ввівши позначення $\xi(z)$:

$$\left\{ \frac{5}{2} \eta E^{3/2} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \right\} = \xi(z)$$

(3.1.57)

тоді повна маса:

$$M = (z)/4\pi G \int dV R_{ab} N^a \xi^b$$

$$M = (z)/4\pi G \int dV R_{ab} N^a \xi^b = 2 \int dV \left\{ T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T + \frac{\Lambda}{8\pi} g_{ab} \right\} N^a \xi^b$$

N^a є одиничним вектором.

(3.1.58)

З рівняння для повної маси виводиться рівняння гравітаційного поля:

$$(\xi(z)/4\pi G) R_{ab} = 2 \left\{ T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{ab} \right\}$$

$$\xi(z) R_{ab} = 8\pi G \left\{ T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{ab} \right\}$$

(3.1.59)

Виконавши операцію трейсування тензорних компонентів рівняння, отримується модифіковане рівняння гравітаційного поля Ейнштейна:

$$\text{Tr}(R_{ab}) = \text{Tr}(8\pi G / \xi(z) \{ T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T + \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{ab} \}) \rightarrow$$

⁶⁶ М. Senay. Entropic gravity corrected by *q*-statistics, and its implications to cosmology. Physics Letters B. Volume 820, 10 September 2021, 136536. pp. 1-6

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \frac{\Lambda}{\xi(z)} g_{ab} = \frac{8\pi G}{\xi(z)} T_{ab}$$

(3.1.60)

3.2. Рівняння Фрідмана з параметром μ -деформації

Просторово-часова відстань між двома точками в гомогенному та ізотропному просторі-часі у моделі Всесвіту FRW⁶⁷ визначається:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [dr^2/(1 - kr^2) + r^2 d\theta^2]$$

(3.2.1)

де $a(t)$ є скейлінговий фактор, тобто космологічний масштабний фактор, який характеризує зміну віддалі між галактиками при розширенні або стисненні Всесвіту. В рівняння для метрики ФЛРВ фактор a набуває значення кривизни простору-часу;

k – константа, яка може набувати трьох значень (0, 1, -1) для евклідового, закритого та відкритого просторів;

c – швидкість світла у вакуумі;

r, θ – сферичні координати.

Динамічний горизонт подій задається:

$$r^* = ar = \frac{1}{\sqrt{d+b}}$$

(3.2.2)

де $d = H^2$, $b = k/a^2$, $H = \frac{a^*}{a}$ параметр Хаббла, який входить в закон Хаббла:

$$v = Hd^*$$

(3.2.3)

де d^* – відстань між галактиками. Задаючи тензор енергії та рівняння стану для речовини в моделі Всесвіту FRW:

$$T_{ab} = (\rho + p) u_a u_b - p g_{ab}$$

(3.2.4)

⁶⁷ Модель еволюції Всесвіту з метрикою Фрідмана-Леметра-Робертсона-Вокера однорідного та ізотропного простору, яка базується на космологічному принципі про незалежність спостережуваної структури Всесвіту від напрямку та місця спостереження.

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$$

(3.2.5)

p – тиск, ρ – густина. Радіальне прискорення, температура та повна маса визначаються:

$$a_r = -a^{**}r$$

(3.2.6)

$$T = \frac{\hbar a(r)}{2\pi}$$

(3.2.7)

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

(3.2.8)

Виконавши перетворення з вищенаписаними формулами, отримується модифіковане рівняння Ньютона в деформованому випадку:

$$\frac{a^{**}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3\xi(z)}$$

$$\left\{\frac{5}{2}\eta E^{3/2}\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2\right\} = \xi(z)$$

(3.2.9)

Якщо задати гравітаційну масу:

$$M = \left(\rho + 3p + \frac{\Lambda}{4\pi G}\right)V$$

(3.2.10)

то деформоване рівняння Фрідмана:

$$\frac{a^{**}}{a} = -\frac{4\pi G}{3\xi(z)}(\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{3\xi(z)}$$

(3.2.11)

Розкриваючи компоненти рівняння через параметр Хаббла, отримується:

$$H^2 + k/a^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho}{\xi(z)} - \frac{\Lambda}{8\pi G \xi(z)} \right)$$

(3.2.12)

Для евклідового простору при $k = 0$, рівняння Фрідмана набуде форми:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho + \rho_{\text{темна енергія}})$$

(3.2.13)

$$\rho^{68}_{\text{темна енергія}} = \left(\frac{1}{\xi(z)} - 1\right)\rho - \frac{\Lambda}{8\pi G \xi(z)}$$

(3.2.14)

⁶⁸ Темна енергія є однією із форм енергії та складає разом з темною матерією більше 90% маси Всесвіту та входить в модель Всесвіту Λ CDM (Lambda – Cold Dark Matter).

ВИСНОВКИ

1. Задача, поставлена та вирішена в цій роботі, задовольняє вимогам доцільності, актуальності та новизни, а застосування методів теорії деформованих моделей, і зокрема μ -деформації, є ефективним для вирішення як нашої, так і інших фізичних проблем. Для прикладу, це можуть бути космологічні чи гравітаційні проблеми. Ефективним є застосування μ -деформації для опису ротаційних кривих карликових галактик та розподілу темної матерії в цих галактиках.

2. В нашій роботі, на основі μ -числення та моделі μ -деформованої термодинамічної системи, **вперше** виведено μ -деформоване узагальнення рівняння Ейнштейна, як варіант нової моделі індукованої гравітації. У цій моделі, μ -термодинаміка описує систему, у якій температура, ентропія і маса визначаються деформацією і залежать від параметра μ , і яка таким чином індукує гравітаційне поле.

Отже, μ -деформована маса системи генерує гравітацію, яка описується отриманим μ -узагальненим рівнянням.

3. В роботі доведено вплив деформованої гравітації на опис космологічних процесів, зокрема інфляційного розширення Всесвіту. Зазвичай явище інфляції Всесвіту описується класичним рівнянням Фрідмана. В роботі було **вперше** виведено μ -деформоване рівняння Фрідмана та показані наслідки такої деформації для основних космологічних параметрів. Важливим наслідком є вплив μ -деформації на величину густини темної енергії Всесвіту.

4. Виведене μ -деформоване рівняння гравітаційного поля описує будь-які динамічні чи польові нелінійності, що мають вплив на гравітацію. В граничному переході при $\mu \rightarrow 0$ зникають деформаційні фактори в рівнянні Ейнштейна і отримується відоме рівняння гравітаційного поля ЗТВ, що вказує на математичну коректність виведеного нами деформованого рівняння. Так само, в границі $\mu \rightarrow 0$ отримується класичне рівняння Фрідмана та густина темної енергії.

5. Класичне рівняння Ейнштейна має різноманітні розв'язки: метрика Шварцшильда, метрика Керра, гравітаційні хвилі та інші. Застосовуючи μ -деформацію для опису термодинаміки чорних дір можна отримати деформоване рівняння гравітації цієї діри та його розв'язки. Відповідні розв'язки рівняння Ейнштейна міститимуть параметр μ -деформації.

Клас таких деформаційних розв'язків може мати теоретичну новизну для астрофізики і тим самим стимулювати нові дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Matt Visser, Sakharov's Induced Gravity: A Modern perspective. Modern Physics Letters A Vol. 17, No. 15n17, 2002. pp. 977-991
2. J. L. Cervantes-Cota and H. Dehnen .Induced gravity inflation in the SU(5) GUT. Phys. Rev. D 51, 395 – Published 15 January 1995.pp.395-404
3. Jonathan Bain, The emergence of spacetime in condensed matter approaches to quantum gravity.Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics Volume 44, Issue 3, August 2013, Pages 338-345
4. Masud Chaichian, Markku Oksanen and Anca Tureanu, Sakharov's induced gravity and the Poincar'e gauge theory.The Conservative Revolutionary, World Scientific Publishing, 2019, pp. 271-299
5. J. D. Bekenstein, "Black holes and the second law," Lett. Nuovo Cim.4,1972. pp.737-740
6. S. L. Adler, "A formula for the induced gravitational constant," Phys. Lett. B 95, 241 (1980).pp.241-243
7. S. L. Adler, "Order-R vacuum action functional in scalar-free unified theories with spontaneous scale breaking," Phys. Rev. Lett. 44, 1567 (1980).pp.1567-1569
8. Alexander Yu. Kamenshchik, Alessandro Tronconi and Giovanni Venturi.Induced gravity and quantum cosmology.Physical Review D 100, 023521 (2019).pp.1-8
9. Nahomi Kan and Kiyoshi Shiraishi, Induced Gravity from Theory Space. Progress of Theoretical Physics, Volume 111, Issue 5, May 2004, Pp. 745–755
10. Yutaka Hosotani, Dynamical Mass Generation By Compact Extra Dimentions, Physics Letters. Volume 126B, number 5,7 July 1983 . pp.309-313
11. Zaripov, F. Dark Matter as a Result of Field Oscillations in the Modified Theory of Induced Gravity. Symmetry 2020, 12, 41.pp.1-15
12. S. L. Adler, "Einstein gravity as a symmetry breaking effect in quantum. Rev. Mod. Phys. 54, 729 (1982).pp.729-766
13. S. L. Adler, "Einstein gravitation as a long wavelength effective field theory," Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 310, 273 (1983).pp.273-278
14. A. Zee, " A broken symmetric theory of gravity," Phys. Rev. Lett. 42,417 (1979).pp. 417-421
15. A. Zee, " Spontaneously generated gravity, " Phys. Rev. D 23, 858 (1981).pp.858-866
16. A. Zee, " Einstein gravity emerging from quantum Weyl gravity, " Annals Phys. 151, 431 (1983) .pp. 431-443
17. K. S. Stelle, " Renormalization of higher derivative quantum gravity, "Phys. Rev. D 16,1977. pp. 953-969

18. K. S. Stelle, Classical Gravity with Higher Derivatives. General Relativity and Gravitation, Vol. 9, No. 4 (1978), pp. 353-371
19. Utama and DeWitt, Renormalization of a Classical Gravitational Field Interacting with Quantized Matter Fields. J. Math. Phys. 3, 1962. pp.608-618
20. Heartland. Snyder, Quantized Space-Time. Physical Review. Volume 71, Number 1. January 1, 1947. pp.38-41
21. Lee Smolin, Towards a Theory of spacetime Structure at very short distances. Nuclear Physics B160 (1979).pp. 253-268
22. G. Sardanashvily, Lecture on Gauge Gravitation Theory. Gravity as a Higgs Field. 20th International Summer School on Global Analysis and its Applications "General Relativity: 100 years after Hilbert" (Star'a Lesn'a, Slovakia, 2015).pp.1-46
23. E. O. Pozdeeva and S. Yu. Vernova, Induced Gravity Models with Exact Bounce Solutions. Physics of Particles and Nuclei, 2018, Vol. 49, No. 5, pp. 914–917
24. Jacob D. Bekenstein, Black Holes and the Second Law. Lettere al Nuovo Cimento Vol. 4, №5 12 Agosto 1972. pp.737-740
25. Ichiro Oda, Topological induced gravity. International Journal of Modern Physics D Vol. 26 (2017) 1750023. pp.1-16
26. Rafael I. Nepomechie, Einstein Gravity as The low energy effective theory of Weyl gravity. Volume 136B, number 1,2 Physics Letters 23 February 1984. pp.33-37
27. Yasunori Fujii, Scalar-tensor theory of gravitation and spontaneous breakdown of scale invariance, Physical Review D Volume 9, Number 4 15 February 1974, pp. 874-876
28. Gaurav Narain, Exorcising ghosts in induced gravity. Eur. Phys. J. C (2017) 77. pp.1-30
29. O. Klein, Generalization of Einstein's Principle of Equivalence so as to Embrace the Field Equations of Gravitation. Physica Scripta. Vol. 9, 69-72, 1974. pp.69-72
30. Jacob D. Bekenstein, Black Holes and Entropy. Physical Review. D. Volume 7, Number 8 15 April 1973. pp.2333-2346
31. A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, P. Giacconi and R. Soldati, Induced Gravity and Universe Creation on the Domain wall in five-dimensional space-time. Theoretical and Mathematical Physics, 148(1): 2006. pp.880–894
32. Josef Klusoň, Markku Oksanen, Anca Tureanu. Hamiltonian analysis of curvature-squared gravity with or without conformal invariance. Phys. Rev. D. 2014. pp.1-45
33. V.P. Frolov and D.V. Fursaev. Mechanism of Generation of Black Hole Entropy in Sakharov's Induced Gravity. Phys. Rev. D 56:1997. pp.2212-2225

34. Jacob D. Bekenstein, Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics. *Physical Review* Volume E 9, Number 12. 1974. pp. 3292-3300
35. Jacob D. Bekenstein, Statistical black-hole thermodynamics. *Physical Review D* volume 12, Number 10 15 NOV EMB ER 1 975. pp. 3077-3085
36. Philip B. Yasskin, Solutions for gravity coupled to massless gauge fields. *Physical Review* Volume 12, Number 8 15 October 1975. pp. 2212-2217
37. Wiktor Szczyrba, The Dynamical Structure of the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble Theory of Gravity. *Annals of Physics* 158, 1984. pp. 320-373
38. Philip B. Yasskin, Propagation equations for test bodies with spin and rotation in theories of gravity with torsion. *Physical Review D* Volume 21, Number 8 15 April 1980. pp. 2081-2094
39. S. Kichenassamy, Lagrange Multipliers in Theories of Gravitation. *Annals of Physics* 168, 1986. pp. 404-424
40. David Bao, The well-posedness of $(N = 1)$ classical supergravity. *Journal of Mathematical Physics* 26, 1985. pp. 329-333
41. E. Dil, E. Kolay, C. Ersanli, On the deformed Einstein equations and quantum black holes. *Journal of Physics: Conference Series* 766 (2016) 012004. pp. 1-7
42. T. W. B. Kibble, Lorentz Invariance and the Gravitational Field. *J. Math. Phys.* 2, 1961. pp. 212-221
43. David G. Boulware, Gary T. Horowitz and Andrew Strominger. Zero-Energy Theorem for Scale-Invariant Gravity. Volume 50, Number 22 *Physical Review Letters* 30 May 1983. pp. 1726-1729
44. Robert J. Finkelstein. *q-Gravity*. *Letters in Mathematical Physics* 38: 1996. pp. 53-62
45. V.P. Frolov, D.V. Fursaev, and A.I. Zelnikov. Black hole statistical mechanics and induced gravity. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* 57 (1997). pp. 192-196
46. J. Julve, M. Tonin. Quantum Gravity with Higher Derivative Terms. *IL : Nuovo Cimento Vol. 46 B, N. 1, 11 Luglio 1978* . Pp. 137-152
47. M. Chaichian, M. Oksanen, A. Tureanu, G. Zet. Gauging the twisted Poincare symmetry as noncommutative theory of gravitation. *Phys. Rev. D* 79:044016, 2009. pp. 1-21
48. F.W. Hehl. Spin and Torsion in General Relativity: I. Foundations. *GRG Vol. 4, No. 4* (1973). pp. 333- 349
49. Chiu Man Ho, Thomas W. Kephart, Djordje Minic and Y. Jack NG. Space-time emergence and general covariance transmutation. *Modern Physics Letters A* Vol. 28, No. 04, 1350005 (2013). Pp. 1-9
50. Thomas P. Sotiriou, Matt Visser, Silke Weinfurter. Phenomenologically viable Lorentz-violating quantum gravity. *Physical Review Letters* 102 (2009) 251601. pp. 1-4
51. A.V. Smilga. Spontaneous generation of the Newton constant in the renormalizable gravity theory. Preprint ITEP-63 (1982) published in the

- Proceedings of the conference on Group Theoretic Methods in Physics (Zvenigorod, 1982). Pp.1-4
52. Mustafa Senay and Salih Kibaroglu. *q-deformed* Einstein equations from entropic force. International Journal of Modern Physics A Vol. 33, No. 36 (2018) 1850218. pp 1-11
 53. M. Senay. Entropic gravity corrected by *q-statistics*, and its implications to cosmology. Physics Letters B. Volume 820, 10 September 2021, 136536. pp.1-6
 54. A.P. Rebesh, I.I. Kachurik, A.M. Gavrilik. Elements of μ -calculus and thermodynamics of μ -Bose gas model. Ukr. J. Phys. 2013. Vol. 58, No. 12. pp. 1182-1191
 55. Thomas P. Sotiriou, Matt Visser and Silke Weinfurtner. Quantum gravity without Lorentz invariance. Journal of High Energy Physics. volume 2009. pp. 1-37.
 56. A.M. Gavrilik, I.I. Kachurik. Nonstandard deformed oscillators from *q- and p, q-deformations* of Heisenberg algebra. SIGMA 12, 047 (2016). pp.1182-1191
 57. M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe and C. Montonen. Statistics of *q-oscillators*, quons and relations to fractional statistics. I. Phys. A Math Gen. 26 (1993) pp.417-4034.
 58. О.М. Чубай, А.А. Ровенчак. Ідеальний Бозе-газ у деяких деформованих термодинаміках. Зв'язок між параметрами деформацій. Укр. фіз. журн. 2020. Т. 65, № 6. ст.496-505
 59. А. Д. Сахаров, Вакуумные квантовые флуктуации в искривленном пространстве и теория гравитации, Докл. АН СССР, 1967, том 177, номер 1, ст. 70–71
 60. Визгин В.П. Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы) // УФН. 2001, т. 171. № 12. С. 1347–1363
 61. Д. Фридман, П. ван Ньювенхёйзен, Супергравитация и унификация законов физики, УФН, 1979, том 128, номер 1, ст. 135–160
 62. С. Е. Степанов, И. А. Гордеева. Геометрия многообразий Римана-Картана. Вестник КемГУ № 3/1 2011 Риманова геометрия. Ст.168-181
 63. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб.пособ. Для вузов. В 10 т. Т.2. Теория поля. – 8-е изд., стерео. – М.:ФЗМАТЛИТ, 2003. – 536 ст.
 64. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб.пособ. Для вузов. В 10 т. Ч.1. Статистическая физика. – 5-е изд., стерео. – М.:ФЗМАТЛИТ, 2002. – 616 ст.