

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

Курсова робота на тему:
Медіанні графи та їхні властивості

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(*прізвище та ініціали*)

(*підпис*)
“ _____ ” _____ 2021 р.

Виконала студентка
3-го року навчання спеціальності
113 “Прикладна математика”
Кролевець Марія Сергіївна
(*ПІБ*)

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА
АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедри математики,
проф. д,ф-м.н.
_____ Б.В. Олійник
(підпис)
“_____” _____ 2021 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу
студентці 3-го курсу факультету інформатики
Кролевець Марії Сергіївні

Тема: Медіанні графи та їхні властивості.

Вихідні дані: Досліджено властивості медіанних графів.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання

Анотація

Вступ

1 Основні означення та попередні результати

1.1 Означення

1.2 Попередні результати

2 Основні результати

2.1 Загальні властивості медіанних та модулярних графів

2.2 Множини спеціальних типів у медіанних графах

2.3 Відображення між графами

Висновки

Література

Дата видачі “_____” _____ 2021 р. Керівник _____

(підпис)

Завдання отримав _____

(підпис)

Тема: Медіанні графи та їхні властивості.

Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	11.09.2020	
2.	Ознайомлення з темою курсової.	01.10.2020	
3.	Розробка плану та структури роботи.	15.10.2020	
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень теорії графів.	15.11.2020	
5.	Дослідження основних властивостей медіанних графів	01.02.2021	
7.	Робота над текстовим оформленням результатів.	01.04.2021	
8.	Попередній аналіз курсової. Виправлення помилок.	01.05.2021	
9.	Захист курсової роботи.	20.05.2021	

Зміст

Анотація	5
Вступ	6
1 Основні означення та попередні результати	7
1.1 Означення	7
1.2 Попередні результати	9
1.2.1 Множини спеціальних типів у зв'язних графах	11
2 Основні результати	14
2.1 Загальні властивості медіанних та модулярних графів	14
2.2 Множини спеціальних типів у медіанних графах	18
2.2.1 Характеризація в термінах властивості Хеллі	26
2.2.2 Характеризація в термінах чебишовських множин . .	29
2.3 Відображення між графами	32
Висновки	38
Література	39

Анотація

У графі G для довільної трійки $x, y, z \in V(G)$ покладемо $M(x, y, z) := [x, y] \cap [x, z] \cap [y, z]$. Граф G називається *медіанним*, якщо для довільної трійки вершин $x, y, z \in V(G)$ виконано $|M(x, y, z)| = 1$. Єдина вершина множини $M(x, y, z)$ називається *медіаною* трійки x, y, z і позначається $t(x, y, z)$. Мета роботи полягає в дослідженні медіанних графів та їхніх властивостей, а також властивостей різних типів множин та відображень в медіанних графах.

Ключові слова: медіанний граф, медіана, модулярний граф, опукла множина, чебишовська множина, множина з воротами, півпростір, властивість Хеллі.

Вступ

Дерева та гіперкуби – два широковідомі класи графів, які, на перший погляд, здаються зовсім різними. Тим не менш, як буде показано згодом, вони мають важливу спільну властивість: для довільної трійки вершин u, v, w існує єдина вершина m , що належить найкоротшим шляхам між кожною парою з трійки обраних вершин. Відповідна вершина m називається *медіаною* трійки і позначається $m(u, v, w)$. Графи, що визначаються цією властивістю, називаються *медіанними*.

Медіанні граfi є добре дослідженим математичним об'єктом. Перші публікації на цю тему почали з'являтися вже в другій половині ХХ ст. Поняття медіанного графа було незалежно введено Аванном [1] (в його роботі, проте, було використано термін "unique ternary distance graph") та Небеським [11], які вивчали зв'язок медіанних графів з певними алгебраїчними структурами, а також Мюлдером та Шрайвером [8], які дослідити зв'язок медіанних графів з гіперграфами Хеллі. Першою статтею, основною темою якої стали саме медіанні граfi та їхні властивості, була [7]. У цій статті Мюлдер довів Expansion Theorem: граф є медіанним тоді і лише тоді, коли він може бути отриманий з однієї вершини послідовністю опуклих роздуттів.

Медіанні граfi мають застосування в таких різноманітних сферах, якот: теорія еволюції, хімія, історія літератури, теорія локації, теорія прийняття рішень і комп'ютерні науки (див. [10]).

Мета роботи полягає в дослідженні медіанних графів та їхніх властивостей. Зокрема, в роботі буде надано два критерії медіанності графа: сукупність усіх його метричних відрізків має задовольняти властивості Хеллі, а також кожен його метричний відрізок має бути чебишовською множиною, – окрім того, буде отримано повне доведення результату про опуклість півпростору в медіанному графі. Також буде досліджено різні типи множин, а саме: зв'язну множину, опуклу множину, множину з воротами та чебишовську множину – та відображення, а саме: гомоморфізм, метричне, лінійне, неперервне та монотонне відображення – і їхні властивості в довільних та медіанних графах.

1 Основні означення та попередні результати

1.1 Означення

Означення 1.1. *Неорієнтований граф* – пара $G = (V, E)$, де

$$V = V(G) \text{ – множина вершин,}$$

$$E = E(G) \subset V^{(2)} = \{\{a, b\} \mid a, b \in V\} \text{ – множина ребер.}$$

Надалі ребра неорієнтованого графа G позначатимемо $ab = \{a, b\} \in E(G)$, де $a, b \in V(G)$.

Означення 1.2. *Зв'язний граф* – граф, між кожною парою вершин якого існує шлях, що їх сполучає.

Означення 1.3. *Скінченний граф* – граф, множини вершин і ребер якого скінченні.

Надалі в роботі усі графи вважаються неорієнтованими, зв'язними та скінченними, якщо явно не вказано протилежне.

Означення 1.4. *Шлях (маршрут)* між парою вершин $x, y \in V(G)$ – послідовність вершин $v_0, v_1, \dots, v_n$, де $x = v_0$ – *початок шляху*, $y = v_n$ – *кінець шляху*, $\forall i = \overline{0, n-1} : v_i v_{i+1} \in E(G)$.

Означення 1.5. *Ланцюг* – шлях, у якому всі вершини попарно різні.

Означення 1.6. *Цикл* – шлях, у якому початок і кінець збігаються.

Означення 1.7. *Простий цикл* – ланцюг, у якому початок і кінець збігаються.

Означення 1.8. *Дерево* – зв'язний граф без циклів.

Означення 1.9. *Повний граф K_n* – граф, у якому кожні дві вершини з'єднані ребром, тобто $E = V^{(2)}$.

Означення 1.10. *Двочастковий граф* – граф, множину вершин якого можна розбити на дві підмножини (*доли*) так, щоб жодні дві вершини з однієї підмножини не були суміжними, тобто

$$V = V_1 \sqcup V_2, \quad E \subset \{\{a, b\} \mid a \in V_1, b \in V_2\}.$$

Означення 1.11. Повний двочастковий граф $K_{m,n}$ – двочатковий граф, у якому кожна вершина з однієї долі є суміжною з кожною вершиною з іншої долі, тобто $E = \{\{a, b\} \mid a \in V_1, b \in V_2\}$.

Означення 1.12. Гіперкуб Q_n – граф, кожній вершині якого поставлено у відповідність унікальний 0,1-вектор довжини n , і в якому кожні дві вершини з'єднані ребром, якщо як 0,1-вектори вони відрізняються рівно на одну координату.

Означення 1.13. Підграф H графа G ($H \subset G$) – граф H , у якому $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$.

Означення 1.14. Нехай $S \subset V(G)$. Породжений підграф $G[S]$ – підграф графа G , у якому кожні дві вершини $u, v \in S$, суміжні в G , суміжні і в S . Тобто $E(G[S]) = \{uv \mid u, v \in S, uv \in E(G)\}$.

Означення 1.15. Метричний простір – пара (X, d) , де

X – довільна множина,

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ – відображення, що задовольняє властивостям:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Означення 1.16. Нехай G – зв'язний граф. Відстань $d(u, v)$ між вершинами $u, v \in V(G)$ – кількість ребер на найкоротшому шляху між ними.

Зауваження 1.17. Функція d є метрикою на множині вершин графа G . Отже, зв'язний граф природнім чином породжує метричний простір.

Означення 1.18. Метричний відрізок між парою $u, v \in V(G)$ вершин зв'язного графа G – множина

$$[u, v] := \{x \in V(G) \mid d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)\}.$$

Означення 1.19. Нехай (X, d) – метричний простір. Метричною проекцією на множину $A \subset X$ називається відображення $\text{pr}_A : X \rightarrow 2^A$, визначене як

$$\text{pr}_A(x) := \{y \in A \mid d(x, y) = d(x, A) := \inf_{z \in A} d(x, z)\}.$$

Означення 1.20. Окіл вершини u графа G – множина $N(u)$ суміжних з нею вершин, тобто

$$N(u) := \{x \in V(G) \mid xu \in E(G)\}.$$

1.2 Попередні результати

Твердження 1.21. *Граф є двочастковим тоді й тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.*

Доведення.

—→ Нехай G – двочастковий граф, який містить цикл непарної довжини. Позначимо цей цикл

$$v_1 - v_2 - \dots - v_{2n+1} - v_1, n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки граф G двочастковий, то, за означенням,

$$V = V_1 \sqcup V_2, E \subset \{\{a, b\} \mid a \in V_1, b \in V_2\}.$$

Розглянемо вершину $v_1 \in V$. Не втрачаючи загальності, припустимо, що v_1 належить класу V_1 . Тоді матимемо суперечність:

$$v_1 \in V_1 \Rightarrow v_2 \in V_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_{2n+1} \in V_1 \Rightarrow v_1 \in V_2.$$

Отже, двочастковий граф не може містити циклів непарної довжини.

←— Зафіксуємо вершину $x \in V$. Покладемо

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V \mid d(x, v) - \text{непарна}\}; \\ V_2 &= \{v \in V \mid d(x, v) - \text{парна}\}. \end{aligned}$$

Покажемо, що між вершинами з одного класу не існує ребер. Нехай це не так. Не втрачаючи загальності, припустимо, що

$$\exists v_1, v_2 \in V_1 : v_1 v_2 \in E.$$

Нехай P_1 – найкоротший (v_1, x) -шлях, P_2 – найкоротший (v_2, x) -шлях. Розглянемо замкнений шлях $P = P_1 \cup P_2 \cup \{v_1, v_2\}$. Тоді його довжина

$$d(P) = d(v_1, x) + d(v_2, x) + d(v_1, v_2) - \text{непарна}.$$

Тоді P містить цикл непарної довжини. Отже, $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ і будь-які дві вершини з одного класу не є суміжними, тобто граф G є двочастковим. $\square$

Наслідок 1.22. *Кожне дерево є двочастковим графом.*

Доведення. За означенням, деревом є зв'язний граф, який не містить в собі циклів, тому твердження наслідку одразу випливає із Твердження 1.21. $\square$

Лема 1.23. В довільному графі G для будь-якої пари вершин $a, b \in V(G)$ виконано: якщо $x \in [a, b]$, то $[a, x] \subset [a, b]$.

Доведення. Розглянемо довільну вершину $y \in [a, x]$. Матимемо:

$$d(a, y) + d(y, b) = d(a, x) - d(x, y) + d(y, b).$$

Окрім того, за нерівністю трикутника:

$$d(y, b) \leq d(y, x) + d(x, b).$$

Отже,

$$d(a, y) + d(y, b) \leq d(a, x) - d(x, y) + d(x, y) + d(x, b) = d(a, b).$$

З іншого боку, за нерівністю трикутника:

$$d(a, y) + d(y, b) \geq d(a, b).$$

Остаточно:

$$d(a, y) + d(y, b) = d(a, b) \Rightarrow y \in [a, b].$$

□

Означення 1.24. Цикл C в графі G називається *ізометричним*, якщо

$$\forall x, y \in C : d(x, y)_C = d(x, y)_G.$$

Твердження 1.25. Найменший цикл графа є ізометричним.

Доведення. Нехай C_{min} – найменший цикл графа G , а V – множина його вершин. Матимемо:

$$\forall v_1, v_2 \in V : d(v_1, v_2)_{C_{min}} \leq \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor.$$

Припустимо, що C_{min} не ізометричний, тобто

$$\exists v_1, v_2 \in V : d(v_1, v_2)_G \leq d(v_1, v_2)_{C_{min}} - 1 \leq \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1.$$

Покладемо $P_{C_{min}}$ – найкоротший шлях між v_1 та v_2 , що належить C_{min} , а $P_G \subset V(G)$ – відповідний коротший шлях між v_1 та v_2 . Розглянемо замкнений шлях $P = P_{C_{min}} \cup P_G$. Матимемо:

$$d(P) = d(v_1, v_2)_{C_{min}} + d(v_1, v_2)_G \leq \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor + \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1 = 2\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1 < |V|.$$

Отже, P містить цикл, довжина якого менша за $|V|$, що суперечить тому, що C_{min} – найменший цикл графа. □

Твердження 1.26. *Найменший цикл графа непарної довжини є ізометричним.*

Доведення. Нехай G_{min} – найменший цикл графа G непарної довжини, а V – множина його вершин. Припустимо, що він не є ізометричним, тобто

$$\exists v_1, v_2 \in G_{min} : d(v_1, v_2)_G \leq d(v_1, v_2)_{G_{min}} - 1.$$

Покладемо $P_{C_{min}}$ – найкоротший шлях між v_1 та v_2 , що належить C_{min} , а $P_G \subset V(G)$ – відповідний коротший шлях між v_1 та v_2 . Розглянемо замкнений шлях $P = P_{C_{min}} \cup P_G$. Матимемо 2 випадки:

1. $d(P)$ – непарна.

$$d(P) = d(v_1, v_2)_{G_{min}} + d(v_1, v_2)_G \leq \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor + \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1 = 2\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1 < |V|.$$

2. $d(P)$ – парна.

Розглянемо замкнений шлях $P^* = P_G \cup G_{min} \setminus P_{G_{min}}$. Тоді

$$\begin{aligned} d(P^*) &= d(v_1, v_2)_G + |V| - d(v_1, v_2)_{G_{min}} \leq \\ &\leq d(v_1, v_2)_{G_{min}} - 1 + |V| - d(v_1, v_2)_{G_{min}} = |V| - 1 < |V|. \end{aligned}$$

Окрім того, $d(P^*)$ буде непарною.

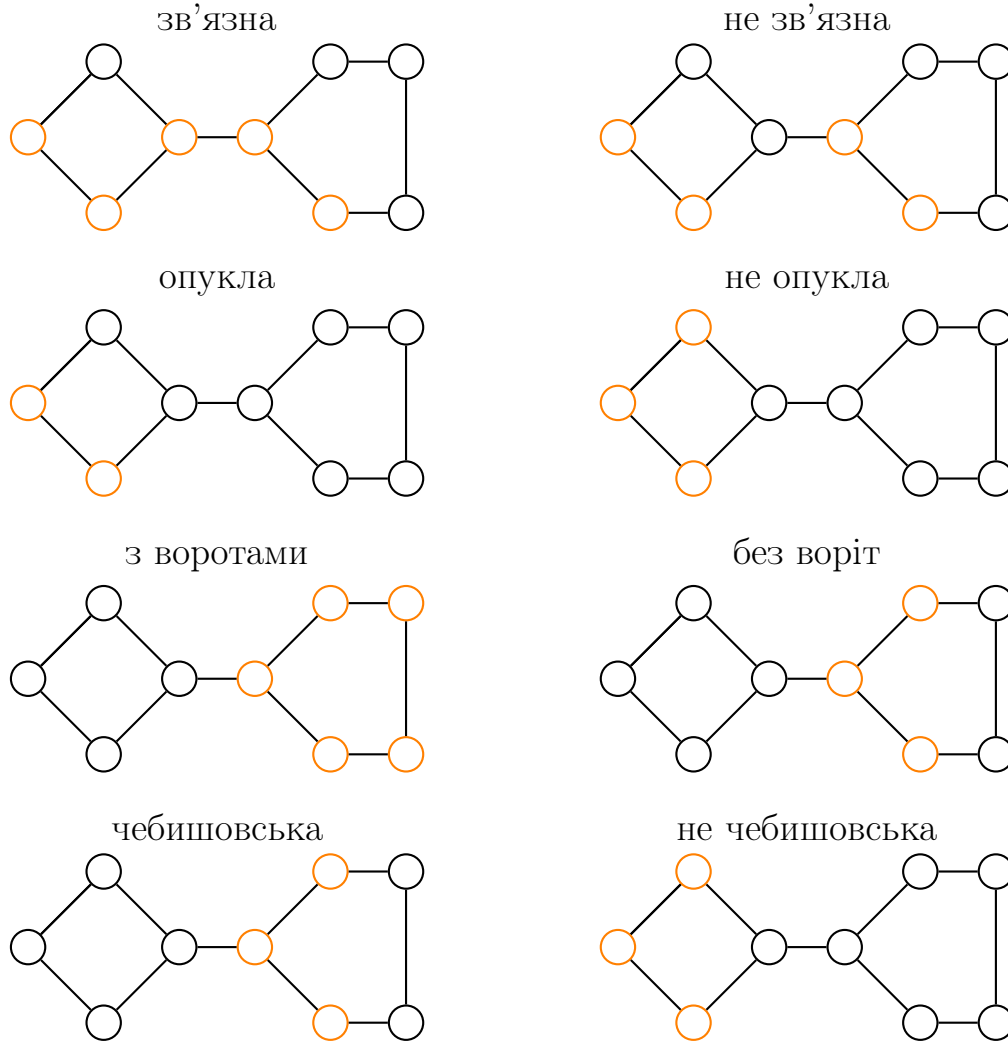
Отже, в обох випадках відповідні розглянуті шляхи міститимуть цикли непарної довжини, довжина яких менша $d(G_{min})$, що суперечить тому, що G_{min} – найменший цикл графа непарної довжини. $\square$

1.2.1 Множини спеціальних типів у зв'язних графах

Означення 1.27. Множина $A \subset V(G)$ називається

- *зв'язною*, якщо породжений нею підграф $G[A]$ – зв'язний.
- *опуклою*, якщо $\forall u, v \in A : [u, v] \subset A$.
- *множиною з воротами*, якщо $\forall x \in V(G) \exists g \in A, \forall z \in A : g \in [x, z]$.
Вершина g називається *воротами* вершини x у множину A .
- *чебишовською*, якщо $\forall v \in V(G) : |\text{pr}_A(v)| = 1$.

Приклад 1.28. Розглянемо різні типи множин в графі (помаранчевим).



Твердження 1.29. Нехай G – деякий граф, а $A \subset V(G)$ – множина з воротами. Тоді для кожної вершини $x \in V(G)$ існують єдині ворота в A .

Доведення. Нехай існує вершина, для якої ворота не єдині. Тобто

$$\exists x \in V(G) \exists y_1, y_2 \in A, \forall z \in A : y_1 \in [x, z], y_2 \in [x, z].$$

Тоді

$$\begin{aligned} y_1 \in A &\Rightarrow y_2 \in [x, y_1] \Rightarrow [x, y_2] \subset [x, y_1]; \\ y_2 \in A &\Rightarrow y_1 \in [x, y_2] \Rightarrow [x, y_1] \subset [x, y_2]. \end{aligned}$$

Отже,

$$[x, y_2] = [x, y_1] \Rightarrow y_1 = y_2.$$

□

Наслідок 1.30. *Кожна множина з воротами є чебишовською.*

Доведення. Нехай $M \subset V(G)$ – множина із воротами в графі G . Зафіксуємо вершину $x \in V(G)$ та її ворота $g \in M$ в M . Тоді

$$\forall z \in M \setminus \{g\} : g \in [x, z]_G \Rightarrow d(x, z) = d(x, g) + d(g, z) > d(x, g).$$

Отже, $g = \text{rg}_M(x)$ і M чебишовська множина. □

Твердження 1.31. *Кожна множина з воротами є опуклою.*

Доведення. Розглянемо довільну множину з воротами A . Припустимо, що вона не опукла. Тобто

$$\exists x, y \in A, \exists z \in [x, y] : z \notin A.$$

Оскільки A – множина з воротами,

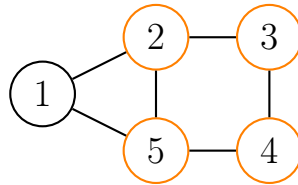
$$\exists g \in A, \forall w \in A : g \in [z, w] \Rightarrow g \in [z, x], g \in [z, y] \Rightarrow g \in [x, z] \cap [z, y].$$

З іншого боку,

$$z \in [x, y] \Rightarrow [x, z] \cap [z, y] = \{z\} \notin A.$$

Отже, маємо суперечність. □

Приклад 1.32. *Опукла множина, що не є множиною з воротами.*
Розглянемо граф G :



Очевидно, множина $A = \{2, 3, 4, 5\}$ – опукла.

Нехай g – ворота вершини 1 в множину A .

$$[1, 3] = \{1, 2, 3\} \Rightarrow g \in \{2, 3\};$$

$$[1, 4] = \{1, 5, 4\} \Rightarrow g \in \{5, 4\};$$

$$g \text{ – ворота} \Rightarrow g \in \{2, 3\} \cap \{5, 4\} = \emptyset.$$

Отже, A не є множиною з воротами.

2 Основні результати

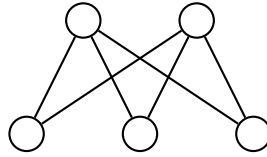
Означення 2.1. У графі G для довільної трійки $x, y, z \in V$ покладемо

$$M(x, y, z) := [x, y] \cap [x, z] \cap [y, z].$$

Означення 2.2. Граф G називається *модулярним*, якщо для довільної трійки вершин $x, y, z \in V$ виконано $|M(x, y, z)| \geq 1$.

Означення 2.3. Граф G називається *медіанним*, якщо для довільної трійки вершин $x, y, z \in V$ виконано $|M(x, y, z)| = 1$. Єдина вершина множини $M(x, y, z)$ називається *медіаною* трійки x, y, z і позначається $m(x, y, z)$.

Приклад 2.4. $K_{2,3}$ є модулярним, але не є медіанним графом.



2.1 Загальні властивості медіанних та модулярних графів

Твердження 2.5. *Кожен модулярний граф є двочастковим.*

Доведення. Нехай G – модулярний граф, який не є двочастковим. Тоді, за Твердженням 1.21, він містить цикл непарної довжини. Розглянемо найменший з таких циклів. Позначимо його

$$v_1 - v_2 - \dots - v_n - v_1, \quad n - \text{непарне}.$$

Розглянемо вершини $v_1, v_{\frac{n+1}{2}}, v_n$. За умовою, G – модулярний граф, отже,

$$\exists m \in [v_1, v_{\frac{n+1}{2}}] \cap [v_{\frac{n+1}{2}}, v_n] \cap [v_1, v_n].$$

Окрім того,

$$[v_1, v_n] = \{v_1, v_n\} \Rightarrow m \in \{v_1, v_n\}.$$

Отже,

$$\begin{cases} v_1 \in [v_1, v_{\frac{n+1}{2}}] \\ v_1 \in [v_{\frac{n+1}{2}}, v_n] \\ v_n \in [v_1, v_{\frac{n+1}{2}}] \\ v_n \in [v_{\frac{n+1}{2}}, v_n] \end{cases}$$

Що неможливо, оскільки

$$v_1 \notin [v_{\frac{n+1}{2}}, v_n], v_n \notin [v_1, v_{\frac{n+1}{2}}].$$

Оскільки, за Твердженням 1.26, цикл, який ми розглядаємо, ізометричний, для всього графа G справедлива рівність

$$[v_1, v_{\frac{n+1}{2}}] \cap [v_{\frac{n+1}{2}}, v_n] \cap [v_1, v_n] = \emptyset.$$

Що суперечить тому, що G є модулярним графом. $\square$

Наслідок 2.6. *Кожен медіанний граф є двочастковим.*

Твердження 2.7. *Кожне дерево є медіанним графом.*

Доведення. Математична індукція за кількістю вершин.

База ($|V| = 3$):

Твердження очевидне.

Крок:

Нехай твердження справедливе для $|V| \leq n$. Розглянемо дерево D на $n + 1$ вершині. Видаємо одну висячу вершину v_1 . Отримаємо дерево D_{-1} , для якого твердження буде справедливим, тобто

$$\forall u, v, w \in V(D_{-1}) = V(D) \setminus \{v_1\} : |[u, v] \cap [u, w] \cap [v, w]| = 1.$$

Додамо вершину v_1 назад. Тоді, очевидно,

$$\forall u, w, x \in V(D) \setminus \{v_1\} : m_D(u, w, x) = m_{D_{-1}}(u, w, x).$$

Окрім того, оскільки вершина v_1 висяча, вона з'єднана ребром тільки з однією вершиною v_2 , отже,

$$\forall u \in V(D) : [v_1, u] = [v_1, v_2] \cup [v_2, u] = \{v_1\} \cup [v_2, u].$$

Матимемо:

$$\begin{aligned} \forall u, w \in V(D) : & |[v_1, u] \cap [u, w] \cap [w, v_1]| = \\ & = |([v_1, v_2] \cup \{v_1\}) \cap [u, w] \cap ([v_1, v_2] \cup \{v_1\})| = |[u, v_2] \cap [u, w] \cap [w, v_2]| = 1. \end{aligned}$$

Отже, $m(u, w, v_1) = m(u, w, v_2)$ і D – медіанний граф. $\square$

Лема 2.8. Нехай Q_n – гіперкуб, $a = (a_1 \dots a_n), b = (b_1 \dots b_n) \in V(Q_n)$. Покладемо $I = \{i \in \{1 \dots n\} \mid a_i = b_i\}$. Тоді

$$[a, b] = \{x = (x_1 \dots x_n) \in V(Q_n) \mid \forall i \in I : x_i = a_i = b_i\}.$$

Доведення. Оскільки відстань між вершинами в гіперкубі – кількість відмінних координат у їхньому векторному представленні, лема очевидна. $\square$

Твердження 2.9. Гіперкуб Q_n є медіанним графом.

Доведення. Розглянемо $a = (a_1 \dots a_n), b = (b_1 \dots b_n), c = (c_1 \dots c_n) \in V(Q_n)$. Покладемо

$$x_i = \left\lfloor \frac{a_i + b_i + c_i}{2} \right\rfloor.$$

Тоді, за Лемою 2.8, $x = (x_1 \dots x_n) \in M(a, b, c)$. Окрім того, вона буде єдиною такою вершиною. $\square$

Лема 2.10. Якщо модулярний граф G містить цикл, то він містить і цикл довжини 4.

Доведення. Оскільки, за Твердженням 2.5, G двочастковий, він може містити цикли лише парної довжини. Нехай G містить цикли парної довжини $n \neq 4$. Розглянемо найменший з таких циклів. Позначимо його

$$v_1 - v_2 - \dots - v_n - v_1, \quad n - \text{непарне}, \quad n \geq 6.$$

Розглянемо вершини $v_1, v_{\frac{n}{2}}, v_{n-1}$. За умовою, G – модулярний граф, отже,

$$\exists m \in [v_{\frac{n}{2}}, v_{n-1}] \cap [v_{n-1}, v_1] \cap [v_1, v_n].$$

Окрім того,

$$[v_1, v_{n-1}] = \{v_1, v_n, v_{n-1}\} \Rightarrow m \in \{v_1, v_n, v_{n-1}\}.$$

Отже,

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} v_1 \in [v_1, v_{\frac{n}{2}}] \\ v_1 \in [v_{\frac{n}{2}}, v_{n-1}] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} v_{n-1} \in [v_1, v_{\frac{n}{2}}] \\ v_{n-1} \in [v_{\frac{n}{2}}, v_{n-1}] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} v_n \in [v_1, v_{\frac{n}{2}}] \\ v_n \in [v_{\frac{n}{2}}, v_{n-1}] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Що неможливо, оскільки

$$v_1 \notin [v_{\frac{n}{2}}, v_n], v_{n-1} \notin [v_1, v_{\frac{n}{2}}], v_n \notin [v_1, v_{\frac{n}{2}}], v_n \notin [v_{\frac{n}{2}}, v_{n-1}].$$

Оскільки, за Твердженням 1.25, цикл, який ми розглядаємо, ізометричний, для всього графа G справедлива рівність

$$[v_{\frac{n}{2}}, v_{n-1}] \cap [v_{n-1}, v_1] \cap [v_1, v_n] = \emptyset.$$

Що суперечить тому, що G є модулярним графом. $\square$

Наслідок 2.11. *Якщо медіанний граф містить цикл, то він містить і цикл довжини 4.*

Наслідок 2.12. *Будь-який медіанний граф або є деревом, або містить цикл довжини 4.*

Теорема 2.13. *Нехай G – медіанний граф. Для кожної трійки вершин $x, y, z \in V(G)$ виконується $m(x, y, z) \in \{x, y, z\}$ тоді і тільки тоді, коли G є ланцюгом або циклом на 4 вершинах.*

Доведення. За Наслідком 2.12, маємо 2 випадки:

1. G – дерево.

1) G – ланцюг. Очевидно,

$$\forall x, y, z \in V(G) : m(x, y, z) \in \{x, y, z\}.$$

2) Інакше,

$$\exists v \in V(G) : \deg(v) \geq 3.$$

Розглянемо три вершини v_1, v_2, v_3 , що суміжні з v . Матимемо:

$$m(v_1, v_2, v_3) = v \notin \{v_1, v_2, v_3\}.$$

2. G містить цикл довжини 4.

1) G і є циклом довжини 4. Очевидно,

$$\forall x, y, z \in V(G) : m(x, y, z) \in \{x, y, z\}.$$

2) Інакше, аналогічно до пункту 1.2.

Остаточо, твердження теореми виконується лише для графів, які є ланцюгом або циклом довжини 4. $\square$

2.2 Множини спеціальних типів у медіанних графах

Твердження 2.14. *В медіанному графі кожен метричний відрізок є опуклою множиною.*

Доведення. Припустимо, що це не так. Розглянемо медіанний граф G та вершини $u, v \in V(G)$ такі, що $[u, v]$ – не опуклий. Тобто

$$\exists x, y \in [u, v], \exists z \in [x, y] : z \notin [u, v].$$

Нехай x, y – така пара вершин з $[u, v]$ із найменшою відстанню $d(x, y)$. Нехай

$$\exists w \in [x, z] \setminus \{x\} : w \in [u, v].$$

Тоді

$$\begin{aligned} d(w, z) + d(z, y) &= d(x, z) - d(x, w) + d(x, y) - d(x, z) = \\ &= d(x, y) - d(x, w) = d(w, y) \\ &\Rightarrow z \in [w, y]. \end{aligned}$$

Окрім того,

$$d(w, y) \leq d(w, z) + d(z, y) < d(x, z) + d(z, y) = d(x, y).$$

Що суперечить тому, що x, y – така пара вершин з $[u, v]$ із найменшою відстанню $d(x, y)$. Отже,

$$[x, z] \cap [u, v] = \{x\}.$$

Маємо:

$$[u, x] \subset [u, v] \Rightarrow [x, z] \cap [u, x] = \{x\}.$$

Оскільки G – медіанний,

$$|[x, z] \cap [u, x] \cap [u, z]| = |\{x\} \cap [u, z]| = 1 \Rightarrow x \in [u, z].$$

Аналогічно можна довести, що $x \in [v, z]$. Тому

$$m(u, v, z) = x.$$

З іншого боку, те саме виконується і для y . Тобто

$$m(u, v, z) = y.$$

Оскільки G – медіанний, маємо:

$$x = y \Rightarrow [x, y] = \{x\} \in [u, v].$$

Отже, $[u, v]$ – опуклий. □

Теорема 2.15. *В модулярному графі множина вершин є множиною з воротами тоді і тільки тоді, коли вона є опуклою.*

Доведення.

—→ За Твердженням 1.31, довільна множина з воротами є опуклою.

←— Нехай в модулярному графі G існує опукла множина A , яка не є множиною з воротами. Тобто

$$\exists x \in V(G) \forall y \in \text{pr}_A(x), \exists w \in A : y \notin [x, w].$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} y, w \in A &\Rightarrow [y, w] \subset A; \\ y \in \text{pr}_A(x) &\Rightarrow [x, y] \cap A = \{y\}. \end{aligned}$$

Маємо:

$$[y, w] \cap [x, y] = \{y\}.$$

Але, за припущенням,

$$\{y\} \cap [x, w] = \emptyset.$$

Отже,

$$[y, w] \cap [y, x] \cap [w, x] = \emptyset.$$

Що суперечить тому, що граф G модулярний. □

Означення 2.16. Нехай $ab \in E(G)$. *Півпростір* – множина

$$W(a, b) := \{v \in V(G) \mid d(v, a) < d(v, b)\}.$$

Лема 2.17. *В двочастковому графі G для довільного ребра $ab \in E(G)$ виконується $V = W(a, b) \sqcup W(b, a)$.*

Доведення. Розглянемо довільну вершину $v \in W(a, b)$. Тоді

$$d(v, a) < d(v, b) \Rightarrow v \notin W(b, a).$$

Тепер розглянемо $v \notin W(a, b)$. Тоді $d(v, a) \geq d(v, b)$. Припустимо, що $d(v, a) = d(v, b) = k$. Нехай P_1 – найкоротший (v, a) -шлях, P_2 – найкоротший (b, v) -шлях. Розглянемо замкнений шлях

$$P = P_1 \cup \{a, b\} \cup P_2 \Rightarrow d(P) = 2k + 1.$$

Тоді P містить цикл непарної довжини, що суперечить тому, що граф G двочастковий. Отже,

$$d(v, a) > d(v, b) \Rightarrow v \in W(b, a).$$

□

Лема 2.18. Нехай $ab \in E(G)$. Для довільної вершини $v \in W(a, b)$ виконується $[v, a] \subset W(a, b)$.

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} \forall u \in [v, a] : d(v, u) + d(u, a) = d(v, a) < d(v, b) \leq d(v, u) + d(u, b) \Rightarrow \\ \Rightarrow d(u, a) < d(u, b) \Rightarrow u \in W(a, b). \end{aligned}$$

□

Твердження 2.19. В графі G для довільного його ребра $ab \in E(G)$ півпростір $W(a, b)$ – зв’язна множина.

Доведення. Внаслідок Лема 2.18,

$$\forall x, y \in W(a, b) : [x, a] \cup [a, y] \subset W(a, b).$$

Отже, для довільних двох вершин $x, y \in W(a, b)$ існує шлях між ними, що належить $W(a, b)$, тому півпростір $W(a, b)$ – зв’язна множина. □

Твердження 2.20. Нехай G – медіанний граф, $ab \in E(G)$. Для довільної вершини $u \in \partial W(a, b) := \{v \in W(a, b) \mid N(v) \setminus W(a, b) \neq \emptyset\}$, виконується $[u, a] \subset \partial W(a, b)$.

Доведення. Нехай $v \in N(u) \cap W(b, a)$, $w \in [a, u] \subset W(a, b)$. Проведемо математичну індукцію за відстанню $d(u, w)$.

База ($d(u, w) = 1$):

Тоді

$$d(v, w) = 2.$$

Розглянемо

$$m(v, w, b) \in [v, w] \cap [w, b] \cap [b, v] \subset [v, w].$$

Нехай $m = v$. Тоді оскільки

$$\begin{aligned} d(v, b) = d(v, a) - 1 \leq d(u, a) = d(u, b) - 1 \leq d(v, b) \Rightarrow \\ \Rightarrow d(v, b) = d(u, a) = d(w, a) + 1 = d(w, b), \end{aligned}$$

то матимемо суперечність:

$$v \in [w, b] \Rightarrow d(w, b) > d(v, b).$$

Нехай $m = w$, але, за Лемою 2.18,

$$[b, v] \subset W(b, a) \Rightarrow m \in W(b, a) \Rightarrow m \neq w.$$

Отже,

$$[m \in (v, w) \Rightarrow d(w, m) = 1; m \in W(b, a)] \Rightarrow w \in \partial W(a, b).$$

Остаточно,

$$\forall w \in [u, a], d(u, w) = 1 : w \in \partial W(a, b).$$

Крок:

Нехай твердження виконується $\forall w \in [u, a] : d(u, w) = n$. За базою індукції,

$$\forall w^* \in [w, a], d(w, w^*) = 1 : w^* \in \partial W(a, b).$$

Оскільки

$$\{x \in [u, a] \mid d(u, x) = n + 1\} = \bigcup_{w \in [u, a] : d(u, w) = n} \{x \in [w, a] \mid d(w, x) = 1\},$$

твердження доведено. □

Твердження 2.21. *Нехай G – медіанний граф, $ab \in E(G)$. Для довільного ребра $uv \in E(G)$ такого, що $u \in W(a, b)$, $v \in W(b, a)$, виконується $W(a, b) = W(u, v)$.*

Доведення. Математична індукція за відстанню $d(a, u)$.

База ($d(a, u) = 1$):

– $\subset$ – Розглянемо довільну вершину $w \in W(a, b)$. Покладемо

$$d(w, a) = k \Rightarrow d(w, b) = k + 1.$$

Оскільки граф G медіанний,

$$m(a, u, w) \in [a, u] \cap [u, w] \cap [w, a] \subset \{a, u\}.$$

Нехай $m(a, u, w) = u$, тоді

$$u \in [w, a] \Rightarrow d(w, u) = d(w, a) - d(u, a) = k - 1.$$

Матимемо:

$$k = d(w, u) + d(u, v) \geq d(w, v) \geq d(w, b) - d(v, b) = k.$$

Отже,

$$k = d(w, v) = d(w, u) + 1.$$

Нехай тепер $m(a, u, w) = a$, тоді

$$a \in [w, u] \Rightarrow d(w, u) = d(w, a) + d(a, u) = k + 1 = d(w, b).$$

Нехай $v \in [w, u]$, тоді $d(w, v) = k$ і

$$\begin{aligned} d(w, v) + d(v, b) &= k + 1 = d(w, b) \Rightarrow v \in [w, b], \\ d(u, b) &= d(u, a) + d(a, b) = d(u, v) + d(v, b) \Rightarrow v \in [u, b]. \end{aligned}$$

Маємо:

$$m(u, w, b) = v.$$

Тоді матимемо суперечність, оскільки

$$u, w \in W(a, b) \Rightarrow a \in [w, b] \cap [u, b] \Rightarrow m(u, w, b) = a.$$

Отже, $v \notin [w, u]$. Оскільки G – двочастковий, $d(w, v) \neq d(w, u)$, тому

$$d(w, v) = d(w, u) + 1.$$

Остаточно:

$$\forall w \in W(a, b) : d(w, v) = d(w, u) + 1 \Rightarrow w \in W(u, v).$$

– $\supset$ – Оскільки $a \in W(u, v)$, $b \in W(v, u)$, включення в інший бік доводиться аналогічно.

Крок:

Нехай твердження виконується для $d(u, a) = n$ і нехай тепер $d(u, a) = n + 1$. За Твердженням 2.20,

$$[u, a] \subset \partial W(a, b).$$

Тоді розглянемо вершину $x \in [u, a] : d(u, x) = 1$. Нехай $y \in N(x) \cap W(b, a)$. Тоді $d(x, a) = n$ і, за припущенням і базою індукції відповідно,

$$W(a, b) = W(x, y), \quad W(x, y) = W(u, v).$$

Отже, $W(a, b) = W(u, v)$. □

Теорема 2.22. *В медіанному графі G для довільного ребра $ab \in E(G)$ півпростір $W(a, b)$ – опукла множина.*

Доведення. Розглянемо довільне ребро $ab \in E(G)$ і породжений ним півпростір $W(a, b)$. Припустимо, що множина $W(a, b)$ – не опукла. Тоді

$$\exists x, y \in W(a, b), \exists z \in [x, y] : z \notin W(a, b).$$

Нехай x, y – така пара вершин із найменшою відстанню $d(x, y)$. Тоді

$$\exists z \in [x, y] \cap W(b, a) : d(x, z) = 1 \Rightarrow x \in \partial W(a, b).$$

Тоді, за Твердженням 2.21,

$$W(x, z) = W(a, b).$$

Отже, за Лемою 2.18,

$$y \in W(x, z) \Rightarrow [x, y] \subset W(x, z) = W(a, b).$$

□

Теорема 2.23. *В медіанному графі будь-яка опукла множина є перетином півпросторів.*

Доведення. Нехай G – медіанний граф, $A \subset V(G)$ – опукла множина. Позначимо межу множини A :

$$\partial A := \{a \in A \mid N(a) \setminus A \neq \emptyset\}.$$

Розглянемо множину півпросторів:

$$\mathcal{W} = \{W(a, b) \mid a \in \partial A, b \in N(a) \setminus A\}.$$

Покажемо, що

$$A = \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W.$$

– $\subset$ – Розглянемо довільну вершину $u \in A$ і довільні $a \in \partial A, b \in N(a) \setminus A$. Нехай $m = m(u, a, b)$, тоді

$$m \in [a, b] = \{a, b\}.$$

Припустимо, що $m = b$, тоді, оскільки множина A – опукла,

$$b \in [a, u] \subset A,$$

що суперечить тому, що $b \in N(a) \setminus A$, а отже, $m = a$. Тоді матимемо:

$$a \in [u, b] \Rightarrow d(u, a) < d(u, b) \Rightarrow u \in W(a, b).$$

Отже,

$$[\forall a \in \partial A, b \in N(a) \setminus A : u \in W(a, b)] \Rightarrow u \in \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W.$$

– $\supset$ – Нехай $\exists u \in \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W : u \notin A$. Оскільки, за Теоремою 2.15, опукла множина A є множиною з воротами, а отже, за Наслідком 1.30, і чебишовською, можемо покласти $a' = \text{pr}_A(u) \in A$, тоді

$$u \notin A \Rightarrow d(u, a') \geq 1 \Rightarrow \exists b' \in (a', u] : d(a', b') = 1, \quad d(u, a') \geq d(u, b').$$

З іншого боку,

$$u \notin A, \quad a' = \text{pr}_A(u), \quad b' \in (a', u], \quad d(a', b') = 1 \Rightarrow b' \in N(a') \setminus A.$$

Тоді матимемо суперечність, оскільки

$$u \in \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W \Rightarrow u \in W(a', b') \Rightarrow d(u, a') < d(u, b').$$

Отже, $u \in A$. □

Означення 2.24. Нехай X – деяка множина, $\mathcal{F} \subset 2^X$ – сукупність підмножин X . Кажуть, що $\mathcal{F}$ задовольняє *властивість Хеллі*, якщо для будь-якої скінченної родини $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ виконано

$$\forall A, B \in \mathcal{F}' : A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{A \in \mathcal{F}'} A \neq \emptyset.$$

Лема 2.25. Якщо A, B – множини з воротами в графі G , $A \cap B \neq \emptyset$, то для будь-якої вершини $x \in A$ її ворота в B належать $A \cap B$.

Доведення. Оскільки B – множина з воротами, то

$$\forall x \in A \subset V(G) \exists g \in B, \forall z \in B : g \in [x, z].$$

За Твердженням 1.29, для кожної вершини ворота єдині. Окрім того,

$$\forall z^* \in A \cap B \subset A : g \in [x, z^*].$$

За Твердженням 1.31, кожна множина з воротами є опуклою. Тому

$$x \in A, z^* \in A \Rightarrow [x, z^*] \subset A \Rightarrow g \in A.$$

Отже, $g \in A \cap B$. □

Твердження 2.26. *Непорожній перетин двох множин з воротами теж є множиною з воротами.*

Доведення. Нехай A, B – множини з воротами в графі G , $A \cap B \neq \emptyset$. Тоді

$$\forall x \in V(G) \exists g_A \in A, \forall z \in A \cap B \subset A : g_A \in [x, z].$$

Окрім того, за Лемою 2.25,

$$g_A \in A, z \in B \Rightarrow \exists g \in A \cap B : g \in [g_A, z].$$

Маємо:

$$[g_A, z] \subset [x, z] \Rightarrow g \in [x, z].$$

Остаточно:

$$\forall x \in V \exists g \in A \cap B, \forall z \in A \cap B : g \in [x, z].$$

Отже, $A \cap B$ – множина з воротами. □

Теорема 2.27. *Сукупність усіх множин з воротами у зв'язному графі задовольняє властивість Хеллі.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F}$ – сукупність усіх множин з воротами зв'язного графа, $\mathcal{F}'$ – її довільна підмножина. Проведемо математичну індукцію за потужністю множини $\mathcal{F}'$.

База ($n = 3$):

$A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}'$ – множини з воротами з попарно непорожніми перетинами. Розглянемо вершину $x \in A_1 \cap A_2$. Нехай g – ворота x в множину A_3 . За Лемою 2.25,

$$x \in A_1 \Rightarrow g \in A_1 \cap A_3;$$

$$x \in A_2 \Rightarrow g \in A_2 \cap A_3.$$

Отже, оскільки, за Твердженням 1.29, для кожної вершини ворота єдині,

$$g \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \emptyset.$$

Крок:

Нехай твердження справедливе для $|\mathcal{F}'| \leq n$. Розглянемо $\mathcal{F}' = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$, де $A_i, i = \overline{1, n+1}$ – множини з воротами з попарно непорожніми перетинами. Покладемо $A = A_1 \cap A_2$. Аналогічно до бази індукції:

$$\forall i = \overline{3, n+1} : A \cap A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_i \neq \emptyset.$$

Окрім того, за Твердженням 2.26, A є множиною з воротами. Отже, за припущенням індукції,

$$A_1 \cap \dots \cap A_{n+1} = A \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n+1} \neq \emptyset.$$

□

2.2.1 Характеризація в термінах властивості Хеллі

Твердження 2.28. *Непорожній перетин двох опуклих множин теж є опуклою множиною.*

Доведення. Нехай A, B – опуклі множини в графі G , $A \cap B \neq \emptyset$. Тоді

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A \cap B \subset A &\Rightarrow [x, y] \subset A, \\ \forall x, y \in A \cap B \subset B &\Rightarrow [x, y] \subset B. \end{aligned}$$

Тому

$$\forall x, y \in A \cap B : [x, y] \subset A \cap B$$

Отже, $A \cap B$ – опукла множина. □

Лема 2.29. *В модулярному графі для довільної трійки вершин x, y, z і для будь-якої вершини $t \in M(x, y, z)$ має місце $[x, t] \cap M(x, y, z) = \{t\}$.*

Доведення. Розглянемо довільну вершину $u \in [x, t] \setminus \{t\}$. Тоді

$$\begin{aligned} d(y, u) + d(u, z) &= d(x, y) - d(x, u) + d(x, z) - d(x, u) = \\ &= d(x, y) + d(x, z) - 2(d(x, t) - d(t, u)) = \\ &= d(x, y) - d(x, t) + d(x, z) - d(x, t) + 2d(t, u) = \\ &= d(y, t) + d(t, z) + 2d(t, u) = d(y, z) + 2d(t, u) > \\ &> d(y, z). \end{aligned}$$

Отже,

$$d(y, u) + d(u, z) > d(y, z) \Rightarrow u \notin [y, z].$$

Матимемо:

$$[x, m] \cap M(x, y, z) = [x, m] \cap [x, y] \cap [y, z] \cap [z, x] = [x, m] \cap [y, z] = \{m\}.$$

□

Теорема 2.30. *Зв'язний граф є медіанним тоді й тільки тоді, коли сукупність всіх його метричних відрізків задовольняє властивість Хеллі.*

Доведення.

—→ Нехай $\mathcal{F}$ – сукупність усіх метричних відрізків медіанного графа G , $\mathcal{F}'$ – її довільна підмножина. Проведемо математичну індукцію за потужністю множини $\mathcal{F}'$.

База ($n = 3$):

Нехай $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3] \in \mathcal{F}'$ – метричні відрізки з попарно непорожніми перетинами. Зафіксуємо

$$\begin{aligned} v_1 &\in [x_1, y_1] \cap [x_2, y_2], \\ v_2 &\in [x_2, y_2] \cap [x_3, y_3], \\ v_3 &\in [x_1, y_1] \cap [x_3, y_3]. \end{aligned}$$

Оскільки граф G медіанний,

$$[v_1, v_2] \cap [v_2, v_3] \cap [v_3, v_1] = \{m\}.$$

Окрім того,

$$\begin{aligned} v_1 &\in [x_1, y_1] \cap [x_2, y_2] \Rightarrow v_1 \in [x_2, y_2], \\ v_2 &\in [x_2, y_2] \cap [x_3, y_3] \Rightarrow v_2 \in [x_2, y_2]. \end{aligned}$$

Оскільки, за Твердженням 2.14, в медіанному графі метричний відрізок є опуклою множиною, то

$$v_1, v_2 \in [x_2, y_2] \Rightarrow [v_1, v_2] \subset [x_2, y_2].$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} [v_2, v_3] &\subset [x_3, y_3], \\ [v_1, v_3] &\subset [x_1, y_1]. \end{aligned}$$

Отже,

$$\{m\} = [v_1, v_2] \cap [v_2, v_3] \cap [v_3, v_1] \subset [x_1, y_1] \cap [x_2, y_2] \cap [x_3, y_3] \neq \emptyset.$$

Крок:

Нехай твердження справедливе для $|\mathcal{F}'| \leq n$. Покладемо $A_i = [x_i, y_i]$ і $\mathcal{F}' = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$, де $A_i, i = \overline{1, n+1}$ – метричні відрізки з попарно неперетинними перетинами. Нехай $A = A_1 \cap A_2$. Аналогічно до бази індукції:

$$\forall i = \overline{3, n+1} : A \cap A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_i \neq \emptyset.$$

Окрім того, за Твердженням 2.28, A є опуклою множиною. Отже, за припущенням індукції:

$$A_1 \cap \dots \cap A_{n+1} = A \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$$

← Оскільки $\forall x, y, z \in V(G)$:

$$\begin{aligned} y &\in [x, y] \cap [y, z] \neq \emptyset, \\ z &\in [y, z] \cap [z, x] \neq \emptyset, \\ x &\in [x, y] \cap [z, x] \neq \emptyset, \end{aligned}$$

то, за властивістю Хеллі,

$$\forall x, y, z : M(x, y, z) := [x, y] \cap [y, z] \cap [z, x] \neq \emptyset.$$

Нехай $|M(x, y, z)| > 1$, тобто $\exists m_1, m_2 \in M : m_1 \neq m_2$. Матимемо:

$$\begin{aligned} m_1 &\in [x, m_1] \cap [y, z] \neq \emptyset, \\ m_2 &\in [x, m_2] \cap [y, z] \neq \emptyset, \\ x &\in [x, m_1] \cap [x, m_2] \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Але, за Лемою 2.29,

$$[x, m_1] \cap [y, z] \cap [x, m_2] = \{m_1\} \cap [x, m_2] = \emptyset,$$

що суперечить властивості Хеллі. Отже, $|M| = 1$ і граф G – медіанний. $\square$

2.2.2 Характеризація в термінах чебишовських множин

Твердження 2.31. [9] Нехай G – зв’язний граф без трикутників. Якщо для будь-яких трьох вершин $u, v, w \in V(G)$ таких, що $d(u, v) = 2$, виконується $|M(u, v, w)| = 1$, то G – медіанний граф.

Твердження 2.32. Якщо кожен метричний відрізок графа є чебишовською множиною, то він двочастковий.

Доведення. Нехай граф G не є двочастковим і

$$\forall u, v, w \in V(G) : |\text{pr}_{[u,v]}(w)| = 1.$$

За Твердженням 1.21, G містить цикл непарної довжини. Розглянемо найменший з таких циклів. Позначимо його $v_1 - v_2 - \dots - v_n - v_1$, n – непарне. Матимемо:

$$d(v_{\frac{n+1}{2}}, v_1) = d(v_{\frac{n+1}{2}}, v_n) \Rightarrow |\text{pr}_{[v_1, v_n]}(v_{\frac{n+1}{2}})| = 2.$$

Оскільки, за Твердженням 1.26, цикл, який ми розглядаємо, ізометричний, маємо суперечність. $\square$

Лема 2.33. У графі G для будь-якої трійки вершин $u, v, w \in V(G)$ виконується $M(u, v, w) \subset \text{pr}_{[u,v]}(w)$. Окрім того, якщо $M(u, v, w) \neq \emptyset$, то $M(u, v, w) = \text{pr}_{[u,v]}(w)$.

Доведення.

– $\subset$ – Припустимо, що $\exists x \in M(u, v, w) : x \notin \text{pr}_{[u,v]}(w)$. Розглянемо довільну вершину $y \in \text{pr}_{[u,v]}(w)$. Тоді оскільки

$$x \notin \text{pr}_{[u,v]}(w), y \in \text{pr}_{[u,v]}(w) \Rightarrow d(w, x) > d(w, y),$$

то

$$\begin{aligned} d(w, y) + d(y, u) &\geq d(w, u) = d(w, x) + d(x, u) > d(w, y) + d(x, u), \\ d(w, y) + d(y, v) &\geq d(w, v) = d(w, x) + d(x, v) > d(w, y) + d(x, v). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} d(y, u) &> d(x, u), \\ d(y, v) &> d(x, v). \end{aligned}$$

Тоді матимемо суперечність:

$$d(u, v) = d(u, y) + d(y, v) > d(u, x) + d(x, v) = d(u, v).$$

– $\supset$ – Припустимо, що $\exists x \in \text{pr}_{[u,v]}(w) : x \notin M(u, v, w)$. Розглянемо довільну вершину $y \in M(u, v, w) \subset \text{pr}_{[u,v]}(w)$. Тоді

$$\begin{aligned} x, y \in \text{pr}_{[u,v]}(w) &\Rightarrow d(w, x) = d(w, y), \\ x \in [u, v], x \notin M(u, v, w) &\Rightarrow x \notin [v, w] \cap [w, u]. \end{aligned}$$

Без втрати загальності, припустимо, що $x \notin [w, u]$. Тоді

$$\begin{aligned} d(w, x) + d(x, u) &> d(w, u) = d(w, y) + d(y, u) = d(w, x) + d(y, u), \\ d(w, x) + d(x, v) &\geq d(w, v) = d(w, y) + d(y, v) = d(w, x) + d(y, v). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} d(x, u) &> d(y, u), \\ d(x, v) &\geq d(y, v). \end{aligned}$$

Тоді матимемо суперечність:

$$d(u, v) = d(u, x) + d(x, v) > d(u, y) + d(y, v) = d(u, v).$$

□

Лема 2.34. Якщо кожен метричний відрізок графа G є чебишовською множиною, то для будь-яких трьох вершин $u, v, w \in V(G)$ таких, що $d(u, v) = 2$ виконується $M(u, v, w) \neq \emptyset$.

Доведення. Припустимо, що $\exists u, v, w \in V(G) : d(u, v) = 2, M(u, v, w) = \emptyset$. Покладемо $a = \text{pr}_{[u,v]}(w)$. Нехай $a \neq u, a \neq v$, тоді

$$\begin{aligned} d(w, a) < d(w, u) &\leq d(w, a) + d(a, u) = d(w, a) + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow d(w, u) = d(w, a) + d(a, u) \Rightarrow a \in [w, u]. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$a \in [w, v].$$

Тоді

$$a \in M(u, v, w).$$

Маємо суперечність. Отже, $a = u$ або $a = v$. Без втрати загальності, припустимо, що $a = u$. Матимемо:

$$u \in [u, v] \cap [u, w] \Rightarrow u \notin [v, w] \Rightarrow \\ d(u, w) < d(v, w) < d(v, u) + d(u, w) = 2 + d(u, w) \Rightarrow d(v, w) = d(u, w) + 1.$$

Нехай P_1 – найкоротший (u, v) -шлях, P_2 – найкоротший (v, w) -шлях, P_3 – найкоротший (w, u) -шлях. Розглянемо замкнений шлях $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$. Тоді його довжина

$$d(P) = d(u, v) + d(v, w) + d(w, u) = 2 + (d(w, u) + 1) + d(w, u) = 2d(w, u) + 3.$$

Отже, він містить цикл непарної довжини. Оскільки, за Твердженням 2.32, граф G є двочастковим, маємо суперечність. $\square$

Теорема 2.35. *Граф є медіанним тоді й тільки тоді, коли кожен його метричний відрізок є чебишовською множиною.*

Доведення.

—→ Нехай G – медіанний граф. Маємо:

$$\forall u, v, w \in V(G) : \{m(u, v, w)\} := M(u, v, w) \neq \emptyset.$$

Тоді, за Лемою 2.33,

$$\forall u, v, w \in V(G) : \{m(u, v, w)\} = pr_{[u, v]}(w) \Rightarrow |pr_{[u, v]}(w)| = 1.$$

←— Нехай кожен метричний відрізок графа G є чебишовською множиною. Розглянемо трійку вершин $u, v, w \in V(G)$ таких, що $d(u, v) = 2$. Тоді, за Лемою 2.34,

$$M(u, v, w) \neq \emptyset.$$

І, за Лемою 2.33,

$$M(u, v, w) = pr_{[u, v]}(w) \Rightarrow |M(u, v, w)| = |pr_{[u, v]}(w)| = 1.$$

Оскільки, за Твердженням 2.32, граф G є двочастковим, він не містить трикутників. Отже, за Твердженням 2.31, граф G є медіанним. $\square$

2.3 Відображення між графами

Означення 2.36. Нехай G та H – пара зв'язних графів. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ називається

- *гомоморфізмом*, якщо $\forall uv \in E(G) : f(u)f(v) \in E(H)$;
- *метричним*, якщо $\forall u, v \in V(G) : d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v)$;
- *лінійним*, якщо $\forall u, v \in V(G) : f([u, v]_G) \subset [f(u), f(v)]_H$;
- *неперервним*, якщо $\forall u, v \in V(G) : [f(u), f(v)]_H \subset f([u, v]_G)$;
- *монотонним*, якщо $\forall y \in V(H) : f^{-1}(y)$ – зв'язна множина.

Безпосередньо із означень слідує, що кожне ін'єктивне відображення завжди є монотонним.

Твердження 2.37. *Кожне лінійне відображення є монотонним.*

Доведення. Якщо відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ лінійне, то

$$\begin{aligned} \forall y \in V(H), \forall x_1, x_2 \in f^{-1}(y) \subset V(G) : \\ f([x_1, x_2]_G) \subset [f(x_1), f(x_2)]_H = [y, y]_H = y. \end{aligned}$$

Тоді, за властивостями прообразу,

$$[x_1, x_2]_G \subset f^{-1}(f([x_1, x_2]_G)) \subset f^{-1}(y).$$

Отже, множина $f^{-1}(y)$ опукла, а отже, і зв'язна $\forall y \in V(H)$, і відображення є монотонним. $\square$

Приклад 2.38. *Монотонне відображення, яке не є лінійним.*

Розглянемо відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$, де $\forall i \in V(G) : f(i) = i'$.



Очевидно, відображення монотонне, оскільки всі прообрази:

$$f^{-1}(1') = 1, f^{-1}(2') = 2, f^{-1}(3') = 3,$$

– одноточкові, а отже, і зв'язні. Але відображення не лінійне, бо

$$f([1, 3]) = \{1', 2', 3'\} \not\subset [f(1), f(3)] = \{1', 3'\}.$$

Твердження 2.39. Нехай G – зв’язний граф, $A \subset V(G)$ – чебишовська множина. Тоді проєкція pr_A є монотонним відображенням.

Доведення. Для довільної вершини $y \in A$ розглянемо множину

$$\text{pr}_A^{-1}(y) = \{x \in V(G) \mid d(x, y) = \min_{v \in A} d(x, v)\}.$$

Для довільної вершини $x \in \text{pr}_A^{-1}(y)$ розглянемо шлях $[x, y]$. Очевидно,

$$\forall z \in [x, y] : z \in \text{pr}_A^{-1}(y).$$

Бо інакше, оскільки множина A є чебишовською,

$$\exists y^* \in A \setminus \{y\} : \text{pr}_A(z) = y^* \Rightarrow d(z, y^*) < d(z, y).$$

І тоді

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) > d(x, z) + d(z, y^*) > d(x, y^*) \Rightarrow \text{pr}_A(x) \neq y.$$

Отже,

$$\forall x \in \text{pr}_A^{-1}(y) : [x, y] \subset \text{pr}_A^{-1}(y).$$

Тоді для довільних вершин $x_1, x_2 \in \text{pr}_A^{-1}(y)$ існує шлях $P \subset [x_1, y] \cup [y, x_2]$ між ними, що належить прообразу проєкції. Отже, $\forall y \in A$ множина $\text{pr}_A^{-1}(y)$ зв’язна, і відображення pr_A є монотонним. $\square$

Теорема 2.40. Нехай G та H – пара зв’язних графів. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є метричним тоді й тільки тоді, коли для всіх ребер $uv \in E(G)$ виконано $d_H(f(u), f(v)) \leq 1$.

Доведення.

—→ Якщо відображення метричне, очевидно,

$$\forall uv \in E(G) : d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v) = 1.$$

←— Для будь-якої пари вершин $u, v \in V(G)$ розглянемо довільний ланцюг $(u = x_0, x_1, \dots, x_n = v) \in [u, v]$. Тоді

$$\begin{aligned} d_H(f(u), f(v)) &= d_H(f(x_0), f(x_n)) \leq \\ &\leq d_H(f(x_0), f(x_1)) + \dots + d_H(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \\ &\leq n = d_G(u, v). \end{aligned}$$

Отже, відображення є метричним. $\square$

Наслідок 2.41. *Образ метричного відображення між парюю зв'язних графів завжди є зв'язною множиною.*

Доведення. Оскільки граф G зв'язний,

$$\forall u, v \in V(G) \exists (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v), \forall i = \overline{1, n} : x_{i-1}x_i \in E(G).$$

Розглянемо послідовність

$$(f(u) = f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) = f(v)) \in \text{im} f.$$

За Теоремою 2.40,

$$\forall i = \overline{1, n} : f(x_{i-1})f(x_i) \in E(H) \vee f(x_{i-1}) = f(x_i).$$

Тоді, викинувши послідовні повтори вершин, отримаємо шлях між вершинами $f(u), f(v) \in \text{im} f$, що належить образу відображення. Оскільки це справедливо для всіх $u, v \in V(G)$, а отже, і для будь-яких $f(u), f(v) \in \text{im} f$, то образ – зв'язна множина. $\square$

Наслідок 2.42. *Кожен гомоморфізм є метричним відображенням.*

Доведення. Якщо відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ гомоморфізм, то

$$\forall uv \in E(G) : f(u)f(v) \in E(H).$$

Тоді, очевидно,

$$\forall uv \in E(G) : d_H(f(u), f(v)) = 1.$$

Отже, за Теоремою 2.40, відображення є метричним. $\square$

Наслідок 2.43. *Кожне неперервне відображення є метричним.*

Доведення. Якщо відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ неперервне, то

$$\forall uv \in E(G) : [f(u), f(v)]_H \subset f([u, v]_G) = \{f(u), f(v)\}.$$

Тоді, очевидно,

$$\forall uv \in E(G) : d_H(f(u), f(v)) \leq |\{f(u), f(v)\}| - 1 = 1.$$

Отже, за Теоремою 2.40, відображення є метричним. $\square$

Приклад 2.44. Метричне відображення, яке не є неперервним.
Розглянемо відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$, де $\forall i \in V(G) : f(i) = i'$.



Відображення f є метричним, оскільки

$$\forall uv \in E(G) : d_H(f(u), f(v)) = 1.$$

Але не є неперервним, оскільки

$$[f(1), f(3)]_H = [1', 3']_H = \{1', 2', 3', 4'\} \not\subset f([1, 3]_G) = f(\{1, 2, 3\}) = \{1', 2', 3'\}.$$

Теорема 2.45. Нехай G – зв'язний граф, H – дерево, а $f : V(G) \rightarrow V(H)$ – деяке відображення. Тоді f є метричним тоді й тільки тоді, коли f неперервне.

Доведення.

← За Наслідком 2.43, кожне неперервне відображення є метричним.

→ Оскільки граф G зв'язний,

$$\forall u, v \in V(G) \exists (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v) \in [u, v]_G, \forall i = \overline{1, n} : x_{i-1}x_i \in E(G).$$

Розглянемо послідовність

$$(f(u) = f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) = f(v)).$$

Оскільки відображення f – метричне, за Теоремою 2.40,

$$\forall i = \overline{1, n} : f(x_{i-1})f(x_i) \in E(H) \vee f(x_{i-1}) = f(x_i).$$

Тоді ця послідовність містить шлях між вершинами $f(u), f(v)$. Оскільки H – дерево, для будь-яких двох його вершин шлях між ними єдиний, тоді

$$[f(u), f(v)]_H = \{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\} = f(\{x_0, x_1, \dots, x_n\}) \subset f([u, v]_G).$$

Отже, відображення є неперервним. □

Твердження 2.46. *Нехай G та H – пара зв’язних графів. Тоді відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ – ін’єкція, а $f^{-1} : V(H) \rightarrow V(G)$ – гомоморфізм між породженим підграфом $H[f(V(G))]$ і G тоді і тільки тоді, коли для будь-якої пари вершин $u, v \in V(G)$ виконується $d_G(u, v) \leq d_H(f(u), f(v))$.*

Доведення.

—► Оскільки відображення f – ін’єкція, то

$$\forall x \in V(G) : f^{-1}(f(x)) = x.$$

Окрім того, оскільки відображення f^{-1} – гомоморфізм, то, за Наслідком 2.42, воно є метричним. Тоді матимемо:

$$d_G(u, v) = d_G(f^{-1}(f(u)), f^{-1}(f(v))) \leq d_H(f(u), f(v)).$$

◄— Розглянемо пару вершин $u, v \in V(G) : u \neq v$. Тоді,

$$d_H(f(u), f(v)) \geq d_G(u, v) \geq 1 \Rightarrow f(u) \neq f(v).$$

Отже, f – ін’єкція.

Тепер розглянемо $u, v \in V(G) : f(u)f(v) \in E(H)$. Очевидно, $u \neq v$ і тоді

$$1 = d_H(f(u), f(v)) \geq d_G(u, v) \geq 1 \Rightarrow d_G(u, v) = 1 \Rightarrow uv \in E(G).$$

Отже, f^{-1} – гомоморфізм між $H[f(V(G))]$ та G . □

Теорема 2.47. *Нехай G та H – пара медіанних графів. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є лінійним тоді й тільки тоді, коли воно зберігає медіани, тобто $f(m_G(u, v, w)) = m_H(f(u), f(v), f(w))$ для всіх трійок вершин $u, v, w \in V(G)$.*

Доведення.

—► Якщо $f : V(G) \rightarrow V(H)$ – лінійне відображення, то $\forall u, v, w \in V(G) :$

$$\begin{aligned} f(m_G(u, v, w)) &= f([u, v]_G \cap [v, w]_G \cap [w, u]_G) \subset \\ &\subset f([u, v]_G) \cap f([v, w]_G) \cap f([w, u]_G) \subset \\ &\subset [f(u), f(v)]_H \cap [f(v), f(w)]_H \cap [f(w), f(u)]_H = \\ &= m_H(f(u), f(v), f(w)). \end{aligned}$$

Тоді, оскільки граф H медіанний і медіана $m_H(f(u), f(v), f(w))$ єдина, то

$$f(m_G(u, v, w)) = m_H(f(u), f(v), f(w)).$$

←— Нехай відображення f не лінійне, тоді

$$\exists u, v \in V(G), \exists y \in f([u, v]_G) : y \notin [f(u), f(v)]_H.$$

Оскільки $y \in f([u, v]_G)$, то

$$\exists w \in [u, v]_G : f(w) = y.$$

Тоді, оскільки граф G – медіанний, то

$$f([u, v]_G \cap [v, w]_G \cap [w, u]_G) = f(w).$$

З іншого боку,

$$y = f(w) \notin [f(u), f(v)]_H.$$

Отже,

$$\begin{aligned} f([u, v]_G \cap [v, w]_G \cap [w, u]_G) &= f(w) \neq \\ &\neq [f(u), f(v)]_H \cap [f(v), f(w)]_H \cap [f(w), f(u)]_H, \end{aligned}$$

що суперечить припущенню про те, що відображення зберігає медіани. $\square$

Висновки

У **Розділі 1** розглянуто базові означення та твердження. Зокрема, доведено критерій двочастковості графа та достатні умови ізометричності циклу. У **Підрозділі 1.2.1** розглянуто типи множин у зв'язних графах, а саме: зв'язну множину, опуклу множину, множину з воротами та чебишовську множину, – а також сформульовано та доведено деякі їхні властивості.

У **Розділі 2** розглянуто поняття модулярного та медіанного графів.

У **Підрозділі 2.1** розглянуто загальні властивості модулярних та медіанних графів. Доведено, що клас модулярних графів є підкласом двочасткових графів, а класи дерев та гіперкубів – підкласами медіанних графів. Описано медіанні графи, в яких медіана кожної трійки вершин є однією з цих вершин.

У **Підрозділі 2.2** розглянуто згадані вище типи множин і їхні властивості у модулярних та медіанних графах. Доведено, що в медіанному графі кожен метричний відрізок опуклий. Доведено, що в модулярному графі множина вершин є опуклою тоді і лише тоді, коли вона є множиною з воротами. Розглянуто поняття півпростору, доведено, що в медіанному графі півпростір – опукла множина. Доведено, що будь-яка опукла множина в медіанному графі є перетином півпросторів. У **Підрозділі 2.2.1** сформульовано і доведено перший критерій медіанності графа в термінах властивості Хеллі: сукупність усіх його метричних відрізків має задовольняти властивості Хеллі. У **Підрозділі 2.2.2** сформульовано та доведено другий критерій медіанності графа в термінах чебишовських множин: кожен його метричний відрізок має бути чебишовською множиною.

У **Підрозділі 2.3** розглянуто різні типи відображень між графами, а саме: гомоморфізм, метричне, лінійне, неперервне та монотонне відображення, – а також сформульовано та доведено деякі їхні властивості в довільних та медіанних графах. Зокрема, доведено, що відображення між медіанними графами зберігає медіани тоді і лише тоді, коли воно є лінійним.

Література

- [1] S. P. Avann, *Metric ternary distributive semi-lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 407-414.
- [2] A. Berrachedi, *A new characterization of median graphs*, Discrete Mathematics, **128** (1994), 385—387.
- [3] M. Changat, I. Peterin and A. Ramachandran, *On gated sets in graphs*, Taiwanese J. Math. **20** (2016), 509–521.
- [4] R. Hammack, W. Imrich and S. Klavžar (2011), *Handbook of product graphs, second edition*, CRC Press Inc.
- [5] P. Hell and J. Nešetřil (2004), *Graphs and Homomorphisms*, Oxford University Press Inc.
- [6] F.R. McMorris, H.M. Mulder and F.S. Roberts, *The median procedure on median graphs*, Discrete Applied Mathematics, **84** (1998), 165—181.
- [7] H.M. Mulder, *The structure of median graphs*, Discrete Mathematics, **24** (1978), 197—204.
- [8] H. M. Mulder and A. Schrijver, *Median graphs and Helly hypergraphs*, Discrete Math, **25** (1979) 41–50.
- [9] H.M. Mulder (1980), *Chapter 3. Median graphs*, in M. Mulder, *The interval function of a graph*, Mathematisch Centrum, 64—96.
- [10] H.M. Mulder (2010), *Chapter 5. Median Graphs: A Structure Theory*, in H. Kaul and M. Mulder, *Advances in Interdisciplinary Applied Discrete Mathematics*, World Scientific, 93—125.
- [11] L. Nebeský, *Median graphs*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **12** (1971) 317–325.
- [12] C. Tardif, *On compact median graphs*, Journal of Graph Theory, **23** (1996), 325—336.