ІТЕРАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО НЕОБУМОВЛЕНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ ДЛЯ ПЕВНОЇ КАТЕГОРІЇ В РОЗДРІБНІЙ ТОРГІВЛІ

Р.О. МИРОНЕНКО, С.С. ДРІНЬ

В роботі використано ітераційний підхід для управління базовим товарним асортиментом в умовах невизначеності споживчих уподобань. В ході роботи розглядаються та застосовуються підходи портфельної теорії, задля оптимізації кількості базових SKU(товари базової необхідності). Це допоможе підвищити прибутки та зменшити витрати.

Розглянемо категорію, що складається з товарів $x_i = (x_{1i}, ..., x_{ki})^T$, які описують відсоток від середнього продажу товару за місяць. Припускаємо, що другий момент x_i є скінченним. Вектор середніх значень - μ, а коваріаційна матриця - Σ, за умови, що $rank(\Sigma) = r \geq k$, тобто Σ також може бути сингулярною матрицею. Вектор ваг портфеля - $w = (w_1, ..., w_k)^T$, де w_j позначає вагу j-го товару. Позначимо 1 - вектор одиниць, а I - одиничну матрицю.

Класична проблема відбору портфеля визначається як

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1, \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = q, \tag{1}$$

де q — очікувана норма прибутку, яка вимагається від портфеля.

Якщо Σ додатньо визначена матриця, то задача оптимізації (1) має однозначний розв'язок, який задається виразом

$$\mathbf{w} = \frac{C - qB}{AC - B^2} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} + \frac{qA - B}{AC - B^2} \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu},$$

де $A = \mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}, B = \mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}, C = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$. Тим не менш, якщо матриця $\mathbf{\Sigma}$ сингулярна, то задача оптимізації (1) має нескінченну кількість розв'язків. Паппас та співавтори (2010) запропонували розв'язок, який, як здається, є єдиним з мінімальною Евклідовою нормою, і отримується заміною оберненої матриці на обернену матрицю Мура-Пенроуза

$$\mathbf{w} = \frac{C - qB}{AC - B^2} \mathbf{\Sigma}^{+} \mathbf{1} + \frac{qA - B}{AC - B^2} \mathbf{\Sigma}^{+} \boldsymbol{\mu},$$

де $A = \mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{+} \mathbf{1}, B = \mathbf{1}^T \mathbf{\Sigma}^{+} \boldsymbol{\mu}, C = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{\Sigma}^{+} \boldsymbol{\mu}$.

Найпоширеніші методи оцінювання μ та Σ

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i, \quad \text{and} \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}\right)\left(\mathbf{x}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}\right)^T.$$

Задача оптимізації без обмежень

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{R}^n} V(\mathbf{u}). \tag{2}$$

У загальному випадку задачі оптимізації (2) ми можемо визначити

$$V(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T\mathbf{d}. \tag{3}$$

Формулювання методу DFPM(The Discrete Functional Particle Method) для $V(u)$ в (3)

$$\ddot{\mathbf{u}} + \eta\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{d} - \mathbf{M}\mathbf{u},$$

або, як система першого порядку

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\eta\mathbf{v} + (\mathbf{d} - \mathbf{M}\mathbf{u}). \end{aligned} \tag{4}$$

Застосовуючи симплектичний метод Ейлера до (4), отримуємо

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{G}\mathbf{w}_k + \mathbf{b}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t^2\mathbf{M} & \Delta t(1-\Delta t\eta)\mathbf{I} \\ \Delta t\mathbf{I} & (1-\Delta t\eta)\mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\Delta t^2\mathbf{d} \\ -\Delta t\mathbf{d} \end{bmatrix}.$$

Література

[1] Levy H., Levy M. *The benefits of differential variance-based constraints in portfolio optimization* // European Journal of Operational Research — 2014. — № 234(2). — С. 372–381.

[2] Pappas D., Kiriakopoulos K., Kaimakamis G. *Optimal portfolio selection with singular covariance matrix* // International Mathematical Forum — 2010.

[3] Adcock C.J. *Asset pricing and portfolio selection based on the multivariate extended skew-student-t distribution* // Annals of Operation Research — 2010. — № 176. — С. 221–234.

[4] Bodnar T., Mazur S., Podgorski K. *A test for the global minimum variance portfolio for small sample and singular covariance* // AStA Advances in Statistical Analysis — 2017b. — № 101. — С. 253–265.

[5] Kress R. *Linear integral equations.* — Berlin: Springer, 1999.

[6] Chincarini L.B., Kim D. *Quantitative equity portfolio management: An active approach to portfolio construction and management.* — New York: McGraw-Hill, 2006.

Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна
Email address: `r.myronenko@ukma.edu.ua`

Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна
Email address: `svitlana.drin@ukma.edu.ua`