Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики

Курсова робота на тему:

ЧИСЛО ФОРСУВАННЯ В НУЛЬ ДЛЯ ДЕЯКИХ РОДИН ГРАФІВ

Керівник курсової роботи
проф. ___*Олійник Б. В.*_____
(прізвище та ініціали)

____
(підпис)
"____" __________ 2020 р.

Виконала студентка
напряму підготовки 124
«Системний аналіз»
Матвеєва Марія Максимівна
(прізвище та ініціали)
"____" __________ 2020 р.

Київ 2020

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедри математики,
проф. Олійник Б. В.

____
(підпис)
„____” _______________2020 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу

студентці *Матвеєвій М. М.* факультету *інформатики* *1-го* курсу
ТЕМА *«Число форсування в нуль для деяких родин графів»*
Вихідні дані:

- Fallat Shaun M. and Hogben Leslie, The minimum rank of symmetric matrices described by a graph: A survey, Linear Algebra and its Applications 426, ELSEVIER, 2007.
- Row Darren D., A technique for computing the zero forcing number of a graph with a cut-vertex, Linear Algebra and its Applications 436, ELSEVIER, 2012.
- Eroh, L., Kang, C.X. and Yi, E, A comparison between the metric dimension and zero forcing number of line graphs, Acta. Math. Sin.-English Ser. 33, 2017.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання
Вступ
1 Основні визначення
2 Число форсування в нуль для дерев
3 Число форсування в нуль для циклів
4 Число форсування в нуль для уніциклічних графів
5 Зв’язок між числом форсування в нуль та сильною метричною розмірністю
Висновки
Список літератури

Дата видачі „___” _________ 2020 р. Керівник ______________________
(підпис)

Завдання отримала _______________
(підпис)

Тема: ***«Число форсування в нуль деяких родин графів»***

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	02.11.2019	
2.	Огляд наукової літератури за темою роботи.	15.11.2019	
3.	Формулювання теорем для доведення.	10.01.2020	
4.	Доведення теорем.	01.03.2020	
5.	Наведення прикладів та ілюстрацій.	30.03.2020	
6.	Перевірка доведень та узагальнення тверджень.	15.04.2020	
7.	Написання пояснювальної роботи.	01.05.2020	
8.	Створення слайдів для доповіді та написання доповіді.	05.05.2020	
9.	Остаточне оформлення пояснювальної роботи та слайдів.	10.05.2020	
10.	Захист курсової роботи.	18.05.2020	

Студент ________***Матвеєва М. М.***_____________

Керівник _______***Олійник Б. В.***_______________

“______”______________2020 р.

Зміст

Анотація

Курсова робота присвячена дослідженню числа форсування в нуль графів. Вона складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаної літератури. У вступі розповідається про історію, актуальність досліджень та застосування числа форсування в нуль графів. У першому розділі вводяться означення графу, метрики, правила зміни кольору, числа форсування в нуль та сильної метричної розмірності. У другому розділі формулюються та доводяться наступні теореми: про обчислення числа форсування в нуль дерева, циклу та уніциклічного графа, рівність сильної метричної розмірності та числа форсування в нуль дерева, правило побудови множини форсувань для простих циклів та уніциклічних графів. У висновках підбивається підсумок проведеного дослідження. У списку використаної літератури наводяться джерела, які були використані під час дослідження.

Ключові слова: правило зміни кольору, число форсування в нуль, сильний метричний базис, дерева, цикли, уніциклічні графи.

Вступ

Число форсування в нуль — одна з характеристик графа, що пов'язана з його метричньою розмірністю та задачею мінімального рангу. Числом форсування в нуль називається мінімальна кількість чорних вершин графа (апріорі вершини вважаються білими), необхідних аби перетворити всі інші вершини графа на чорні із застосування правила "заміни кольору": біла вершина стає чорною, якщо вона є єдиним білим сусідом деякої чорної вершини. У своїй роботі Ерох, Канг та інші [1] порівнювали метричну розмірність та число форсування в нуль для шляхів, повних графів та циклів. А Фалат та Хогбег [2] використовували число форсування в нуль для дослідження мінімального рангу симетричних матриць та мінімального числа покриттів шляхами.

Метою даної роботи є розглянути поняття числа форсування в нуль графів та вивести формули обчислення числа форсування в нуль дерев, простих циклів та уніциклічних графів.

Робота складається з 2 розділів. У першому розділі наводяться необхідні означення та теореми для подальшого дослідження графів та їх числа форсування в нуль. Другий розділ складається з трьох частин та присвяченний аналізу числа форсування в нуль та множини форсувань для дерев, циклів та для уніциклічних графів.

Розділ 1

Необхідні визначення

На початку пригадаємо основні означення.

Означення 1.1. *[3] Загальним неорієнтованим графом називають $G = (V, E, L, \delta_E, \delta_L)$, де V — множина вершин, E — множина ребер, L — множина петель,*

$$(\delta_E : \ E \to C_V^2), \quad (\delta_L : \ L \to V),$$

де символом C_V^2 позначено множину всіх двохелементних підмножин множини V.

У роботі ми будем досліджувати метричну розмірність простих графів, тому будемо використовувати таке означення.

Означення 1.2. *[3] Простим неорієнтовним графом називається $G = (V, E, \delta_E)$, де V — множина вершин, E — множина ребер, $(\delta_E : \ E \to C_V^2)$.*

Означення 1.3. *Зв'язний граф без циклів називається деревом.*

Означення 1.4. *Зв'язний граф, що має лише один цикл, називається уніциклічним.*

Довільний граф G можна розглядати як метричний простір, визначений на множині вершин $V(G)$ з метрикою d_G.

Означення 1.5. *Метрика d_G між двома довільними вершинами u та v графа G визначається наступним чином: якщо $u = v$, то $d_G(u, v) = 0$, інакше $d_G(u, v)$ дорівнює довжині найкоротшого шляху між ними.*

Означення 1.6. *[4] Вершина $w \in V$ сильно розділяє дві вершини $u, v \in V$, якщо виконуються наступні рівності:*

$$d_G(w,u) = d_G(w,v) + d_G(v,u) \quad \text{або} \quad d_G(w,v) = d_G(w,u) + d_G(u,v).$$

Множина $S \subset V$ називається сильним метричним генератором для графа G, якщо будь-які дві вершини G сильно розділяються деяким елементом з S. Сильний метричний генератор найменшої потужності називається сильним метричним базисом, а його потужність — сильною метричною розмірністю G.

Сильну метричну розмірність графа G позначатимемо $dim_s G$.

Означення 1.7. *[1] Нехай кожна вершина графа G розмальована в деякий колір – чорний або білий, множина S позначатиме початкову множину чорних вершин. Правило заміни кольору перетворює вершину u_2 з білої на чорну, якщо u_2 єдина біла суміжна вершина чорної вершини u_1.*

В такому випадку казатимемо, що u_1 форсує u_2, та позначатимемо це $u_1 \to u_2$.

Означення 1.8. *[1] Множина S називається множиною форсування в нуль графа G, якщо всі вершини графа G перетворяться на чорні за скінченну кількість кроків із застосуванням правила заміни кольору. Число форсування в нуль графа G — це множина S найменшої потужності.*

Позначатимемо число форсування в нуль графа G $Z(G)$.

Розділ 2

Число форсування в нуль для деяких родин графів

У наступному розділі ми розглянемо число форсування в нуль та його зв'язок з сильною метричною розмірністю для дерев, простих циклів та уніциклічних графів.

2.1 Число форсування в нуль для дерев

Внутрішньою вершиною називатимемо вершину, степінь якої більший або рівний трьом. Кажуть, внутрішня вершина v близька до листка l, якщо не існує іншої внутрішньої вершини, що знаходиться на шляху між v та l. Позначимо символом n_v кількість листків, до котрих внутрішня вершина v є близькою.

Теорема 2.1.1. *Нехай T — дерево. Тоді*

$$Z(G) = \sum_{v \in V(T)} n_v - 1.$$

Доведення. За означенням (1.7) біла вершина $u \in V$ перетворюється на чорну, якщо вона є єдиною білою суміжною вершиною чорної вершини w.

Нехай S — множина форсувань T і складається з $\sum_{v \in V(T)} n_v - 1$ вершин. Для того, щоб шлях від листків до близької до них внутрішньої вершини був розфарбований у чорний колір, достатньо, щоб всі близькі до неї листки були чорними. Застосуємо дане правило для розфарбування всіх внутрішніх вершин T, близькі до яких листки належать S, тобто чорні. Всі інші білі

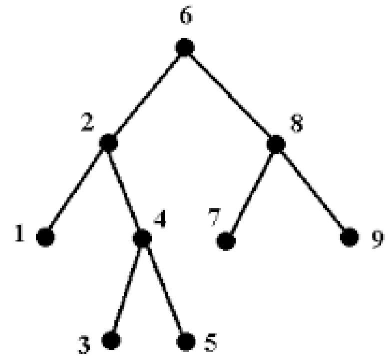


Рис. 2.1: Дерево T

вершини також розфарбовуються у чорний, оскільки існуватиме шлях до них, що повністю розфарбований у чорний колір.

Нехай $Z(T) < \sum_{v \in V(T)} n_v - 1$. Тоді існуватимуть вершини, до яких не існуватиме шляху, повністю розфарбованого у чорний колір. А отже, вони не можуть бути розфарбовані у чорний. Отже,

$$Z(G) = \sum_{v \in V(T)} n_v - 1.$$

□

Для форулювання наслідку нам потрібна наступна теорема, доведена в статті [5].

Теорема 2.1.2. *[5] Нехай T — дерево. Тоді*

$$dim_s T = \sum_{v \in V(T)} n_v - 1.$$

Наслідок 2.1.1. *Нехай T — дерево. Тоді $dim_s T = Z(T)$.*

Доведення. Доведення випливає з формул для обчислення сильної метричної розмірності та числом форсування в нуль дерева. □

2.2 Число форсування в нуль для циклів

Теорема 2.2.1. *Нехай G — граф, що є простим циклом, причому $|V(G)| = n$. Тоді*

$$Z(G) = 2.$$

Доведення. Достатність. Початково додамо до множини S одну вершину $v \in G$. Тоді для того, щоб суміжна до v вершина w була розфарбована у чорний колір, достатньо, щоб інша суміжна вершина $v, u \in G$, також була чорною. Отже, додамо до S ще одну вершину u. Тепер вершина w є єдиною суміжною білою вершиною v. Розфарбовуючи інші вершини G по колу, кожна біла вершина буде єдиною суміжною білою вершиною попередньої вже розфарбованою у чорний колір вершини.

Необхідність. Нехай лише одна вершина $v \in G$ належить множині S. Тоді обидві суміжні до v вершини будуть білими, а отже, жодна з них не може бути розфарбованою у чорний колір. Отже,

$$Z(G) = 2.$$

□

Наслідок 2.2.1. *Множина вершин S простого циклу буде його множиною форсування в нуль тоді і тільки тоді, коли S складається з двох суміжних вершин.*

Доведення. З доведення теореми випливає, що для розфарбування простого циклу у чорний колір необхідно і достатньо, щоб його множина форсувань складалася з двох суміжних вершин. □

2.3 Число форсування в нуль для уніциклічних графів

Нехай маємо граф G з множиною вершин V. Тоді внутрішню вершину, що лежить поза циклом називатимемо "гіллястою вершиною".

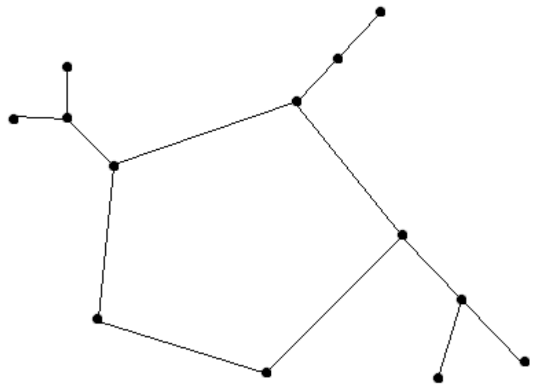
Теорема 2.3.1. *Нехай G — уніциклічний граф, причому кількість вершин його циклу дорівнює n. Позначимо внутрішні вершини G, які лежать у циклі, як v_i, їх кількість — b, а кількість листків близьких до v_i — l_{v_i}. Тоді виконуються такі твердження:*

1. *якщо $b \geq 2$, і дві з них є суміжні, то*

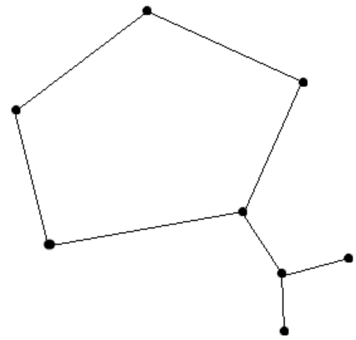
$$Z(G) = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i}.$$

2. якщо $b \geq 2$, але жодні дві з них не є суміжними, або якщо $b = 1$, то

$$Z(G) = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} + 1.$$



(а) Для випадку 1.



(б) Для випадку 2.

Рис. 2.2: Уніциклічний граф G

Доведення. Розглянемо перший випадок. Для того, щоб гіллясті вершини були розфарбовані у чорний колір, необхідно і достатньо, щоб листки, що близькі до них, були чорними. Тепер розфарбуємо внутрішню вершину $v_i \in G$, що належить циклу. Шлях до неї розфарбований у чорний колір, а отже можемо розфарбувати її у чорний колір. Дану процедуру застосуємо для всіх b внутрішніх вершин графа G. Отже,

$$Z(G) \geq \sum_{i=1}^{b} l_{v_i}.$$

Але оскільки дві внутрішні вершини є суміжними, то за теоремою (2.2) це є необхідною і достатньою умовою для того, всі інші вершини циклу графа G були перефарбовані в чорний колір. Отже,

$$Z(G) = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i}.$$

Розглянемо другий випадок. З доведення попереднього пункту випливає, що

$$Z(G) \geq \sum_{i=1}^{b} l_{v_i}.$$

А оскільки за умовою теореми (2.2) для того, щоб вершини циклу графа G були розфарбовані у чорний, необхідно і достатньо, щоб довільні дві суміжні вершини були чорними, додамо до S довільну вершину $w \in G$, що є суміжною до деякої з b внутрішніх вершин циклу. Отже,

$$Z(G) = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} + 1.$$

$\square$

Висновки

Курсову роботу було присвячено дослідженню числа форсування в нуль деяких родин графів.

В першому розділі роботи були проаналізовані базові теоретичні питання дослідження — введені необхідні визначення, поняття, такі як метрика на графі, число форсування в нуль, правило заміни кольору, сильна метрична розмірність тощо.

У другому розділі було досліджено число форсування в нуль деяких родин графів, а саме — дерев, циклів та уніциклічних графів. Було знайдено формулу для обчислення числа форсування в нуль дерев. Доведено, що число форсування в нуль дорівнює сильній метричній розмірності дерева. Знайдено формулу для обчислення числа форсування в нуль графів, що є простими циклами. За допомогою цих формул повністю охарактеризовано число форсування в нуль та описано множину форсувань для уніциклічних графів.

Проведене дослідження дозволило розширити знання про характеристики графів та їх зв'язок між собою, які можуть бути використаними у наступних дослідженнях.

Список літератури

[1] Eroh Linda, Kang Cong X. and Yi Eunjeong, *A comparison between the Metric Dimension and Zero Forcing Number of Line Graphs*, Math. Sin.-English Ser. 33, 731–747, 2017.

[2] Fallat Shaun M. and Hogben Leslie, *The minimum rank of symmetric matrices described by a graph: A survey*, Linear Algebra and its Applications 426, ELSEVIER, 2007.

[3] Боднарчук Ю. В., Олійник Б. В., *Основи дискретної математики: навч. посіб.*, К.: Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», ISBN: 978-966-518-484-3.

[4] Kuziak Dorota, Yero Ismael G. and Rodriguez-Velayquez Juan A., *On the strong metric dimension of the strong products of graphs*, 2015.

[5] Матвеєва М. М., *Сильна метрична розмірність уніциклічних графів*, Могилянський математичний журнал, 2018, 25-30.