Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«Властивості діаграм Вороного на графах»**

Виконала
студентка 4-го року навчання,
освітньої програми «Прикладна математика», 113
Соколова Діана Тимурівна

Керівник
Олійник Богдана Віталіївна
професор, доктор фізико-математичних наук

Рецензент
____
____

Кваліфікаційна робота захищена з оцінкою
____
Секретар ЕК
____
«____» __________________ 20____ р.

Київ – 2023

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав. кафедри математики,
Доцент, кандидат ф.-м. наук
Руслан Костянтинович Чорней
____

“____”________________2023 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

на кваліфікаційну роботу студентці 4-го курсу факультету інформатики
Соколовій Діані Тимурівні

Тема: Властивості діаграм Вороного на графах

Зміст ТЧ до кваліфікаційної роботи:

Анотація

Вступ

Необхідні теоретичні відомості

Визначення властивостей діаграм Вороного на графах

Висновки

Список літератури

Дата видачі “____” ________________2023 р. Керівник _________________

Завдання отримано ________

Тема: Властивості діаграм Вороного на графах

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на кваліфікаційну роботу	28.10.2022	
2.	Пошук літератури	23.11.2022	
3.	Вивчення предметної області	29.01.2023	
3.	Формулювання основних тверджень	03.03.2023	
4.	Доведення тверджень про діаграми Вороного на графах	30.04.2023	
5.	Написання текстової частини роботи	04.05.2023	
6.	Попередній захист роботи	11.05.2023	
7.	Проходження перевірки на плагіат	28.05.2023	
8.	Захист роботи	05.06.2023	

Студент Соколова Д.Т. ________________________

Керівник Олійник Б.В. ________________________

“______”______________ 2023 р.

ЗМІСТ

Анотація

Кваліфікаційна робота присвячена вивченню діаграм Вороного на графах, зокрема на уніциклічних графах. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків і списку джерел.

У вступі розкривається актуальність дослідження даної теми та її застосування в сучасному житті.

Перший розділ містить основні означення з теорії графів, діаграм Вороного на площині та необхідні допоміжні твердження.

Другий розділ включає визначення метричних просторів, визначених на графах, формулювання та доведення таких теорем:

- Теорема про умови, за яких граф Діаграми Вороного є графом-зіркою з нескінченними променями.
- Теорема про належність вершини графу ребру діаграми Вороного.
- Теорема про належність ребра графу ребру діаграми Вороного.

У висновках робиться підсумок проведеного дослідження.

У списку використаної літератури наводяться джерела, що були використані під час дослідження.

Ключові слова: діаграма Вороного, площина, граф, степінь вершини, дерево, довжина найкоротшого шляху, уніциклічний граф.

Вступ

Діаграми Вороного на графах - це метод візуалізації графа, що дозволяє розділити множину його вершини на клітини, що називаються клітинами діаграми Вороного. Кожна з таких клітин містить всі вершини графа, які є найближчими до однієї з вершин ніж до будь-якої іншої вершини графа.

Діаграми Вороного на графах можуть бути корисні при вирішенні задач з обробки даних, таких як геоінформатика, мережевий аналіз, аналіз соціальних мереж а також мають широке застосування у фізиці, астрономії, робототехніці, соціальній географії та багатьох інших областях. Тому ця тема є актуальною у сучасному світі. Вони також можуть бути використані для візуалізації даних в графічних редакторах, де вони допомагають підкреслити взаємозв'язки між об'єктами на графі. [3]

Подібне питання виникає в суспільній географії, коли вивчається економічна діяльність у країні: яка торгова зона тих чи інших міст?

Припустімо, що ви входите до консультативної ради з планування мережі супермаркетів і плануєте відкрити нову філію в певному місці.

Щоб передбачити, чи буде нова філія прибутковою, необхідно оцінити кількість клієнтів, яку вона залучить. Для цього вам потрібно змоделювати поведінку ваших потенційних клієнтів: як люди вирішують, де робити покупки?

У більш абстрактному контексті ми маємо набір центральних місць, які слугують “сайтами” діаграми Вороного, які надають певні товари чи послуги, і ми хочемо знати для кожного “сайту”, де живуть люди, які отримують товари чи послуги з цього сайту. “Сайти” також можна розглядати як поштові відділення, де клієнти хочуть розміщувати свої листи.

Роботу присвячено вивченню діаграм Вороного на графах. Вона складається зі вступу, двох розділів, висновків і списку використаних джерел. Перший розділ містить основні означення з теорії графів, діаграм Вороного на площині та необхідні допоміжні твердження. В другому розділі доводяться властивості діаграм Вороного на уніциклічних графах.

РОЗДІЛ 1.

Необхідні визначення та допоміжні твердження

1.1. Діаграми Вороного на площині

Спочатку розглянемо означення та властивості діаграм Вороного на площині, які можна переглянути у [8]

Позначимо Евклідову відстань між двома точками p і q через $dist(p,q)$:

$$dist(p,q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

Нехай $P = \{p_1,\ p_2 ..., p_n\}$ — набір із n різних точок на площині; ці точки є сайтами (sites).

Ми визначаємо діаграму Вороного P як розбиття площини на n клітин, по одній для кожної точки з P, з властивістю, що точка q лежить у клітинці, що відповідає ділянці p_i тоді і тільки тоді, коли $dist(q,p_i) < dist\big(q,p_j\big)$, для кожного $p_j \in P$, при $j \neq i$. Діаграми Вороного множини P позначатимемо $Vor(P)$, а клітини Вороного позначатимемо $V(p_i)$.

Для двох точок p і q на площині визначимо бісектрису p і q як бісектрису перпендикуляра відрізка $\overline{pq}$. Ця бісектриса розбиває площину на дві півплощини.

Позначимо відкриту півплощину, яка містить p, через $h(p,q)$, а відкриту півплощину, яка містить q, — через $h(q,p)$. Зауважимо, що $r \in h(p,q)$ тоді і тільки тоді, коли $dist(r,p) < dist(r,q)$. З цього ми отримуємо наступне:

$$V(p_i) = \bigcap_{1 \le j \le n, j \ne i} h(p_i, p_j)$$

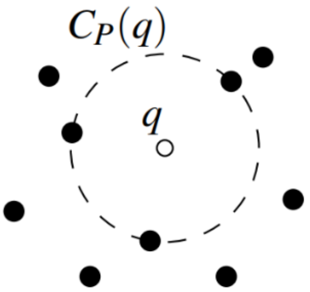
Таким чином, $V(p_i)$ є перетином $n-1$ півплощин і, отже, (можливо, необмеженої) відкритої опуклої багатокутної області, обмеженої не більше ніж $n-1$ вершинами та не більше ніж $n-1$ ребрами.

Нехай P — набір із n сайтами на площині. Якщо всі точки множини P лежать на одній прямій, то $Vor(P)$ складається з $n-1$ паралельної прямої. В іншому випадку $Vor(P)$ – це зв'язний граф і його ребра є або відрізками, або півпрямими.

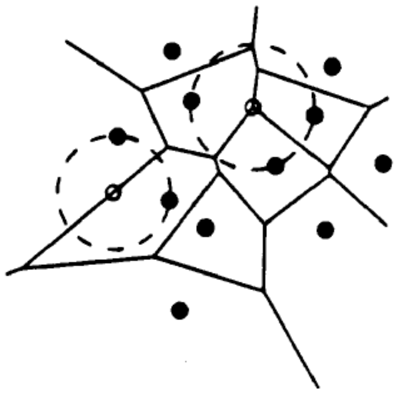
Твердження. [3] Для $\mathrm{n} \ge 3$, кількість вершин на діаграмі Вороного набору з n точкових вузлів на площині не перевищує $2\mathrm{n}-5$, а кількість ребер не перевищує $3\mathrm{n}-6$.

Для діаграми Вороного $Vor(P)$ множини точок P має місце такі твердження:

1) Точка q є вершиною P тоді і тільки тоді, коли її найбільше порожнє коло $C_p(q)$ містить три або більше вершин на своїй межі.



2) Бісектриса між точками p_i і p_j визначає ребро $Vor(P)$ тоді і тільки тоді, коли на бісектрисі є така точка q, що $C_p(q)$ містить як p_i, так і p_j на своїй межі, але не містить іншої точки.



І навпаки, нехай бісектриса p_i і p_j визначає ребро Вороного. Найбільше порожнє коло будь-якої точки q всередині цього ребра повинно містити p_i та p_j на його межі та жодних інших місць.

1.2. Основні означення теорії графів

Граф — це пара множин $G = (V, E)$, така, що $E \subseteq [V^2]$. Таким чином елементи E є 2-елементними підмножинами V. Щоб уникнути неоднозначності позначення, ми за замовчуванням вважатимемо, що $V \cap E = \emptyset$. [9]

$G = (V, E)$, де V - множина вершин графу, а E - множина ребер графу.

Степінь вершини $deg_G(v)$ — це кількість ребер e, що інцидентні v у G. [13]

$$deg(v) = |\{e \in E : v \in e\}|$$

Дерево — зв'язний граф, який не містить циклів.

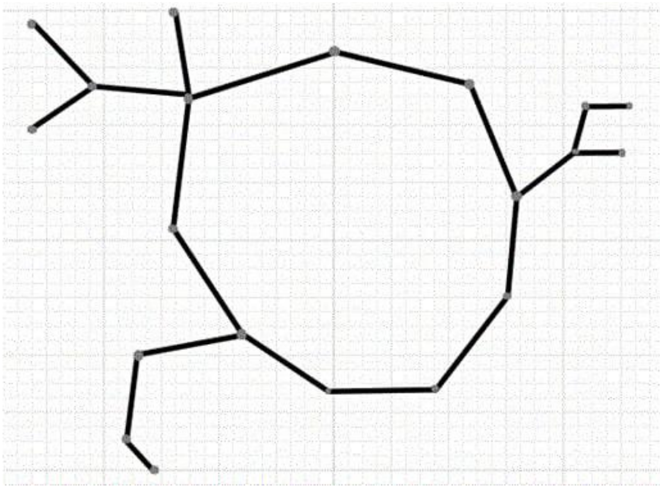
Нехай $G = (V, E)$ - зв'язний неорієнтований граф. Тоді G є деревом, тоді і тільки тоді, якщо будь-які дві вершини з V з'єднані єдиним шляхом, тобто G є зв'язним графом, та не містить циклів. [5]

Шлях (u, v) в графі $G = (V, E)$ між двома вершинами u та v – це послідовність вершин, що не повторюються, з’єднаних між собою ребрами, які містяться в графі G, та які починаються з вершини u та закінчуються вершиною v. Якщо такий шлях існує, то вершини u та v називаються з'єднаними в графі G. [6]

Визначення метрики на графі.

Відстань між двома вершинами u і v позначається $d_G(u, v)$ і дорівнює довжині найкоротшого шляху між u і v.

Граф $G = (V, E)$ уніциклічний — якщо він містить один і тільки один цикл та є зв'язним графом.

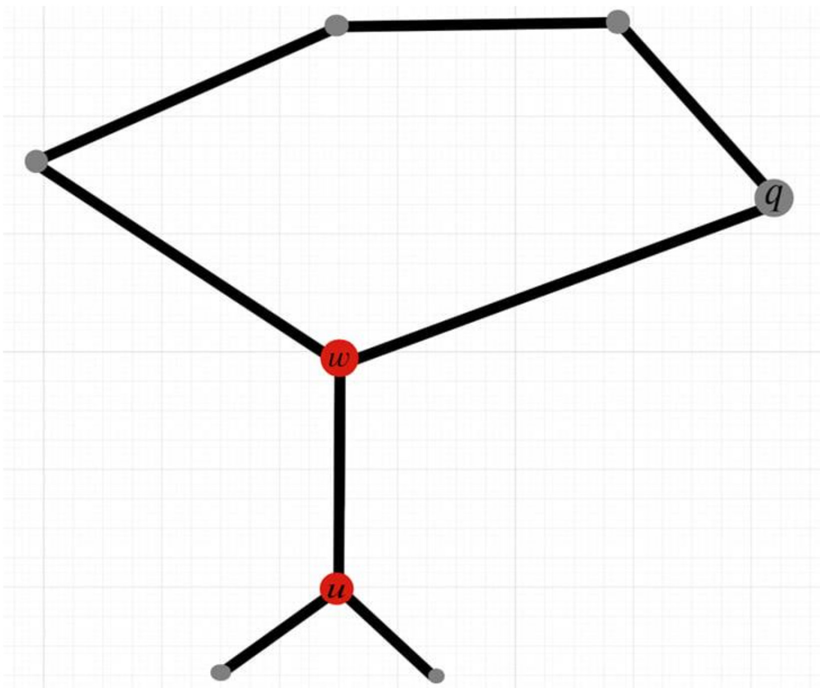


Нехай $G = (V, E)$ – це уніциклічний граф. Підграф графу G, що є циклом позначимо $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$. [7]

Що таке вершина уніциклічного графа проектується у вершину циклу. [2]

Вершина $u \in V/\hat{V}$ графу G проектується в вершину $w \in \hat{V}$, якщо для будь-якої іншої вершини $q \in \hat{V}$, виконується нерівність:

$$d_G(u, w) < d_G(u, q)$$



РОЗДІЛ 2:

Діаграми Вороного на графах

2.1. Визначення діаграми Вороного в довільному просторі

Нехай (X, d) метричний простір, де $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Нехай P підмножина X. Будемо називати елементи множини P сайтами (sites), щоб відрізняти їх від довільних точок X. [1]

Клітини (cell) Вороного для кожного $s \in P$ визначаються так:

$$cell_{(X,d)}(s, P) = \{x \in X \mid \forall s' \in P : \ d(s, x) \leq \ d(s', x)\}$$

Діаграмою Вороного множини P в просторі (X, d) називається:

$$V_{(X,d)}(P) = \{cell(X, d)(s, P) \mid s \in P\}$$

2.2. Простір, що визначається графом

Нехай $G = (V, E)$ — простий граф. [4]

Розглянемо метричний простір заданий на множині вершин графа $G = (V, E)$ з метрикою d_G, що визначається для довільних двох вершин u та w як довжина найкоротшого шляху, що їх з’єднує. [12]

Нехай $P \subseteq V$ — підмножина вершин множини P, для якої ми будуємо Діаграму Вороного.

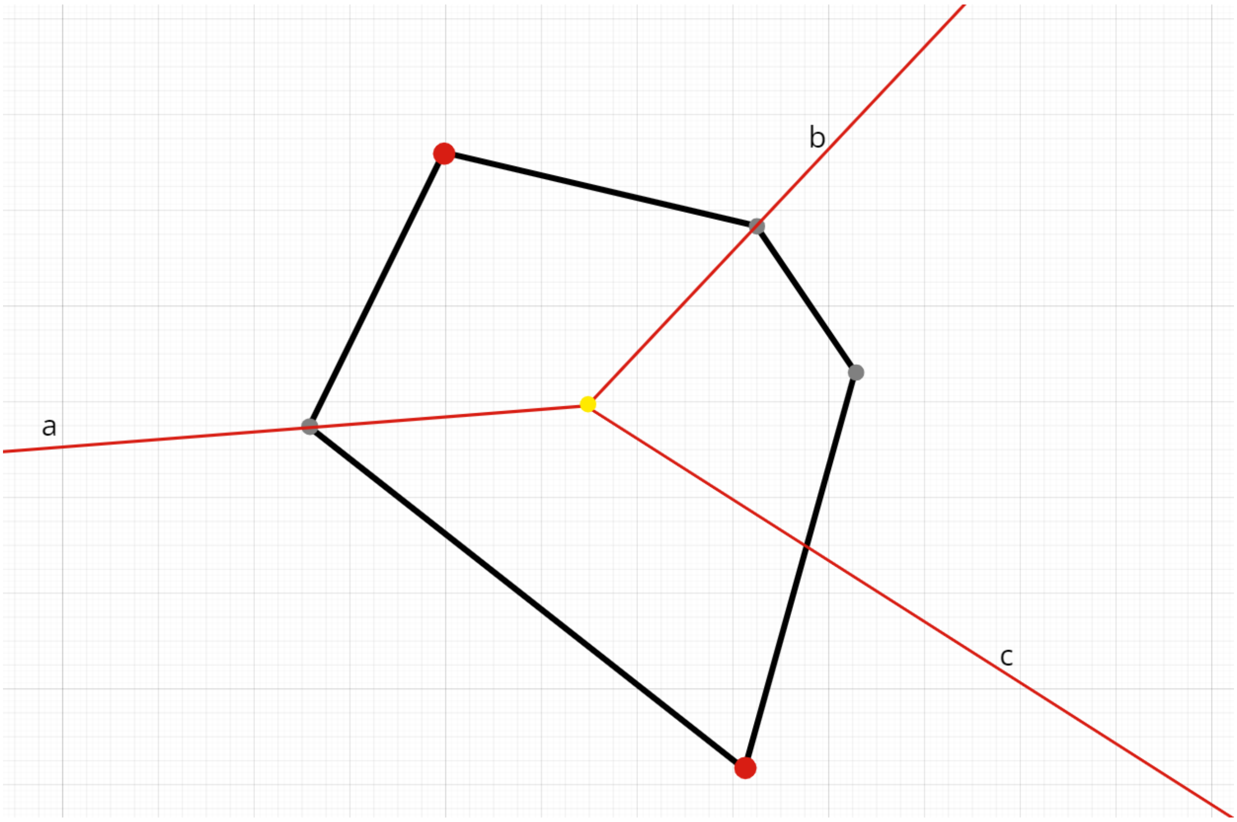
Позначимо $P = \{p_1, \ \dots, p_n\}$.

Граф $G = (V, E)$ – уніциклічний, якщо він містить один і тільки один цикл та є зв'язним графом.

2.2. Властивості діаграми Вороного на уніциклічних графах

Нехай $G = (V, E)$ – це уніциклічний граф. Підграф графу G, що є циклом позначимо $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$.

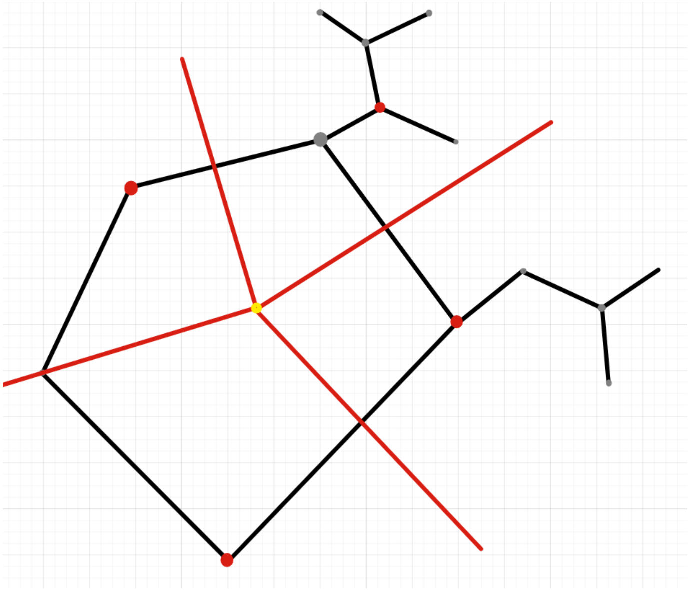
Зауваження. Коли ми проводимо ребро між двома вершинами множини P, це ребро може як містити у собі вершину графу, так може і не містити жодної. [10]



Ребра a та b містять у собі вершину графу; Ребро c не містити жодної вершини.

Теорема 1.

Якщо $P \subseteq \hat{V}$, або всі точки множини P проектуються в різні точки циклу графа, то граф Діаграми Вороного є графом-зіркою з нескінченними променями.



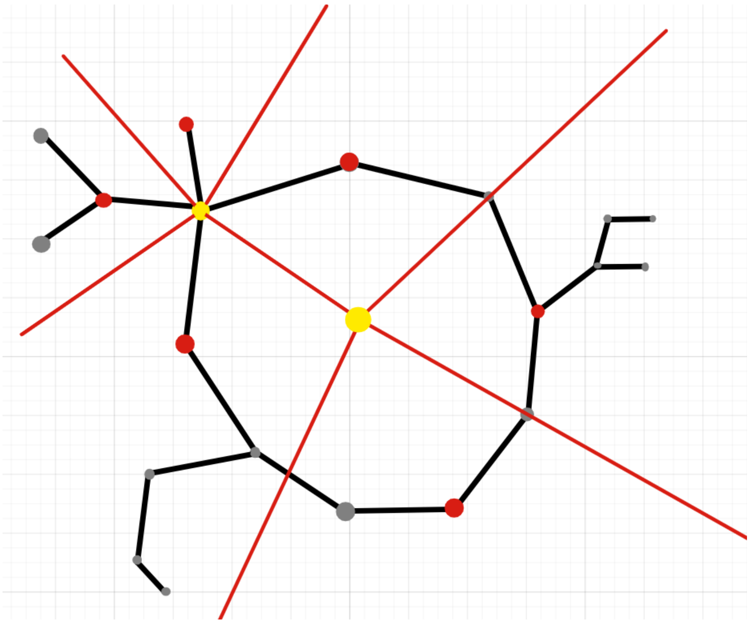
Доведення.

Якщо всі точки множини P належать до множини вершин циклу уніциклічного графу $P \subseteq \hat{V}$, то тоді ребра діаграми Вороного розбивають цикл на клітини. Кожна клітина складатиметься з частини циклу (ланцюга) і всіх вершин, що в ці вершини проектуються. А тому в діаграмі Вороного буде лише 1 вершина, з якої виходитимуть ребра що розрізають цикл.

Тобто граф діаграми Вороного у цьому випадку буде представляти собою зірку із нескінченними променями. ■

<u>Теорема 2.</u>

Нехай дві вершини p_1 та p_2 множини P рівновіддалені від вершини s, тобто $d_G(p_1, s) = d_G(p_2, s)$, причому p_1 та p_2 проектуються в s, якщо s - вершина циклу, або p_1, p_2, s – проектуються в одну і ту ж вершину циклу r. Тоді якщо немає такої вершини p_k множини P, яка знаходиться на шляху, тобто $d_G(p_1, s) = d_G(p_1, p_k) + d_G(p_k, s)$ та $d_G(p_2, s) = d_G(p_2, p_k) + d_G(p_k, s)$ то s належить ребру діаграми Вороного.



Доведення.

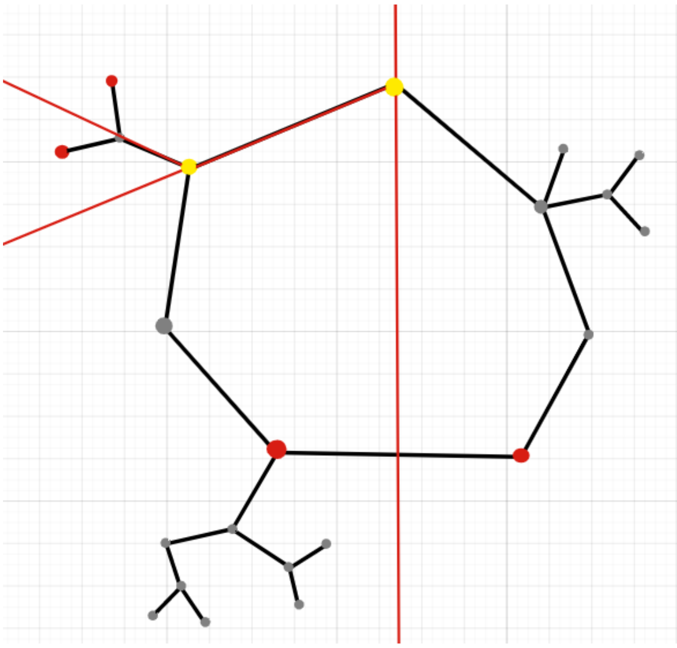
Припустимо, що s не належить ребру діаграми Вороного, тоді існує вершина h, яка належить ребру діаграми Вороного і розділяє p_1 та p_2.

Припустимо що точка h знаходиться ближче до p_1. Тоді виходить, що $d_G(p_1, h) < d_G(p_1, s)$ і $d_G(p_2, h) > d_G(p_2, s)$.

Звідси випливає, що p_1 та p_2 не є найближчими сусідами, тобто існує вершина $p_a \in P$ така, що $d_G(p_1, p_a) < d_G(p_1, s)$ та знаходиться на шляху між вершинами p_1 та s, що суперечить умові теореми – $d_G(p_1, s) = d_G(p_1, p_a) + d_G(p_a, s)$. ■

<u>Теорема 3.</u>

Нехай дві вершини p_1 та p_2 множини P рівновіддалені від вершини s циклу графа G, тобто $d_G(p_1, s) = d_G(p_2, s)$, причому немає такої вершини p_k множини P, яка знаходиться на шляху між p_1, p_2 та s. Тоді, якщо вершина u суміжна з s в циклі, рівновіддалена від p_1 та p_2 і найближчої вершини p_j множини P, то ребро us належить графу діаграми Вороного.



Доведення.

Зауважимо, що за умов Теореми 3 виконується наступні рівності:

$d_G(p_1, u) = d_G(p_2, u) = d_G(p_j, u)$, а тому вершина u буде рівновіддаленою від вершин p_1, p_2, p_j. Отже вершина u належить ребру діаграми Вороного.

Оскільки вершини s та u суміжні, то за означенням суміжності випливає, що $d_G(s, u) = 1$.

Також немає такої вершини $p_q \in P$, яка лежить на шляху $d_G(p_j, u)$.

За доведенням Теореми 2 про належність точки до ребра діаграми Вороного, можемо стверджувати що вершина s також належить ребру діаграми Вороного. Так як s та u – суміжні вершини і обидві належать ребру діаграми Вороного, то ребро між ними – us також належить ребру діаграми Вороного. ■

Висновок

Кваліфікаційну роботу присвячено дослідженню властивостей діаграм Вороного на уніциклічних графах. У ході якого, було виведено та охарактеризована такі властивості діаграм Вороного на графах:

1. Доведено що, якщо всі точки множини P лежать на циклі або проектуються в різні точки циклу графа, то граф діаграми Вороного є графом-зіркою з нескінченними променями.
2. Показано, що за певних умов вершина циклу або вершина що в неї проектується належить ребру діаграми Вороного.
3. Сформульовано умови, за яких ребро уніциклічного графу, належить ребру діаграми Вороного.

Розглянуто багато прикладів.

Дане дослідження дозволило розібратися у тому як будуються діаграми Вороного у просторах, що визначаються графами та які властивості вони мають, що може бути використано у подальших дослідженнях.

Результати роботи доповідались на XI Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків.

Література

1. Bonnet,´E., Cabello, S., Mohar, B., P´erez-Ros´es, H. (2020). The inverse Voronoi problem in graphs I: hardness. — Algorithmica, 82(10), 3018-3040.
2. Dudenko, M., Oliynyk, B. (2017). On unicyclic graphs of metric dimension2. — Algebra and Discrete Mathematics, 23(2).
3. Mark, D. B., Otfried, C., Marc, V. K., & Mark, O. (2008). Computational geometry algorithms and applications. Spinger.
4. Gawrychowski, P., Kaplan, H., Mozes, S., Sharir, M., & Weimann, O. (2021). Voronoi Diagrams on Planar Graphs, and Computing the Diameter in Deterministic˜O(n^5/3) Time. SIAM Journal on Computing, 50(2), 509-554.
5. Diestel, R., Schrijver, A., & Seymour, P. (2010). Graph theory. Oberwolfach Reports, 7(1), 521-580.
6. Jungnickel, D., & Jungnickel, D. (2005). Graphs, networks and algorithms (Vol. 3). Berlin: Springer.
7. Finucane, H. (2013). Finite Voronoi decompositions of infinite vertex transitive graphs. Journal of Topology and Analysis, 5(02), 239-250.
8. Erwig, M. (2000). The graph Voronoi diagram with applications. Networks: An International Journal, 36(3), 156-163.
9. Боднарчук, Ю. В., & Олійник, Б. В. (2009). Основи дискретної математики. Київ: Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія.
10. http://cg.unicyb.kiev.ua/ch/5/5.4.html
11. Соколова Д. Т. Властивості діаграм Вороного на уніциклічних графах. Тези доповіді на XI Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. Київ, 11 травня.