

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Кієво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр

на тему: «Адаптивне керування та PID-регулятори в БПЛА»

Виконала: студентка 4-го року
навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Коваль Наталя Михайлівна

Керівник: Чорней Р.К.
доцент, ст. викладач

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою

Секретар

ЕК _____

(підпис)

« _____ »

_____ 20 ____ р.

Київ - 2026

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Кієво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав.кафедри математики,
проф., доктор фіз.-мат. наук
_____ Чорней Р.К.
(підпис)
“ _____ ” _____ 2025

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
для кваліфікаційної роботи
студенту 4-го курсу, факультету інформатики
Коваль Наталі Михайлівни

Тема: «Адаптивне керування безпілотними літальними апаратами з використанням
PID-регуляторів»

Зміст кваліфікаційної роботи:

- Анотація
1. Вступ
2. Математична модель БПЛА
3. Основи теорії PID-керування
4. Адаптивна теорія керування
5. Адаптивний PID-регулятор для БПЛА
Список літератури

Дата видачі “ _____ ” _____ 2025 Керівник _____
(підпис)

Завдання отримав _____
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «_____» _____ 2025р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	17.10.2025			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	25.10.2025			
3.	Розробка плану та структури роботи.	15.11.2025			
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень.	17.01.2026			
5.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	15.02.2026			
6.	Робота над текстовим оформленням результатів.	18.04.2026			
7.	Попередній аналіз кваліфікаційної роботи. Виправлення помилок.	04.05.2026			
8.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	11.05.2026			
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	29.05.2026			

Науковий керівник _____
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____
(ПІБ)

ЗМІСТ

1	Математична модель БпЛА	6
1.1	Системи координат та перетворення	6
1.1.1	Інерційна та зв'язана системи координат	6
1.1.2	Кути Ейлера	7
1.1.3	Елементарні матриці обертання	7
1.1.4	Матриця напрямних косинусів (DCM)	8
1.1.5	Кінематичні рівняння. Зв'язок кутової швидкості з похідними кутів Ейлера	9
1.1.6	Сингулярність Ейлера та кардан [5, 11]	9
1.1.7	Підсумок підрозділу	10
1.2	Рівняння руху квадрокоптера	10
1.2.1	Сили, що діють на квадрокоптер	10
1.2.2	Поступальна динаміка	11
1.2.3	Обертальна динаміка	11
1.3	Модель актуаторів	12
1.3.1	Конфігурація роторів та напрямки обертання	13
1.3.2	Моделі тяги та реактивного моменту	13
1.3.3	Матриця розподілу керуючих впливів	13
1.4	Представлення у просторі станів	14
1.4.1	Вектор стану та вектор керування	14
1.4.2	Нелінійна модель у просторі станів	14
1.4.3	Аналіз підвизначності системи	15
1.5	Лінеаризація навколо точки рівноваги	15
1.5.1	Точка рівноваги	15
1.5.2	Лінеаризація Якобі	16
1.5.3	Розв'язані підсистеми	16
1.6	Джерела невизначеності та збурень	17
1.6.1	Параметрична невизначеність	17
1.6.2	Непромоделювана динаміка	18
1.6.3	Зовнішні збурення	18
1.6.4	Вплив на якість керування та мотивація адаптивного підходу	18
2	Основи теорії PID-керування	19
2.1	Основи теорії керування	19
2.1.1	Системи керування без зворотного зв'язку та зі зворотним зв'язком	19
2.1.2	Передатні функції та перетворення Лапласа	21
2.1.3	Стійкість динамічних систем	22
2.1.4	Запаси стійкості: фазовий та амплітудний	25
2.1.5	Підсумок підрозділу	26
2.2	PID-регулятор: математичне формулювання	26
2.2.1	Формулювання у часовій області	26
2.2.2	Роль кожної складової	27

2.2.3	Формулювання у частотній (операторній) області	28
2.2.4	Інтерпретація у часовій та частотній областях	29
2.2.5	Дискретизація PID для цифрової реалізації	29
2.3	Методи налаштування PID-регулятора	30
2.3.1	Метод Зіглера–Нікольса	30
2.3.2	Метод розміщення полюсів	31
2.3.3	Частотні методи налаштування	32
2.4	Каскадна PID-архітектура для квадрокоптера	33
2.4.1	Принцип каскадного керування	33
2.4.2	Зовнішній контур: керування позицією	33
2.4.3	Внутрішній контур: керування орієнтацією	34
2.4.4	Контур кутових швидкостей (rate controller)	35
2.4.5	Повна каскадна структура та часові масштаби	35
2.5	Аналіз стійкості PID-керованого квадрокоптера	35
2.5.1	Кореневий годограф	35
2.5.2	Аналіз за діаграмою Боде	36
2.6	Обмеження класичного PID-регулятора	37
2.6.1	Фіксованість коефіцієнтів та зміна умов польоту	38
2.6.2	Незадовільна відробка нелінійностей	38
2.6.3	Відхилення аеродинамічних збурень	38
2.6.4	Загальне порівняння: фіксований PID проти адаптивного керування	39
3	Адаптивна теорія керування	39
3.1	Мотивація та загальна концепція адаптивного керування	40
3.1.1	Що означає “адаптація” математично	40
3.1.2	Класифікація невизначеностей	40
3.2	Математичні основи адаптивного керування	40
3.2.1	Стійкість за Ляпуновим — нагадування та розширення	40
3.2.2	Лема Барбалата	41
3.2.3	Стійкість у сенсі Ляпунова для адаптивних систем	41
3.3	Еталонне адаптивне керування (MRAC)	42
3.3.1	Структура MRAC	42
3.3.2	Спрощена постановка для квадрокоптера	42
3.3.3	Синтез закону керування та адаптації (метод Ляпунова)	42
3.3.4	Фізичний зміст закону адаптації	43
3.3.5	Практичне застосування MRAC до квадрокоптера	43
3.4	Самоналаштувальний регулятор (STR)	44
3.4.1	Ідея та структура	44
3.4.2	Рекурсивний метод найменших квадратів (RLS)	44
3.4.3	Порівняння MRAC та STR	45
3.5	Планування коефіцієнтів (Gain Scheduling)	45
3.5.1	Концепція та математична постановка	45
3.5.2	Застосування до БПЛА	45
3.6	Адаптивний зворотний хід (Adaptive Backstepping)	46
3.6.1	Ідея рекурсивного проектування	46

3.6.2	Застосування до квадрокоптера	47
3.7	Робастність адаптивних систем	47
3.7.1	Проблема робастності	47
3.7.2	σ -модифікація	48
3.7.3	e -модифікація та проекція	48
3.8	Підсумок розділу	48
4	Адаптивний PID-регулятор для БПЛА	49
4.1	Обґрунтування поєднання адаптивних методів із PID	49
4.1.1	Переваги PID-структури як основи	49
4.1.2	Роль адаптації: що вона додає	50
4.1.3	Класифікація підходів	50
4.2	Самоналаштувальний PID (Self-Tuning PID)	50
4.2.1	Принцип та структура	50
4.2.2	Онлайн ідентифікація параметрів квадрокоптера	51
4.2.3	Автоматичне оновлення коефіцієнтів PID	51
4.3	MRAC-PID архітектура	52
4.3.1	Концепція MRAC-PID	52
4.3.2	Еталонна модель та модель помилки	52
4.3.3	Конструкція функції Ляпунова та виведення законів адаптації	52
4.3.4	Практична реалізація MRAC-PID	53
4.4	GS-PID для повного льотного конверту	53
4.4.1	Льотний конверт та режими польоту	53
4.4.2	Коефіцієнти для кожного режиму	54
4.4.3	Інтерполяція та перехідні режими	54
4.5	Параметри симуляції	55
4.5.1	Параметри квадрокоптера	55
4.5.2	Середовище симуляції	55
4.5.3	Початкові умови та задавальний сигнал	55
4.5.4	Сценарії тестування	56
4.5.5	Показники якості	56
4.6	Результати симуляції та аналіз	56
4.6.1	Сценарій 1: Ступінчаста відповідь (номінальний режим)	56
4.6.2	Сценарій 2: Зміна маси у польоті	56
4.6.3	Сценарій 3: Відхилення вітрового пориву	58
4.6.4	Сценарій 4: Вертикальний порив	58
4.7	Обговорення результатів	58
4.7.1	Кількісне підведення підсумків	58
4.7.2	Результат: ST-PID проти MRAC-PID	60
4.7.3	Обмеження та напрямки подальшого дослідження	60

ВСТУП

Обґрунтування актуальності та мотивація дослідження

Останнє десятиліття характеризується стрімким розвитком безпілотних літальних апаратів (БпЛА), що зумовлено прогресом у мікроелектроніці, сенсорикі та алгоритмах обробки даних. Серед різноманіття конструкцій особливе місце посідають системи мультироторного типу, зокрема квадрокоптери. Їхня здатність до вертикального зльоту, зависання в точці та висока маневровість відкривають широкі можливості для застосування: від моніторингу критичної інфраструктури та доставки вантажів до складних пошуково-рятувальних операцій у закритих просторах.

З точки зору прикладної математики, керування БпЛА є класичною, але водночас надзвичайно складною задачею теорії автоматичного керування. Високий рівень зацікавленості цією тематикою зумовлений потребою у забезпеченні прецизійної стабілізації та автономного слідування за траєкторією в умовах динамічного середовища. Математична мотивація дослідження полягає у розробці алгоритмів, здатних ефективно оперувати об'єктом, що має нелінійну динаміку, перехресні зв'язки між каналами керування та обмежений набір керуючих впливів.

Постановка задачі

Попри значну кількість існуючих рішень, задача синтезу високоефективної системи керування квадрокоптером залишається відкритою через низку фундаментальних факторів:

- **Нелінійність та взаємозв'язок:** Динаміка апарату описується системою нелінійних диференціальних рівнянь, де зміна стану в одному каналі (наприклад, крен) неминуче впливає на інші канали через гіроскопічні моменти та зміну вектора тяги.
- **Недокерованість (Underactuation):** Математична модель має шість ступенів вільності, проте керування здійснюється лише чотирьома незалежними входами. Це створює необхідність у каскадних структурах керування, де положення в просторі є похідною від кутової орієнтації.
- **Невизначеність та збурення:** Реальні умови експлуатації супроводжуються зовнішніми збуреннями (пориви вітру, ефект екрана біля поверхні) та варіативністю внутрішніх параметрів (зміна маси, зміщення центру ваги, деградація акумулятора). Класичні методи часто виявляються недостатньо стійкими до таких флуктуацій.

Мета та завдання роботи

Метою даної роботи є дослідження та порівняльний аналіз математичних моделей керування дроном, доведення важливості та створення адаптивного PID-регулятора.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

1. Побудувати математичну модель кінематики та динаміки квадрокоптера на основі формалізму Ньютона-Ейлера [5, 11].

2. Реалізувати та налаштувати класичну систему керування на базі PID-регуляторів як еталон для подальшого порівняння.
3. Дослідити обмеження класичних методів при зміні параметрів системи (маси, інерції) та під впливом зовнішніх шумів.
4. Обґрунтувати необхідність та розробити механізми адаптації (адаптивне керування), що дозволяють системі динамічно підлаштовувати коефіцієнти регулятора під поточні умови польоту.
5. Провести комп'ютерне моделювання розроблених алгоритмів та оцінити їхню ефективність за критеріями точності та робастності.

1 Математична модель БПЛА

1.1 Системи координат та перетворення

Коректний математичний опис руху квадрокоптера у тривимірному просторі вимагає чіткого визначення систем відліку, відносно яких описуються положення, орієнтація та швидкість літального апарату. У цьому підрозділі формалізовано введення двох основних систем координат, побудовано матрицю переходу між ними та виведено кінематичні рівняння, що пов'язують кутову швидкість у зв'язаній системі з похідними кутів Ейлера.

1.1.1 Інерційна та зв'язана системи координат

Розглянемо квадрокоптер як абсолютно тверде тіло масою m із симетричною хрестоподібною конструкцією, що рухається у тривимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$. Для опису його динаміки введемо дві ортонормовані праворукі системи координат.

Інерційна система координат $\mathcal{F}_i$

- Інерційна (або глобальна) система координат $\mathcal{F}_i = \{O_i, \mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i\}$ є фіксованою відносно поверхні Землі. Здебільшого парийнято використовувати систему *North-East-Down* (NED) [4], згідно з якою:

- вісь X_i спрямована на північ,
- вісь Y_i спрямована на схід,
- вісь Z_i спрямована вниз (у напрямку вектора гравітації).

За умови малих висот польоту та обмеженої області оперування вплив кривини Землі є нехтовно малим, тому $\mathcal{F}_i$ вважається інерційною у сенсі першого закону Ньютона. Гравітаційне прискорення у цій системі має вигляд $\mathbf{g} = [0, 0, g]^\top$, де $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$.

Зв'язана система координат $\mathcal{F}_b$

- зв'язана (або тілесна) система координат $\mathcal{F}_b = \{O_b, \mathbf{e}_1^b, \mathbf{e}_2^b, \mathbf{e}_3^b\}$ має початок у центрі мас квадрокоптера та жорстко з'єднана з корпусом апарату. Орієнтація осей визначається таким чином:

- вісь X_b збігається з повздовжньою віссю рами (напрямок “вперед”),
- вісь Y_b спрямована вліво (поперечна вісь),
- вісь Z_b спрямована вгору відносно корпусу апарату.

На відміну від $\mathcal{F}_i$, система $\mathcal{F}_b$ є нефіксованою і в загальному випадку одночасно переміщується і обертається разом з апаратом. Вимірювання бортових датчиків — акселерометра та гіроскопа — надаються саме у зв'язаній системі, тоді як закони керування формуються відносно інерційної.

1.1.2 Кути Ейлера

Орієнтація квадрокоптера у просторі — тобто взаємне розташування систем $\mathcal{F}_b$ та $\mathcal{F}_i$ — параметризується за допомогою кутів Ейлера. У задачах керування БПЛА найпоширенішою є угода ZYX (відома також як *yaw-pitch-roll*), що визначає три кути:

- $\phi \in (-\pi, \pi]$ — *кут крену* (roll): обертання навколо осі X_b ,
- $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ — *кут тангажу* (pitch): обертання навколо осі Y_b ,
- $\psi \in (-\pi, \pi]$ — *кут ристання* (yaw): обертання навколо осі Z_i .

Геометричний зміст кожного кута такий: ψ визначає курс апарату у горизонтальній площині, θ описує нахил уздовж повздовжньої осі, а ϕ — нахил уздовж поперечної осі.

1.1.3 Елементарні матриці обертання

Кожному куту Ейлера відповідає елементарна матриця обертання у групі $SO(3)$. Матриці обертань навколо осей X , Y та Z відповідно:

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Кожна з матриць (1)–(3) є елементом спеціальної ортогональної групи $SO(3)$, тобто задовольняє умовам:

$$R^\top R = I_3, \quad \det(R) = +1.$$

1.1.4 Матриця напрямних косинусів (DCM)

Повна матриця переходу від зв'язаної системи до інерційної — *матриця напрямних косинусів* (Direction Cosine Matrix, DCM) — визначається як послідовний добуток трьох елементарних обертань у порядку ZYX:

$$R_b^i = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi). \quad (4)$$

Порядок множення у (4) є принципово важливим: матричне множення не є комутативним, тому послідовність обертань ZYX фізично означає, що спочатку виконується обертання навколо інерційної осі Z на кут ψ , потім — навколо проміжної осі Y на кут θ , і, нарешті, навколо осі X на кут ϕ .

Після виконання матричного добутку отримуємо явний вираз для R_b^i :

$$R_b^i = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де для стислості введено позначення $s_\alpha \equiv \sin \alpha$, $c_\alpha \equiv \cos \alpha$.

Матриця $R_b^i \in SO(3)$ успадковує всі властивості групи спеціальних ортогональних матриць:

$$(R_b^i)^\top = (R_b^i)^{-1} = R_i^b, \quad (6)$$

$$\det(R_b^i) = 1. \quad (7)$$

Властивість (6) є математичним виразом того факту, що обернення обертання збігається з його транспонуванням, що фізично означає зворотній перехід від інерційної системи до зв'язаної.

Перетворення векторів

Якщо $\mathbf{v}^b \in \mathbb{R}^3$ — вектор, виражений у зв'язаній системі, то його координати в інерційній системі визначаються як:

$$\mathbf{v}^i = R_b^i \mathbf{v}^b, \quad (8)$$

і навпаки, $\mathbf{v}^b = (R_b^i)^\top \mathbf{v}^i$. Зокрема, зв'язок між швидкостями центра мас:

$$\dot{\mathbf{r}} = R_b^i \dot{\mathbf{v}}^b, \quad (9)$$

де $\dot{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3$ — швидкість у інерційній системі, $\dot{\mathbf{v}}^b = [u, v, w]^\top$ — складові швидкості у зв'язаній системі. [4, 5]

1.1.5 Кінематичні рівняння. Зв'язок кутової швидкості з похідними кутів Ейлера

Бортовий гіроскоп вимірює вектор кутової швидкості апарату у зв'язаній системі координат:

$$\boldsymbol{\omega}^b = [p, q, r]^\top, \quad (10)$$

де p, q, r — проекції кутової швидкості на осі X_b, Y_b, Z_b відповідно. Важливо підкреслити, що $\boldsymbol{\omega}^b$ не є похідною вектора кутів Ейлера $[\phi, \theta, \psi]^\top$. Це пов'язано з тим, що кути Ейлера вимірюються у різних, послідовно змінюваних системах координат, і тому $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ є проекціями на різні осі.

Кінематичне рівняння, що встановлює зв'язок між $\boldsymbol{\omega}^b$ та похідними кутів Ейлера $\dot{\boldsymbol{\eta}} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^\top$, має вигляд:

$$\boldsymbol{\omega}^b = W(\phi, \theta) \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad (11)$$

де матриця W визначається як:

$$W(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Обертаючи рівняння (11), отримаємо явні вирази для похідних кутів Ейлера:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = W^{-1}(\phi, \theta) \boldsymbol{\omega}^b, \quad (13)$$

де обернена матриця W^{-1} існує за умови $\cos \theta \neq 0$ і дорівнює:

$$W^{-1}(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

У розгорнутому вигляді рівняння (13) записуються як:

$$\dot{\phi} = p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta, \quad (15)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi, \quad (16)$$

$$\dot{\psi} = \frac{q \sin \phi + r \cos \phi}{\cos \theta}. \quad (17)$$

[4]

1.1.6 Сингулярність Ейлера та кардан [5, 11]

З рівняння (17) безпосередньо випливає, що при $\theta = \pm 90^\circ$ матриця W стає виродженою ($\det W = 0$), а W^{-1} не існує. Це явище отримало назву *кардан* (gimbal lock): при досягненні критичного кута тангажу втрачається один ступінь свободи обертання, і система диференціальних рівнянь (15)–(17) стає некоректно визначеною.

У контексті даної роботи, де розглядаються режими зависання та маневрування з малими кутами нахилу ($|\theta| \ll 90^\circ$), сингулярність не є критичною. Проте для повномасштабних польотних місій або задач агресивного маневрування слід застосовувати альтернативне представлення орієнтації через *кватерніони* $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$, яке позбавлене цього недоліку та є глобально невиродженим. У даній роботі параметризація кутами Ейлера є достатньою у рамках розглянутого класу задач.

1.1.7 Підсумок підрозділу

Таким чином, у даному підрозділі введено дві системи координат — інерційну $\mathcal{F}_i$ (NED) та зв'язану $\mathcal{F}_b$, — визначено матрицю напрямних косинусів $R_b^i \in SO(3)$ у формі (5) та виведено кінематичні рівняння (15)–(17), що пов'язують вимірювання гіроскопа з еволюцією кутів Ейлера. Отримані співвідношення складають геометричну основу, на якій у наступному підрозділі будується повна система динамічних рівнянь руху квадрокоптера.

1.2 Рівняння руху квадрокоптера

У цьому підрозділі виведено повну систему диференціальних рівнянь, що описує динаміку квадрокоптера як абсолютно твердого тіла у тривимірному просторі. За основу обрано формалізм Ньютона–Ейлера [5, 11], який дозволяє розділити задачу на дві незалежні частини: поступальну та обертальну динаміку.

1.2.1 Сили, що діють на квадрокоптер

Розглянемо квадрокоптер масою m із чотирма роторами, пронумерованими $i = 1, 2, 3, 4$. На апарат діють дві основні сили: сила тяги роторів та сила тяжіння.

Тяга одного ротора

Кожен ротор генерує аеродинамічну силу тяги f_i , що пропорційна квадрату його кутової швидкості:

$$f_i = k_f \Omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (18)$$

[14, 5] де $k_f > 0$ — аеродинамічний коефіцієнт тяги (визначається експериментально або з характеристик ротора), Ω_i — кутова швидкість i -го ротора.

Сумарна тяга

Результуюча сила тяги всіх чотирьох роторів, спрямована вздовж осі $-Z_b$ у зв'язаній системі:

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i = k_f \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2. \quad (19)$$

У векторній формі у зв'язаній системі:

$$\mathbf{F}_T^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Сила тяжіння.

У інерційній системі координат сила тяжіння:

$$\mathbf{F}_g^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = mg \mathbf{e}_3, \quad (21)$$

де $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$, а $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^\top$ — одиничний вектор осі Z_i у NED-конвенції.

1.2.2 Поступальна динаміка

Застосовуємо другий закон Ньютона до центра мас квадрокоптера у інерційній системі відліку:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = R_b^i \mathbf{F}_T^b + \mathbf{F}_g^i, \quad (22)$$

де $\mathbf{r} = [x, y, z]^\top$ — вектор положення центра мас в інерційній системі, R_b^i — матриця напрямних косинусів з підрозділу 2.2. Підставляючи (20) та (21) у (22):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -F R_b^i \mathbf{e}_3 + mg \mathbf{e}_3. \quad (23)$$

Розкриваючи добуток $R_b^i \mathbf{e}_3$ за допомогою третього стовпця матриці (5) та записуючи у скалярній формі, отримуємо три рівняння поступального руху:

$$m\ddot{x} = -F(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi), \quad (24)$$

$$m\ddot{y} = -F(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi), \quad (25)$$

$$m\ddot{z} = mg - F \cos \phi \cos \theta. \quad (26)$$

Рівняння (26) показує, що для стаціонарного зависання ($\ddot{z} = 0$) необхідно виконати умову $F = mg/(\cos \phi \cos \theta)$, яка при малих кутах спрощується до $F \approx mg$.

1.2.3 Обертальна динаміка

Для опису обертального руху квадрокоптера застосовується рівняння Ейлера для твердого тіла у зв'язаній системі координат:

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}^b + \boldsymbol{\omega}^b \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}^b) = \boldsymbol{\tau}, \quad (27)$$

де:

- $\mathbf{I}$ — тензор інерції квадрокоптера відносно центра мас,
- $\boldsymbol{\omega}^b = [p, q, r]^\top$ — вектор кутової швидкості у зв'язаній системі,
- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^\top$ — вектор зовнішніх моментів сил.

Тензор інерції

Завдяки симетрії хрестоподібної рами квадрокоптера та за умови збалансованого розміщення компонентів, тензор інерції набуває діагонального вигляду:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

де I_{xx} , I_{yy} — моменти інерції навколо осей крену та тангажу відповідно, I_{zz} — момент інерції навколо осі ристання. Для квадрокоптера з симетричними плечима виконується $I_{xx} = I_{yy}$.

Гіроскопічний ефект

Обертання роторів спричиняє додатковий гіроскопічний момент, що діє на корпус апарату:

$$\mathbf{\Gamma} = I_r \Omega_{\text{net}} (\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{e}_3), \quad (29)$$

де I_r — момент інерції ротора навколо своєї осі, $\Omega_{\text{net}} = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4$ — результуюча кутова швидкість роторів з урахуванням напрямків обертання. У більшості практичних моделей перший порядку гіроскопічний ефект є малим порівняно з основними моментами та у подальшому нехтується, що є стандартним спрощенням в літературі [5].

Скалярні рівняння обертання

Підставляючи (28) у (27) та виконуючи векторний добуток, отримуємо три скалярні рівняння:

$$\dot{p} = \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} q r + \frac{\tau_\phi}{I_{xx}}, \quad (30)$$

$$\dot{q} = \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} p r + \frac{\tau_\theta}{I_{yy}}, \quad (31)$$

$$\dot{r} = \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} p q + \frac{\tau_\psi}{I_{zz}}. \quad (32)$$

Нелінійні доданки $(I_{yy} - I_{zz})qr/I_{xx}$ тощо є *гіроскопічними зв'язками* між каналами та є суттєвими при великих кутових швидкостях. При лінеаризації навколо точки рівноваги (підрозділ 2.6) ці члени зникають, що призводить до повного розв'язання каналів.

1.3 Модель актуаторів

Зв'язок між фізичними сигналами керування (швидкостями обертання роторів) та узагальненими силами та моментами, що фігурують у рівняннях (19)–(32), встановлюється через *модель актуаторів*. У цьому підрозділі описано конфігурацію роторів та виведено матрицю розподілу керуючих впливів.

1.3.1 Конфігурація роторів та напрямки обертання

Розглядається квадрокоптер у конфігурації “×” (Х-конфігурація): чотири ротори розміщені симетрично на плечах однакової довжини l під кутами 45° до повздовжньої осі X_b . Нумерація роторів та напрямки їх обертання наведені у таблиці 1.

Table 1: Конфігурація роторів квадрокоптера (Х-конфігурація)

Ротор	Позиція	Напрямок обертання	Знак моменту реакції
1	передній лівий	за год. стрілкою (CW)	+
2	передній правий	проти год. стрілки (CCW)	−
3	задній правий	за год. стрілкою (CW)	+
4	задній лівий	проти год. стрілки (CCW)	−

Чергування напрямків обертання гарантує, що в режимі зависання при $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4$ реактивні моменти роторів компенсують один одного, і результируючий момент рискання дорівнює нулю.

1.3.2 Моделі тяги та реактивного моменту

Аеродинамічна тяга та реактивний момент кожного ротора моделюються квадратичними залежностями від кутової швидкості:

$$f_i = k_f \Omega_i^2, \quad \tau_i^{\text{react}} = k_\tau \Omega_i^2, \quad (33)$$

де k_f [Н·с²/рад²] — коефіцієнт тяги, k_τ [Н·м·с²/рад²] — коефіцієнт реактивного моменту. Відношення $\gamma = k_\tau/k_f$ є конструктивною константою ротора.

1.3.3 Матриця розподілу керуючих впливів

Узагальнені керуючі входи — сумарна тяга F та три моменти $\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$ — виражаються через квадрати кутових швидкостей роторів Ω_i^2 за допомогою *матриці розподілу* $\mathbf{M}$:

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

де для Х-конфігурації:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k_f & k_f & k_f & k_f \\ \frac{k_f}{\sqrt{2}} & \frac{k_f}{\sqrt{2}} & \frac{k_f}{\sqrt{2}} & -\frac{k_f}{\sqrt{2}} \\ \frac{k_f}{\sqrt{2}} & -\frac{k_f}{\sqrt{2}} & \frac{k_f}{\sqrt{2}} & \frac{k_f}{\sqrt{2}} \\ k_\tau & -k_\tau & k_\tau & -k_\tau \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Матриця $\mathbf{M}$ є невиворотною ($\det \mathbf{M} \neq 0$) за умови $k_f \neq 0$, $k_\tau \neq 0$, $l \neq 0$, що гарантує однозначне відновлення швидкостей роторів за заданими керуючими

впливами:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Це відповідне співвідношення є ключовим у реалізації систем керування: регулятор формує вектор $[F, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^\top$, після чого (36) перетворює його на команди швидкостей для кожного мотора окремо.

1.4 Представлення у просторі станів

Рівняння, отримані у підрозділах 2.2–2.4, утворюють замкнену систему диференціальних рівнянь першого порядку. У цьому підрозділі вони зводяться до стандартної форми простору станів, що є природною мовою теорії керування.

1.4.1 Вектор стану та вектор керування

Введемо вектор стану розмірності 12:

$$\mathbf{x} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, p, q, r]^\top \in \mathbb{R}^{12}, \quad (37)$$

та вектор керуючих входів:

$$\mathbf{u} = [F, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^\top \in \mathbb{R}^4. \quad (38)$$

Перші шість компонент $\mathbf{x}$ — *конфігураційні змінні* (положення та кути орієнтації), останні шість — *швидкісні змінні* (лінійні та кутові швидкості).

1.4.2 Нелінійна модель у просторі станів

Збираючи кінематичні рівняння (15)–(17), рівняння поступального руху (24)–(26) та рівняння обертання (30)–(32), отримуємо нелінійну систему у просторі станів:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (39)$$

де вектор-функція $f : \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{12}$ визначається явно таким чином:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ \frac{q \sin \phi + r \cos \phi}{\cos \theta} \\ -\frac{F}{m} (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ -\frac{F}{m} (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ g - \frac{F}{m} \cos \phi \cos \theta \\ \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} qr + \frac{\tau_\phi}{I_{xx}} \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr + \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq + \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

1.4.3 Аналіз підвиконаності системи

Система (40) має $n = 12$ степенів свободи у просторі станів та $m = 4$ керуючих входи. Оскільки $m < n$, квадрокоптер є *підвиконаною* (underactuated) системою: неможливо незалежно керувати всіма 12 змінними стану одночасно.

Зокрема, бічне положення (x, y) не може бути змінено безпосередньо — воно підлягає керуванню лише через зміну кутів θ та ϕ відповідно, що у свою чергу вимагає використання відповідних моментів τ_θ та τ_ϕ . Такий *каскадний* характер керування є фундаментальною особливістю квадрокоптера та визначає архітектуру регуляторів, що розглядаються у розділі 3.

1.5 Лінеаризація навколо точки рівноваги

Нелінійна модель (40) є достатньо загальною, але безпосередньо непридатна для синтезу лінійних регуляторів (зокрема, PID-регуляторів розділу 3). У цьому підрозділі виконується стандартна процедура лінеаризації Якобі навколо рівноважного стану — режиму зависання.

1.5.1 Точка рівноваги

Режим зависання визначається як стаціонарний стан, у якому квадрокоптер нерухомо утримує фіксоване положення та нульову орієнтацію:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_{12}, \quad \mathbf{u}_0 = [mg, 0, 0, 0]^\top. \quad (41)$$

Дійсно, підстановка (41) у (40) дає $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, що підтверджує стаціонарність точки.

1.5.2 Лінеаризація Якобі

Позначимо відхилення від рівноваги: $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$. Розкладаючи $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ у ряд Тейлора першого порядку навколо $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ та нехтуючи членами вищих порядків малості, отримуємо лінеаризовану систему:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = A \delta \mathbf{x} + B \delta \mathbf{u}, \quad (42)$$

де матриці Якобі:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}. \quad (43)$$

При $\phi = \theta = \psi = 0$ тригонометричні функції спрощуються: $\sin(\cdot) \approx 0$, $\cos(\cdot) \approx 1$. Це дозволяє отримати явні вирази для ненульових блоків матриць A та B .

1.5.3 Розв'язані підсистеми

Ключовим результатом лінеаризації є те, що повна 12×12 система (42) *розпадається* на чотири незалежні підсистеми меншої розмірності.

Підсистема висоти

Змінні стану: $[z, \dot{z}]^\top$. Вхід: δF .

$$[\delta \ddot{z}] = -\frac{1}{m} \delta F. \quad (44)$$

Передатна функція: $G_z(s) = -1/(ms^2)$ – подвійний інтегратор.

Поздовжня підсистема (тангаж–переміщення по x)

Змінні стану: $[\delta \theta, \delta q, \delta x, \delta \dot{x}]^\top$. Вхід: $\delta \tau_\theta$.

$$\delta \dot{q} = \frac{1}{I_{yy}} \delta \tau_\theta, \quad (45)$$

$$\delta \dot{\theta} = \delta q, \quad (46)$$

$$\delta \ddot{x} = g \delta \theta. \quad (47)$$

Бічна підсистема (крен–переміщення по y)

Змінні стану: $[\delta \phi, \delta p, \delta y, \delta \dot{y}]^\top$. Вхід: $\delta \tau_\phi$.

$$\delta \dot{p} = \frac{1}{I_{xx}} \delta \tau_\phi, \quad (48)$$

$$\delta \dot{\phi} = \delta p, \quad (49)$$

$$\delta \ddot{y} = -g \delta \phi. \quad (50)$$

Підсистема рискання

Змінні стану: $[\delta\psi, \delta r]^\top$. Вхід: $\delta\tau_\psi$.

$$\delta\dot{r} = \frac{1}{I_{zz}} \delta\tau_\psi, \quad \delta\dot{\psi} = \delta r. \quad (51)$$

1.6 Джерела невизначеності та збурень

Математична модель (40), виведена у попередніх підрозділах, ґрунтується на ряді ідеалізуючих припущень: постійність параметрів, відсутність зовнішніх впливів, ідеальна жорсткість конструкції. На практиці жодне з цих припущень не виконується строго, що призводить до відхилень між поведінкою моделі та реального об'єкта. У цьому підрозділі систематизуються основні джерела невизначеності та обґрунтовується необхідність застосування адаптивних методів керування.

1.6.1 Параметрична невизначеність

Параметрична невизначеність виникає, коли числові значення параметрів моделі відомі лише наближено або змінюються в процесі польоту.

Невизначеність маси

Реальна маса квадрокоптера під час польоту може відрізнятися від номінального значення m_0 внаслідок зміни корисного навантаження або витрати заряду акумулятора:

$$m = m_0 + \Delta m(t), \quad |\Delta m| \leq \delta_m, \quad (52)$$

де $\delta_m > 0$ — відома верхня межа відхилення. Зміна маси безпосередньо впливає на рівновагу (41): номінальна тяга зависання $F_0 = m_0 g$ вже не компенсує силу тяжіння mg .

Невизначеність тензора інерції.

Розміщення корисного навантаження або деформація рами призводять до відхилення тензора інерції від номінального:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \Delta\mathbf{I}, \quad \|\Delta\mathbf{I}\| \leq \delta_I. \quad (53)$$

Оскільки $\mathbf{I}$ входить у знаменники рівнянь (30)–(32), навіть невелике $\Delta\mathbf{I}$ може суттєво змінити динаміку обертання.

Похибки аеродинамічних коефіцієнтів

Коефіцієнти k_f та k_τ у моделі (33) визначаються за стаціонарними характеристиками ротора і можуть дрейфувати внаслідок зносу, температурних ефектів або зміни густини повітря з висотою:

$$k_f = k_{f,0}(1 + \epsilon_f(t)), \quad |\epsilon_f| \leq \bar{\epsilon}_f. \quad (54)$$

1.6.2 Непромодельована динаміка

Ряд фізичних ефектів навмисно не включено до моделі (40) з метою збереження її аналітичної прозорості.

- **Динаміка моторів:** Реальний електричний мотор з ESC (Electronic Speed Controller) описується аперіодичною ланкою першого порядку $G_m(s) = 1/(\tau_m s + 1)$, де $\tau_m \approx 10\text{--}50$ мс. Модель (33) передбачає миттєве відпрацювання команди ($\tau_m = 0$).
- **Флапінг лопатей:** При поступальному русі лопаті ротора зазнають аеродинамічного флапінгу, що генерує додаткові горизонтальні сили, не враховані у (20).
- **Ефект землі:** При польоті на малих висотах (менше одного діаметра ротора) виникає додаткове аеродинамічне підсилення тяги внаслідок взаємодії з поверхнею.
- **Гнучкість конструкції:** Реальна рама квадрокоптера не є абсолютно жорсткою тілом, що при певних частотах збудження може призвести до резонансних коливань.

1.6.3 Зовнішні збурення

Зовнішні збурення моделюються як адитивні члени у рівняннях руху. Поривний вітер вводиться як додаткова сила $\mathbf{d}_F(t) \in \mathbb{R}^3$ та момент $\mathbf{d}_\tau(t) \in \mathbb{R}^3$, що діють на корпус апарату:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = R_b^i \mathbf{F}_T^b + \mathbf{F}_g^i + \mathbf{d}_F(t), \quad (55)$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}^b + \boldsymbol{\omega}^b \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^b) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}_\tau(t). \quad (56)$$

Щодо характеристик збурень приймається стандартне припущення про їх обмеженість:

$$\|\mathbf{d}_F(t)\| \leq d_F^{\max}, \quad \|\mathbf{d}_\tau(t)\| \leq d_\tau^{\max} \quad \forall t \geq 0. \quad (57)$$

1.6.4 Вплив на якість керування та мотивація адаптивного підходу

Усі перелічені чинники — параметрична невизначеність (52)–(53), непромодельована динаміка та збурення (57) — мають спільний наслідок: реальний об'єкт керування відрізняється від моделі, на основі якої синтезовано регулятор.

Класичний PID-регулятор із фіксованими коефіцієнтами, налаштованими для номінальної моделі $(\mathbf{x}_0, m_0, \mathbf{I}_0)$, у загальному випадку не забезпечує бажаних показників якості при відхиленнях параметрів. Зокрема:

- зміна маси Δm порушує баланс тяги та призводить до дрейфу по висоті,
- відхилення $\Delta \mathbf{I}$ змінює власні частоти підсистем обертання та може спричинити коливальну нестійкість,

- постійні поривні збурення $\mathbf{d}_F$ призводять до ненульових статичних похибок, якщо регулятор не має достатнього інтегрального підсилення.

Саме ці обставини зумовлюють необхідність застосування *адаптивних методів керування*, здатних в режимі реального часу коригувати параметри регулятора відповідно до поточного стану об'єкта. Теоретичні основи та конкретні алгоритми адаптивного керування детально розглядаються у розділі 4.

2 Основи теорії PID-керування

2.1 Основи теорії керування

Теорія автоматичного керування вивчає методи цілеспрямованого впливу на динамічні системи з метою досягнення бажаної поведінки. У цьому підрозділі закладається математичний фундамент, необхідний для розуміння як класичних PID-регуляторів (підрозділ 3.2–3.4), так і адаптивних методів керування (розділ 4). Матеріал викладено від загальних принципів організації систем керування до строгих математичних критеріїв їх стійкості.

2.1.1 Системи керування без зворотного зв'язку та зі зворотним зв'язком

Розімкнена система керування.

Найпростішою архітектурою керування є *розімкнена* (open-loop) система, у якій керуючий сигнал $u(t)$ формується виключно на основі зовнішнього задавального сигналу $r(t)$ без урахування поточного стану об'єкта. Структурна схема такої системи:

$$r(t) \longrightarrow \boxed{C(s)} \longrightarrow u(t) \longrightarrow \boxed{P(s)} \longrightarrow y(t), \quad (58)$$

де $C(s)$ — передатна функція регулятора, $P(s)$ — передатна функція об'єкта, $y(t)$ — вихід системи.

Передатна функція розімкненої системи від входу r до виходу y :

$$G_{ol}(s) = C(s) \cdot P(s). \quad (59)$$

Недолік розімкненої системи. Якщо параметри об'єкта $P(s)$ відхиляються від номінальних (що є типовим для квадрокоптера, як показано у підрозділі 2.7), або на об'єкт діє зовнішнє збурення $d(t)$, то вихід $y(t)$ відхиляється від бажаного значення, і регулятор $C(s)$ не має жодного механізму для корекції цього відхилення. Саме тому розімкнені системи застосовуються лише у задачах, де параметри об'єкта добре відомі та стабільні.

Замкнена система керування зі зворотним зв'язком

У *замкненій* (closed-loop) системі вихід об'єкта $y(t)$ вимірюється та порівнюється із задавальним сигналом $r(t)$. Різниця між ними — *сигнал помилки*:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (60)$$

— подається на вхід регулятора, який формує керуючий вплив $u(t)$ таким чином, щоб зменшити $e(t)$. Структурна схема:

$$r(t) \longrightarrow \bigoplus \longrightarrow \boxed{C(s)} \longrightarrow u(t) \longrightarrow \boxed{P(s)} \longrightarrow y(t) \longrightarrow \text{(зворотний зв'язок)} \quad (61)$$

де $\bigoplus$ позначає суматор із від'ємним зворотним зв'язком. Передатна функція замкненої системи від r до y :

$$\boxed{G_{cl}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}} \quad (62)$$

Вираз $C(s)P(s)$ у знаменнику (62) називається *передатною функцією розімкненого контуру* (loop transfer function) та є центральним об'єктом аналізу у частотних методах теорії керування.

Вплив збурень та чутливість

Нехай на об'єкт діє адитивне збурення $d(t)$ на виході:

$$Y(s) = P(s)[U(s) + D(s)], \quad (63)$$

де $D(s) = \mathcal{L}\{d(t)\}$. У замкненій системі вихід:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}}_{\text{до задання}} R(s) + \underbrace{\frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}}_{\text{до збурення}} D(s). \quad (64)$$

Функція чутливості:

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} \quad (65)$$

характеризує, наскільки ефективно зворотний зв'язок пригнічує збурення та помилки моделювання. При великому $|C(j\omega)P(j\omega)|$ маємо $S(j\omega) \approx 0$ — збурення на частоті ω майже повністю відхиляється. Саме тому *зворотний зв'язок є фундаментальним механізмом підвищення робастності системи керування*.

Застосування до квадрокоптера

У контексті керування БПЛА:

- задавальний сигнал $r(t)$ — бажане положення або орієнтація апарату,
- вихід $y(t)$ — виміряне значення з бортових датчиків (IMU, GPS, барометр),
- помилка $e(t)$ — відхилення поточного стану від бажаного,
- керуючий вплив $u(t)$ — команди тяги та моментів для моторів.

Оскільки параметри квадрокоптера є невизначеними (підрозділ 2.7), зворотний зв'язок є не опцією, а необхідністю.

2.1.2 Передатні функції та перетворення Лапласа

Передатні функції є основним інструментом аналізу лінійних стаціонарних систем у частотній області. У цьому підрозділі викладено математичний апарат, необхідний для їх застосування.

Перетворення Лапласа

Одностороннє перетворення Лапласа функції $f(t)$, визначеної для $t \geq 0$:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (66)$$

де $s = \sigma + j\omega$ — комплексна змінна. Перетворення Лапласа переводить диференціальні рівняння з часової області у алгебраїчні рівняння у комплексній площині s , що є його головною практичною перевагою.

Ключові властивості, що використовуються у теорії керування:

Table 2: Основні властивості перетворення Лапласа

Операція у часі	Образ у s -площині	Умова
$f(t)$	$sF(s) - f(0^-)$	нульові початкові умови: $sF(s)$
$\dot{f}(t)$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$	н.п.у.: $s^2 F(s)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$F(s)/s$	
$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$	зсув у s -площині
$f(t - \tau)$	$e^{-\tau s} F(s)$	затримка у часі

Визначення передатної функції

Для лінійної стаціонарної системи, що описується звичайним диференціальним рівнянням:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u, \quad (67)$$

передатна функція визначається як відношення перетворень Лапласа виходу та входу при нульових початкових умовах:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (68)$$

Для фізично реалізованих систем виконується умова *правильності* (properness): $m \leq n$.

Полюси та нулі

Передатну функцію (68) можна записати у факторизованому вигляді:

$$P(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}, \quad (69)$$

де:

- z_i — нулі передатної функції: значення s , при яких $P(s) = 0$,
- p_i — полюси передатної функції: значення s , при яких $P(s) \rightarrow \infty$,
- K — коефіцієнт підсилення (gain).

Полюси та нулі є комплексними числами і повністю визначають частотну та часову поведінку системи (з точністю до K).

Приклад: підсистема висоти квадрокоптера

Зі співвідношення (44) рівняння руху по висоті у лінеаризованій системі:

$$m\delta\ddot{z} = -\delta F \Rightarrow \frac{\Delta Z(s)}{\Delta F(s)} = \frac{-1}{ms^2}. \quad (70)$$

Передатна функція є *подвійним інтегратором* із двома полюсами $p_{1,2} = 0$ у початку координат s -площини. Це означає, що без регулятора система є *нейтрально стійкою* — нескінченно малий постійний вхід δF призведе до нескінченно зростаючого відхилення δz при $t \rightarrow \infty$.

Частотна характеристика

Підстановка $s = j\omega$ у передатну функцію дає *частотну передатну функцію*:

$$P(j\omega) = P(s)|_{s=j\omega}, \quad (71)$$

яка характеризує реакцію системи на гармонічний вхід $u(t) = A \sin(\omega t)$: амплітуда виходу масштабується на $|P(j\omega)|$, а фаза зсувається на $\angle P(j\omega)$. Графічне зображення $|P(j\omega)|$ та $\angle P(j\omega)$ у логарифмічному масштабі — *діаграма Бode* — є основним інструментом аналізу запасів стійкості у частотній області.

2.1.3 Стійкість динамічних систем

Стійкість є центральною вимогою до будь-якої системи керування: нестійка система може генерувати необмежено зростаючі сигнали керування, що у випадку БПЛА призводить до катастрофічних наслідків. У теорії керування існує декілька математично строгих концепцій стійкості, кожна з яких описує різний аспект поведінки системи.

Стійкість за Ляпуновим

Концепція стійкості за Ляпуновим є найбільш загальною та застосовується до *нелінійних* систем вигляду:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (72)$$

де $f(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ для всіх t (тобто $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ є точкою рівноваги).

Означення 1 (Стійкість за Ляпуновим). Точка рівноваги $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ системи (72) називається *стійкою* за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0. \quad (73)$$

Іншими словами, траєкторія, що починається достатньо близько до рівноваги, залишається в її околі назавжди. Якщо до цього додається умова $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то рівновага називається *асимптотично стійкою*.

Означення 2 (Глобальна асимптотична стійкість). Точка рівноваги $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ є глобально асимптотично стійкою (GAS), якщо вона є стійкою за Ляпуновим і $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для будь-якого початкового стану $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$.

Пряма теорема Ляпунова [9] (метод функцій Ляпунова) дає конструктивний інструмент для доведення стійкості без необхідності явно розв’язувати систему (72).

Теорема 1 (Пряма теорема Ляпунова). Нехай існує неперервно диференційовна скалярна функція $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняє умовам:

1. $V(\mathbf{0}) = 0$ та $V(\mathbf{x}) > 0$ для всіх $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (позитивна визначеність),
2. $\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V \cdot f(\mathbf{x}) \leq 0$ для всіх $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (від’ємна напіввизначеність похідної).

Тоді точка рівноваги $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ є стійкою за Ляпуновим. Якщо додатково виконується $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ для $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то рівновага є асимптотично стійкою.

Функція $V(\mathbf{x})$, що задовольняє умовам теореми 1, називається *функцією Ляпунова*. Геометрично вона є узагальненням поняття “енергії” системи: умова $\dot{V} \leq 0$ означає, що “енергія” системи не зростає вздовж траєкторій, а умова $\dot{V} < 0$ — що вона монотонно спадає до нуля.

Приклад: стійкість лінійної системи. Розглянемо лінійну систему $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Оберемо квадратичну функцію Ляпунова $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top P \mathbf{x}$, де $P = P^\top \succ 0$. Тоді:

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{x}}^\top P \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top P \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^\top (A^\top P + P A) \mathbf{x}. \quad (74)$$

Умова $\dot{V} < 0$ виконується тоді і лише тоді, коли матриця:

$$Q = -(A^\top P + P A) \succ 0, \quad (75)$$

тобто коли рівняння Ляпунова $A^\top P + P A = -Q$ має розв’язок $P \succ 0$ для деякої $Q \succ 0$. Це еквівалентно тому, що всі власні значення матриці A мають від’ємну дійсну частину.

Чому метод Ляпунова важливий для адаптивного керування? Метод Ляпунова є основним інструментом аналізу та синтезу адаптивних регуляторів (розділ 4). На відміну від лінійних систем, де стійкість визначається полюсами, для нелінійних адаптивних систем побудова функції Ляпунова є єдиним строгим методом доведення збіжності похибки керування до нуля та стабільності законів адаптації.

Обмежена вхідна обмежена вихідна стійкість (BIBO)

Для лінійних стаціонарних систем, що описуються передатними функціями, введено концепцію *BIBO-стійкості* (Bounded-Input Bounded-Output stability — стійкість “обмежений вхід — обмежений вихід”) [13].

Означення 3 (BIBO-стійкість). Система є BIBO-стійкою, якщо для будь-якого обмеженого вхідного сигналу $u(t)$, тобто такого, що $\sup_{t \geq 0} |u(t)| \leq M_u < \infty$, відповідний вихідний сигнал $y(t)$ також є обмеженим: $\sup_{t \geq 0} |y(t)| \leq M_y < \infty$.

Теорема 2 (Критерій BIBO-стійкості). Лінійна стаціонарна система з передатною функцією $G(s)$ та імпульсною перехідною функцією $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ є BIBO-стійкою тоді і лише тоді, коли виконується умова абсолютної інтегровності:

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty, \quad (76)$$

що еквівалентно умові: всі полюси $G(s)$ лежать у відкритій лівій напівплощині $\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) < 0\}$.

Зв'язок між BIBO та стійкістю за Ляпуновим. Для лінійних мінімально-фазових систем (без нестійких прихованих мод) ці дві концепції є еквівалентними. Для нелінійних систем — ні: BIBO-стійкість є властивістю вхідно-вихідної поведінки і не дає інформації про внутрішні стани. Саме тому у теорії адаптивного керування, де необхідно контролювати як похибку виходу, так і еволюцію параметрів адаптації, метод Ляпунова є більш інформативним.

Розташування полюсів та характер перехідного процесу

Для лінійних систем розташування полюсів замкненої системи у комплексній s -площині повністю визначає якість перехідного процесу. Нехай $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ — k -й полюс замкненої системи. Відповідна мода перехідного процесу:

$$g_k(t) \sim e^{p_k t} = e^{\sigma_k t} (\cos(\omega_k t) + j \sin(\omega_k t)). \quad (77)$$

З (77) безпосередньо випливають правила:

Table 3: Вплив розташування полюсів на характер перехідного процесу

Розташування полюса	Характер моди	Висновок
$\sigma_k < 0, \omega_k = 0$	$e^{\sigma_k t} \rightarrow 0$	Аперіодичне загасання
$\sigma_k < 0, \omega_k \neq 0$	$e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t) \rightarrow 0$	Загасаючі коливання
$\sigma_k = 0, \omega_k \neq 0$	$\cos(\omega_k t) = \text{const}$	Незгасаючі коливання
$\sigma_k = 0, \omega_k = 0$	$\text{const} \neq 0$	Нейтральна стійкість
$\sigma_k > 0$	$e^{\sigma_k t} \rightarrow \infty$	Нестійкість

Таким чином, необхідною і достатньою умовою стійкості лінійної системи є розташування всіх полюсів її передатної функції у відкритій лівій напівплощині s -площини.

Домінуючі полюси та показники якості

На практиці для систем вищого порядку зазвичай виділяють домінуючу пару полюсів — пару комплексно-спряжених полюсів $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, що є найближчими до уявної осі та найповільніше загасають. Параметри:

- $\omega_n > 0$ — власна частота незатухаючих коливань,
- $\zeta \in [0, 1)$ — коефіцієнт демпфування.

Ці два параметри безпосередньо пов'язані з основними показниками якості перехідного процесу:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad \text{— час регулювання (5\% критерій),} \quad (78)$$

$$\sigma_{\%} = 100 e^{-\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{— перерегулювання, \%}, \quad (79)$$

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \quad \text{— час наростання.} \quad (80)$$

Формули (78)–(80) є ключовими при налаштуванні PID-регуляторів: задача налаштування зводиться до вибору коефіцієнтів K_p , K_i , K_d , що розміщують полюси замкненої системи у бажаній точці s -площини. [13]

Критерій Рауса–Гурвіця

Для перевірки стійкості без явного обчислення полюсів використовується *критерій Рауса–Гурвіця*. Характеристичний поліном замкненої системи:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (81)$$

[13, 6] *Необхідна умова*: всі коефіцієнти a_i мають бути одного знаку. *Необхідна і достатня умова* (критерій Гурвіця): всі головні мінори матриці Гурвіця, побудованої на коефіцієнтах a_i , мають бути додатними. Для систем другого порядку умова стійкості є особливо простою: $a_0, a_1, a_2 > 0$.

2.1.4 Запаси стійкості: фазовий та амплітудний

Теоретична умова $\text{Re}(p_k) < 0$ гарантує стійкість для номінальної моделі. Однак через параметричну невизначеність (підрозділ 2.7) реальна система відрізняється від моделі, тому важливо знати, *наскільки далеко* система перебуває від межі нестійкості. Ці відстані вимірюються *запасами стійкості*.

Фазовий запас (Phase Margin, PM)

$$\text{PM} = 180^\circ + \angle C(j\omega_c)P(j\omega_c), \quad (82)$$

де ω_c — *частота зрізу*: частота, при якій $|C(j\omega_c)P(j\omega_c)| = 1$ (0 дБ). Фізичний зміст: PM показує, на скільки градусів можна додатково затримати (зсунути фазу) сигнал у контурі, перш ніж система стане нестійкою. Рекомендований мінімум: $\text{PM} \geq 45^\circ$.

Амплітудний запас (Gain Margin, GM)

$$\text{GM} = \frac{1}{|C(j\omega_\pi)P(j\omega_\pi)|}, \quad (83)$$

де ω_π — частота фазового перетину: частота, при якій $\angle C(j\omega_\pi)P(j\omega_\pi) = -180^\circ$. GM показує, у скільки разів можна збільшити підсилення контуру до втрати стійкості. Рекомендований мінімум: $GM \geq 6$ дБ.

Для квадрокоптера з його значними параметричними невизначеностями забезпечення достатніх запасів стійкості є критично важливим, особливо в умовах вітрових збурень та зміни корисного навантаження.

2.1.5 Підсумок підрозділу

У цьому підрозділі закладено математичну основу теорії керування, необхідну для подальшого аналізу:

- встановлено принципову перевагу замкнених систем керування над розімкненими у задачах з параметричною невизначеністю та зовнішніми збуреннями;
- введено апарат передатних функцій та перетворення Лапласа як основний інструмент аналізу лінійних систем у частотній області;
- сформульовано три концепції стійкості: *стійкість за Ляпуновим* (пряма теорема, функції Ляпунова) для нелінійних систем; *BIBO-стійкість* для лінійних систем із зовнішніми входами; *стійкість за розташуванням полюсів* із кількісними показниками якості перехідного процесу;
- введено поняття запасів стійкості як практичних міри робастності.

Метод Ляпунова, введений у теоремі 1, буде систематично використовуватися у розділі 4 для аналізу та синтезу адаптивних законів керування, де нелінійний характер системи унеможливує застосування частотних методів у їх класичній формі.

2.2 PID-регулятор: математичне формулювання

Пропорційно-інтегрально-диференціальний (PID) регулятор є найпоширенішим алгоритмом керування у промисловості та робототехніці. За оцінками, понад 90% усіх регуляторів у реальних системах є PID або його спрощеннями [1]. Популярність PID пояснюється поєднанням математичної прозорості, простоти реалізації та достатньої ефективності для широкого класу задач, включаючи стабілізацію квадрокоптерів. У цьому підрозділі наведено строге математичне формулювання PID-регулятора та детально проаналізовано роль кожного з його складових.

2.2.1 Формулювання у часовій області

Нехай $e(t) = r(t) - y(t)$ — сигнал помилки керування (відхилення виходу від задавального сигналу). PID-регулятор формує керуючий сигнал $u(t)$ за таким законом:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \dot{e}(t) \quad (84)$$

де:

- $K_p > 0$ — пропорційний коефіцієнт (proportional gain),
- $K_i \geq 0$ — інтегральний коефіцієнт (integral gain),
- $K_d \geq 0$ — диференціальний коефіцієнт (derivative gain).

Рівняння (84) можна переписати у компактній формі:

$$u(t) = u_P(t) + u_I(t) + u_D(t), \quad (85)$$

де кожна складова відповідає за окремий аспект керування. Розглянемо їх детально.

2.2.2 Роль кожної складової

Пропорційна складова $u_P(t) = K_p e(t)$

Пропорційна складова формує керуючий вплив, пропорційний *поточній* помилці. Чим більша помилка — тим більший вплив. Це забезпечує основне “відштовхування” стану системи до бажаного значення.

Однак пропорційний регулятор ($K_i = K_d = 0$) у замкненій системі з об’єктом $P(s)$ формує передатну функцію:

$$G_{cl}(s) = \frac{K_p P(s)}{1 + K_p P(s)}. \quad (86)$$

Для об’єктів, що не містять інтегратора, (86) при $s = 0$ дає:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{K_p P(0)}{1 + K_p P(0)} \cdot r \neq r \quad (\text{при } P(0) < \infty). \quad (87)$$

Це означає, що чисто пропорційний регулятор *не усуває статичну похибку*: навіть при $t \rightarrow \infty$ залишається ненульова різниця між r і y . Збільшення K_p зменшує цю похибку, але ціною зменшення запасів стійкості та появи коливань.

Інтегральна складова $u_I(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$

Інтегральна складова накопичує суму усіх *минулих помилок*. Її головна роль — усунення статичної похибки. Якщо $e(t) \neq 0$ постійно, інтегральна складова накопичується до тих пір, поки не стане достатньо великою, щоб скомпенсувати збурення або невідповідність моделі.

Формально: у усталеному режимі $\dot{u}_I = K_i e$. Якщо $y(\infty) \neq r$, то $e \neq 0$, і u_I продовжує зростати. Єдиний стан, при якому $\dot{u}_I = 0$ — це $e = 0$, тобто $y = r$. Таким чином, *інтегральна складова гарантує нульову статичну похибку* дляступінчастих задавальних сигналів та постійних збурень.

Інтегральне насичення (integrator windup). Серйозним практичним недоліком інтегральної складової є явище *windup*: якщо актуатор насичений (наприклад,

ротор квадрокоптера досягає максимальної швидкості) та $u(t)$ обмежено, але помилка $e(t)$ залишається великою, інтеграл $\int e dt$ продовжує накопичуватися необмежено. Після виходу із зони насичення система демонструє значне перерегулювання. Для боротьби з windup застосовуються схеми *anti-windup*: наприклад, зупинка інтегрування при насиченні або зворотний розрахунок (back-calculation). [1]

Диференціальна складова $u_D(t) = K_d \dot{e}(t)$

Диференціальна складова реагує на *швидкість зміни* помилки. Якщо помилка швидко зростає, $\dot{e} > 0$, і u_D збільшується, щоб запобігти подальшому зростанню помилки ще до того, як вона стане великою. Таким чином, диференціальна складова діє як «передбачення» (anticipation), покращуючи демпфування та зменшуючи перерегулювання.

Проте диференціювання сигналу помилки $\dot{e}(t)$ є надзвичайно чутливим до шумів вимірювань. Зокрема, шум датчика частотою ω_n після диференціювання підсилюється у ω_n разів, що може призвести до різких небажаних коливань керуючого сигналу. Для вирішення цієї проблеми на практиці застосовують *фільтрований диференціатор*:

$$u_D(s) = K_d \frac{s}{1 + s/N} E(s), \quad N \in [5, 20], \quad (88)$$

де N — коефіцієнт фільтрації: при $N \rightarrow \infty$ отримуємо ідеальний диференціатор, при скінченному N — фільтр нижніх частот зі зрізом на $\omega = N$.

Практична порада. У системах керування квадрокоптером диференціювання часто застосовують не до помилки $\dot{e} = \dot{r} - \dot{y}$, а безпосередньо до виміряного виходу $-\dot{y}$ (з від'ємним знаком), що уникає стрибка керуючого сигналу при стрибкоподібній зміні задання $r(t)$.

2.2.3 Формулювання у частотній (операторній) області

Застосовуючи перетворення Лапласа до (84) при нульових початкових умовах, отримуємо передатну функцію ідеального PID-регулятора:

$$C_{\text{PID}}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s. \quad (89)$$

Приводячи до спільного знаменника:

$$C_{\text{PID}}(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}. \quad (90)$$

Передатна функція (90) має:

- **один полюс** у початку координат ($s = 0$) — від інтегратора K_i/s ,
- **два нулі** — корені $K_d s^2 + K_p s + K_i = 0$, що дизайнер розміщує у бажаних точках s -площини.

Полюс у нулі забезпечує нескінченне підсилення на нульовій частоті, що і гарантує нульову статичну похибку відповідно до *теорема про кінцеве значення*:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + C(s)P(s)} R(s). \quad (91)$$

При $R(s) = 1/s$ (одинична ступінка) і наявності інтегратора у $C(s)$: $C(s)P(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$, отже $e(\infty) = 0$.

З урахуванням фільтрованого диференціатора (88), практична передатна функція PID:

$$C_{\text{PID}}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + s/N}, \quad (92)$$

яка є правильною дробово-раціональною функцією (відносний порядок = 0) і фізично реалізованою.

2.2.4 Інтерпретація у часовій та частотній областях

Зведемо узагальнену характеристику кожного члена PID у таблицю:

Table 4: Порівняльна характеристика складових PID-регулятора

Параметр	P	I	D
Реагує на	Поточну помилку $e(t)$	Накопичену помилку $\int e dt$	Швидкість зміни $\dot{e}(t)$
Основний ефект	Зменшення помилки	Усунення статичної похибки	Демпфування коливань
Небажаний ефект	Статична похибка	Windup, коливання	Підсилення шуму
Вплив на полюси	Зміщує полюси ліворуч	Додає полюс в $s = 0$	Додає нулі, прискорює відгук
Частотний ефект	Рівномірне підсилення	Підсилення на низьких ω	Підсилення на високих ω

2.2.5 Дискретизація PID для цифрової реалізації

У реальних бортових контролерах квадрокоптера PID-регулятор реалізується у *цифровому* вигляді з кроком дискретизації T_s . Для отримання різницевого рівняння застосовується апроксимація інтеграла методом прямокутників (метод Ейлера вперед) та похідної скінченною різницею:

$$\int_0^{t_k} e \, d\tau \approx T_s \sum_{j=0}^k e[j], \quad (93)$$

$$\dot{e}(t_k) \approx \frac{e[k] - e[k-1]}{T_s}. \quad (94)$$

Підставляючи у (84):

$$u[k] = K_p e[k] + K_i T_s \sum_{j=0}^k e[j] + K_d \frac{e[k] - e[k-1]}{T_s}. \quad (95)$$

Рекурентна форма (зручна для реалізації на мікроконтролері):

$$u[k] = u[k-1] + \Delta u[k], \quad (96)$$

$$\Delta u[k] = K_p (e[k] - e[k-1]) + K_i T_s e[k] + \frac{K_d}{T_s} (e[k] - 2e[k-1] + e[k-2]). \quad (97)$$

Типові значення частоти дискретизації для внутрішнього контуру (керування орієнтацією): $f_s = 1/T_s \approx 500\text{--}1000$ Гц; для зовнішнього контуру (позиція): $f_s \approx 50\text{--}100$ Гц.

2.3 Методи налаштування PID-регулятора

Вибір коефіцієнтів K_p , K_i , K_d — так зване *налаштування* (tuning) — є центральною практичною задачею при синтезі PID-регулятора. Теоретично оптимальне налаштування вимагає точної математичної моделі об'єкта, тоді як практичні методи часто дозволяють знаходити прийнятні коефіцієнти безпосередньо на об'єкті. У цьому підрозділі розглянуто три основних підходи.

2.3.1 Метод Зіглера–Нікольса

Метод Зіглера–Нікольса [17], запропонований у 1942 році, є класичним інженерним методом налаштування PID безпосередньо на об'єкті керування без необхідності побудови математичної моделі.

Метод граничного підсилення (closed-loop method)

Алгоритм:

1. Вимкнути інтегральну та диференціальну складові ($K_i = K_d = 0$).
2. Поступово збільшувати K_p до значення K_{cr} (*критичне підсилення*), при якому замкнена система з чисто пропорційним регулятором починає генерувати незгасаючі коливання сталої амплітуди.
3. Виміряти *критичний період* T_{cr} — період цих коливань.
4. Обчислити коефіцієнти PID за формулами таблиці 5.

Table 5: Формули Зіглера–Нікольса (метод граничного підсилення)

Тип регулятора	K_p	K_i	K_d
P	$0,50 K_{cr}$	—	—
PI	$0,45 K_{cr}$	$K_p / (0,83 T_{cr})$	—
PID	$0,60 K_{cr}$	$K_p / (0,50 T_{cr})$	$K_p \cdot 0,125 T_{cr}$

Метод Зіглера–Нікольса зазвичай дає перерегулювання $\sigma\% \approx 25\%$, що є прийнятним для багатьох задач, але може бути замалим запасом стійкості для БПЛА. Тому отримані коефіцієнти використовуються як *початкова точка* для подальшого тонкого налаштування. [17]

Обмеження. Метод є небезпечним для застосування до квадрокоптера на реальному обладнанні, оскільки доведення системи до межі стійкості може спричинити аварію. Тому для БПЛА частіше використовують розрахункові методи на основі симуляційної моделі.

2.3.2 Метод розміщення полюсів

Метод розміщення полюсів (pole placement) є аналітичним: дизайнер задає *бажані* полюси замкненої системи виходячи із вимог до перехідного процесу, а коефіцієнти регулятора обчислюються алгебраїчно.

Бажані показники якості

Задаються вимоги:

- перерегулювання $\sigma\% \leq \sigma^*$,
- час регулювання $t_s \leq t_s^*$,
- (опційно) час наростання $t_r \leq t_r^*$.

З формул (78)–(79) виводимо необхідні параметри домінуючих полюсів:

$$\zeta^* = \frac{-\ln(\sigma^*/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\sigma^*/100)}}, \quad (98)$$

$$\omega_n^* = \frac{4}{\zeta^* t_s^*}, \quad (99)$$

і бажані домінуючі полюси:

$$p_{1,2}^* = -\zeta^* \omega_n^* \pm j \omega_n^* \sqrt{1 - (\zeta^*)^2}. \quad (100)$$

Алгебраїчне визначення коефіцієнтів

Характеристичний поліном замкненої системи з PID-регулятором (90) та об'єктом $P(s) = b_0/(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)$:

$$\Delta_{cl}(s) = s \cdot (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0) + b_0(K_d s^2 + K_p s + K_i) = 0. \quad (101)$$

Прирівнюючи коефіцієнти $\Delta_{cl}(s)$ до коефіцієнтів бажаного полінома $\Delta^*(s) = (s - p_1^*)(s - p_2^*) \dots$, отримуємо систему лінійних рівнянь відносно K_p, K_i, K_d .

Приклад для підсистеми тангажу

Із лінеаризованої моделі (45)–(47) підсистема тангажу:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{yy}} \tau_{\theta} \Rightarrow P_{\theta}(s) = \frac{1}{I_{yy}s^2}. \quad (102)$$

Замкнена система з PID-регулятором:

$$\Delta_{cl}(s) = I_{yy}s^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i = 0. \quad (103)$$

Задаємо бажаний поліном у формі Баттерворта третього порядку з шириною смуги ω_b :

$$\Delta^*(s) = (s + \omega_b)(s^2 + \omega_b s + \omega_b^2), \quad (104)$$

і прирівнюємо коефіцієнти:

$$K_d = 2I_{yy}\omega_b, \quad K_p = 2I_{yy}\omega_b^2, \quad K_i = I_{yy}\omega_b^3. \quad (105)$$

Параметр ω_b є єдиним параметром налаштування і вибирається виходячи із вимог до смуги пропускання та запасів стійкості.

2.3.3 Частотні методи налаштування

Частотні методи ґрунтуються на аналізі діаграми Бode розімкненого контуру $L(j\omega) = C(j\omega)P(j\omega)$ та забезпечують задані запаси стійкості (82)–(83).

Метод частоти зрізу та фазового запасу

Задаються вимоги: частота зрізу ω_c^* (визначає швидкодію) та фазовий запас PM^* (визначає демпфування). Алгоритм:

1. Обчислити фазу об'єкта на бажаній частоті зрізу: $\phi_P = \angle P(j\omega_c^*)$.
2. Необхідна фаза регулятора для досягнення PM^* :

$$\phi_C = PM^* - 180^\circ - \phi_P. \quad (106)$$

3. Якщо $\phi_C > 0$, регулятор повинен *випереджати* фазу (phase-lead) — це забезпечує диференціальна складова. Якщо $\phi_C < 0$ — необхідна *затримка* фази (phase-lag) — це роль інтегратора.
4. Підібрати K_d для забезпечення ϕ_C , потім K_p для виконання умови $|L(j\omega_c^*)| = 1$.
5. K_i обирається малим (наприклад, $K_i = 0.1\omega_c^* K_p$) для мінімального впливу на фазу в районі ω_c^* .

Правило вибору K_d для фазового випередження

PD-регулятор $C_{PD}(s) = K_p(1+T_d s)$ вносить максимальне фазове випередження:

$$\phi_{\max} = \arctan\left(\frac{T_d \omega_c - 1/T_d \omega_c}{2}\right), \quad (107)$$

що досягається на частоті $\omega_{\max} = 1/T_d$. Звідси $T_d = K_d/K_p$.

2.4 Каскадна PID-архітектура для квадрокоптера

Безпосереднє застосування одного PID-регулятора до повної нелінійної моделі квадрокоптера є неефективним через підвиконаність системи та каскадний характер динаміки (підрозділ 2.5–2.6). Натомість стандартною архітектурою є *каскадний* (вкладений) PID, у якому кілька регуляторів організовані у ієрархічну структуру з різними часовими масштабами. [5, 11]

2.4.1 Принцип каскадного керування

Загальний принцип каскадного керування: *зовнішній* (повільний) контур генерує задавальний сигнал для *внутрішнього* (швидкого) контуру. Внутрішній контур повинен бути значно швидшим за зовнішній — зазвичай у 5–10 разів за смугою пропускання — щоб зовнішній контур міг вважати внутрішній “ідеальним” у своїй частотній смузі.

Для квадрокоптера природна ієрархія визначається структурою рівнянь руху (40):

$$\underbrace{\text{Позиція}}_{\text{повільна}} \rightarrow \underbrace{\text{Орієнтація (кути)}}_{\text{середня}} \rightarrow \underbrace{\text{Кутові швидкості}}_{\text{швидка}} \rightarrow \underbrace{\text{Мотори}}_{\text{дуже швидка}} \quad (108)$$

2.4.2 Зовнішній контур: керування позицією

Задача зовнішнього контуру

Вхід: бажана позиція $\mathbf{r}^d = [x^d, y^d, z^d]^\top$. Вихід: бажані кути нахилу ϕ^d, θ^d та бажана тяга F^d .

Регулятор висоти

Із рівняння (26) при малих кутах ($\cos \phi \cos \theta \approx 1$):

$$m\ddot{z} \approx mg - F. \quad (109)$$

Помилка по висоті: $e_z = z^d - z$. PID-регулятор формує команду тяги:

$$F^d = mg + K_p^z e_z + K_i^z \int e_z dt + K_d^z \dot{e}_z. \quad (110)$$

Член mg є компенсацією гравітації (feedforward), що суттєво зменшує навантаження на інтегральну складову.

Регулятор горизонтального положення

Із рівнянь (47), (50) горизонтальне положення керується через кути:

$$\ddot{x} \approx g \theta, \quad \ddot{y} \approx -g \phi. \quad (111)$$

PID-регулятори по x та y формують бажані кути:

$$\theta^d = \frac{1}{g} \left(K_p^x e_x + K_i^x \int e_x dt + K_d^x \dot{e}_x \right), \quad (112)$$

$$\phi^d = -\frac{1}{g} \left(K_p^y e_y + K_i^y \int e_y dt + K_d^y \dot{e}_y \right). \quad (113)$$

Ділення на g у (112)–(113) є зворотною динамічною компенсацією: вона “скасовує” відомий параметр моделі та дозволяє незалежно налаштовувати контур позиції.

Бажаний кут ристання ψ^d задається оператором безпосередньо (наприклад, нуль або вирівнювання за маршрутом).

2.4.3 Внутрішній контур: керування орієнтацією

Задача внутрішнього контуру.

Вхід: бажані кути $\eta^d = [\phi^d, \theta^d, \psi^d]^\top$ від зовнішнього контуру. Вихід: бажані моменти $[\tau_\phi^d, \tau_\theta^d, \tau_\psi^d]^\top$.

Кутовий PID-регулятор

Для кожного каналу незалежно (зв’язаність каналів нехтується при малих кутах):

$$\tau_\phi^d = K_p^\phi (\phi^d - \phi) + K_i^\phi \int (\phi^d - \phi) dt + K_d^\phi (\dot{\phi}^d - \dot{\phi}), \quad (114)$$

$$\tau_\theta^d = K_p^\theta (\theta^d - \theta) + K_i^\theta \int (\theta^d - \theta) dt + K_d^\theta (\dot{\theta}^d - \dot{\theta}), \quad (115)$$

$$\tau_\psi^d = K_p^\psi (\psi^d - \psi) + K_i^\psi \int (\psi^d - \psi) dt + K_d^\psi (\dot{\psi}^d - \dot{\psi}). \quad (116)$$

На практиці похідні кутів $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ не вимірюються безпосередньо, а обчислюються через кутові швидкості гіроскопа за кінематичними рівняннями (15)–(17).

2.4.4 Контур кутових швидкостей (rate controller)

Між кутовим контуром та моторами часто додається третій, *найвнутрішній* контур — *rate controller*, що безпосередньо регулює кутові швидкості $[p, q, r]^\top$:

$$\tau_\phi^d = K_p^p(p^d - p) + K_d^p\dot{p}, \quad (117)$$

де p^d — бажана кутова швидкість крену, що формується кутовим PID (114). Цей контур є найшвидшим ($f_s \approx 1000$ Гц) і безпосередньо використовує дані гіроскопа, що забезпечує найнижчу затримку та найліпше демпфування.

2.4.5 Повна каскадна структура та часові масштаби

Table 6: Каскадна PID-архітектура квадрокоптера

Контур	Вхід	Вихід	Датчик	Частота
Позиції (x, y, z)	x^d, y^d, z^d	ϕ^d, θ^d, F^d	GPS, баро	10–50 Гц
Орієнтації (ϕ, θ, ψ)	ϕ^d, θ^d, ψ^d	p^d, q^d, r^d	AHRS	100–250 Гц
Кутових швидкостей	p^d, q^d, r^d	$\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$	Гіроскоп	500–1000 Гц
Моторів (mixer)	$F, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi$	$\Omega_1^2 \dots \Omega_4^2$	—	1000+ Гц

Поділ на контури з різними частотами оновлення є принципово важливим: внутрішній контур повинен встигнути відпрацювати задання від зовнішнього контуру до того, як зовнішній видасть нове. Порушення цього принципу призводить до нестійкості всієї каскадної структури.

2.5 Аналіз стійкості PID-керованого квадрокоптера

У цьому підрозділі проводиться аналіз стійкості замкненої системи з каскадним PID-регулятором, описаним у підрозділі 3.4. Для аналізу використовуються два взаємодоповнюючих частотних методи: метод кореневого годографу та метод діаграм Боде.

2.5.1 Кореневий годограф

Кореневий годограф (root locus) — це геометричне місце коренів характеристичного рівняння замкненої системи у комплексній s -площині при варіації одного параметра (зазвичай пропорційного коефіцієнта K_p).

Характеристичне рівняння

Для замкненої системи з PID-регулятором $C(s)$ та об'єктом $P(s)$:

$$1 + K_p \cdot \tilde{L}(s) = 0, \quad \tilde{L}(s) = \frac{C(s)/K_p \cdot P(s)}{1}, \quad (118)$$

де $\tilde{L}(s)$ — нормована передатна функція розімкненого контуру.

Правила побудови.

Кореневий годограф будується за *правилами Еванса*. Наведемо основні:

1. Годограф починається ($K_p = 0$) у полюсах $\tilde{L}(s)$ і закінчується ($K_p \rightarrow \infty$) у нулях $\tilde{L}(s)$ або на нескінченності.
2. Годограф симетричний відносно дійсної осі.
3. На дійсній осі гілка годографа проходить через ділянки, ліворуч від яких сума числа полюсів та нулів є непарною.
4. Число гілок дорівнює числу полюсів n ; число гілок, що йдуть у нескінченність, дорівнює $n - m$ (різниця числа полюсів та нулів).
5. Асимптоти гілок, що йдуть у нескінченність, мають кути:

$$\phi_k = \frac{(2k + 1) \cdot 180^\circ}{n - m}, \quad k = 0, 1, \dots, n - m - 1. \quad (119)$$

Приклад для підсистеми тангажу

Для об'єкта $P_\theta(s) = 1/(I_{yy}s^2)$ та PD-регулятора $C(s) = K_p(1 + T_d s)$:

$$L(s) = C(s)P_\theta(s) = \frac{K_p(T_d s + 1)}{I_{yy}s^2}. \quad (120)$$

Полюси: $p_{1,2} = 0$ (подвійний); нуль: $z_1 = -1/T_d$. Годограф: при $K_p = 0$ обидві гілки виходять з $s = 0$; при зростанні K_p одна гілка рухається до нуля $z_1 = -1/T_d \in \mathbb{R}^-$, друга — у нескінченність по від'ємній дійсній осі. Система є *стійкою* для всіх $K_p > 0$ — наявність нуля у $\mathbb{C}^-$ “притягує” обидві гілки у ліву напівплощину. Додавання інтегральної складової ($K_i > 0$) вводить додатковий полюс у $s = 0$, і частина гілок може перейти у праву напівплощину при надто великих K_i .

2.5.2 Аналіз за діаграмою Боде

Діаграма Боде розімкненого контуру $L(j\omega) = C(j\omega)P(j\omega)$ дає інформацію про стійкість замкненої системи та запаси стійкості без явного обчислення полюсів.

Діаграма Бode PID-регулятора.

Розглянемо амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) та фазово-частотну характеристику (ФЧХ) PID-регулятора (92). Амплітуда:

$$|C_{\text{PID}}(j\omega)| = \sqrt{\left(K_p - K_d \frac{\omega^2 N}{\omega^2 + N^2}\right)^2 + \left(\frac{K_d N^2 \omega}{\omega^2 + N^2} - \frac{K_i}{\omega}\right)^2}. \quad (121)$$

Поведінка по частотних областях:

- $\omega \rightarrow 0$: $|C| \rightarrow \infty$ (інтегратор забезпечує нескінченне підсилення на постійному струмі),
- $\omega \approx \omega_c$: вплив всіх трьох складових,
- $\omega \rightarrow \infty$: $|C| \rightarrow K_d N$ (фільтрований диференціатор обмежує підсилення).

Вплив PID на фазу контуру.

Ключовим для стійкості є фаза $\angle L(j\omega_c)$. PID вносить фазу:

$$\angle C_{\text{PID}}(j\omega) = \arctan\left(\frac{K_d N^2 \omega / (\omega^2 + N^2) - K_i / \omega}{K_p - K_d \omega^2 N / (\omega^2 + N^2)}\right) - 90^\circ, \quad (122)$$

де -90° – вклад інтегратора. Диференціальна складова компенсує цю затримку, вносячи фазове випередження. Оптимальний результат досягається, коли максимальне фазове випередження від D-складової збігається з частотою зрізу ω_c .

Типові вимоги для квадрокоптера

- Внутрішній контур (кутові швидкості): $\omega_c^{\text{rate}} \approx 20\text{--}50$ рад/с, $\text{PM} \geq 45^\circ$.
- Кутовий контур: $\omega_c^{\text{att}} \approx 5\text{--}15$ рад/с, $\text{PM} \geq 50^\circ$.
- Позиційний контур: $\omega_c^{\text{pos}} \approx 1\text{--}3$ рад/с, $\text{PM} \geq 60^\circ$.

Більший запас фазового зсуву для зовнішніх (повільних) контурів є доцільним, оскільки вони більш чутливі до нелінійностей та затримок сигналу.

2.6 Обмеження класичного PID-регулятора

Незважаючи на широке практичне застосування, класичний PID-регулятор із фіксованими коефіцієнтами має фундаментальні обмеження, що проявляються саме у задачах керування БПЛА. Розуміння цих обмежень є необхідним для обґрунтування переходу до адаптивних методів, що складають основний зміст розділу 4.

2.6.1 Фіксованість коефіцієнтів та зміна умов польоту

Коефіцієнти K_p, K_i, K_d визначаються у процесі налаштування для *номінальних* умов: певної маси апарату m_0 , тензора інерції $\mathbf{I}_0$, відсутності вітру тощо. При відхиленні умов від номінальних якості керування погіршується.

Математичне обґрунтування

Нехай реальна маса апарату $m = m_0 + \Delta m$. Тоді реальна передатна функція підсистеми висоти:

$$P_z^{\text{real}}(s) = \frac{-1}{(m_0 + \Delta m)s^2} = \frac{1}{m_0 s^2} \cdot \frac{1}{1 + \Delta m/m_0}, \quad (123)$$

тобто підсилення об'єкта зменшується у $(1 + \Delta m/m_0)$ разів. Якщо PID налаштований на m_0 , то ефективне підсилення контуру зменшується, що призводить до:

- збільшення статичної похибки (при недостатньому K_i),
- уповільнення перехідного процесу,
- зменшення фактичної смуги пропускання нижче проектної.

У разі значного Δm (наприклад, скидання вантажу під час польоту) різке зменшення маси може призвести до нестійкості, якщо початкові коефіцієнти були налаштовані для важкішого апарату.

2.6.2 Незадовільна відробка нелінійностей

Каскадний PID є лінійним регулятором, синтезованим для *лінеаризованої* моделі навколо точки зависання. При відхиленні від цієї точки нелінійні члени рівнянь (40) стають суттєвими та вносять ефективне “збурення” у замкнену систему.

Зокрема, припущення (111) $\ddot{x} \approx g\theta$ базується на $\cos \theta \approx 1$. При $\theta = 30^\circ$ відносна похибка цього наближення становить $1 - \cos(30^\circ) \approx 13\%$, а при $\theta = 45^\circ$ — вже 29%. Для агресивних маневрів, де кути нахилу можуть досягати $45-60^\circ$, лінійна модель стає неадекватною, і PID із фіксованими коефіцієнтами не може забезпечити точного відстеження траєкторії.

Аналогічно, гіроскопічні члени $(I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta} / I_{xx}$ у (30), знехтувані при лінеаризації, стають значними при великих кутових швидкостях та викликають небажані зв'язки між каналами.

2.6.3 Відхилення аеродинамічних збурень

Вітрові збурення $\mathbf{d}_F(t)$ у рівнянні (55) діють як адитивний входовий збурюючий сигнал. Здатність PID-регулятора відхиляти такі збурення обмежена смугою пропускання контуру: збурення з частотами, вищими за ω_c , практично не компенсуються. Типова частота поривів вітру становить 0.1–5 Гц, тоді як смуга позиційного контуру $\omega_c^{\text{pos}} \approx 1-3$ рад/с $\approx 0.15-0.5$ Гц. Таким чином, швидкі пориви вітру можуть виходити за межі смуги регулятора, що призводить до значних позиційних відхилень.

2.6.4 Загальне порівняння: фіксований PID проти адаптивного керування

Table 7: Порівняльна характеристика класичного PID та адаптивного керування

Критерій	Класичний PID	Адаптивне керування
Параметри регулятора	Фіксовані	Змінюються в реальному часі
Вимога до моделі	Лінеаризована, номінальна	Структурна (може бути параметрично невизначена)
Реакція на зміну m , I	Деградація якості	Автоматична компенсація
Відхилення збурень	Обмежено смугою ω_c	Можлива пряма ідентифікація та компенсація
Складність реалізації	Низька	Середня–висока
Математичний апарат	Лінійна теорія	Теорія Ляпунова, нелінійні системи
Гарантії стійкості	Тільки для номінальної моделі	При належному синтезі: глобальна або обмежена

Таблиця 7 наочно демонструє, що класичний PID є ефективним, але *крихким* інструментом: його якість суттєво залежить від точності номінальної моделі та стаціонарності умов роботи. Для систем із значною параметричною невизначеністю та змінними умовами польоту необхідний перехід до *адаптивних* законів керування, де параметри регулятора автоматично коригуються на основі поточних вимірювань.

Математичний апарат таких законів — теорія стійкості Ляпунова, модельно-еталонне адаптивне керування (MRAC), самоналаштовувані регулятори (STR) — детально розглядається у наступному розділі.

3 Адаптивна теорія керування

Класичний PID-регулятор, розглянутий у розділі 3, є ефективним інструментом для об'єктів із відомими та незмінними параметрами. Однак, як було показано у підрозділах 2.7 та 3.6, реальний квадрокоптер є об'єктом із суттєвою параметричною невизначеністю та зовнішніми збуреннями, що неминуче погіршує якість фіксованого регулятора або навіть призводить до втрати стійкості. Адаптивне керування вирішує цю проблему принципово інакше: замість того щоб проектувати “найкращий можливий” фіксований регулятор, воно дозволяє регулятору *самостійно змінювати свої параметри* під час роботи відповідно до поточного стану об'єкта.

У цьому розділі викладено теоретичні основи адаптивного керування та розглянуто основні алгоритми у контексті задачі стабілізації квадрокоптера.

3.1 Мотивація та загальна концепція адаптивного керування

3.1.1 Що означає “адаптація” математично

Розглянемо загальну систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}), \quad (124)$$

де $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор стану, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ — керуючий вхід, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ — вектор *невідомих або змінних параметрів* (наприклад, маса, тензор інерції, аеродинамічні коефіцієнти).

Ідеальний регулятор для системи (124) мав би вигляд $\mathbf{u} = k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, r)$, де r — задавальний сигнал. Але оскільки $\boldsymbol{\theta}$ невідомі, цей “ідеальний” регулятор нереалізований.

Адаптивний регулятор вирішує цю проблему шляхом введення оцінок параметрів $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, які оновлюються в реальному часі:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = k(\mathbf{x}(t), \hat{\boldsymbol{\theta}}(t), r(t)) & \text{(керування)} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = \Gamma \varphi(\mathbf{x}(t), e(t)) & \text{(закон адаптації)} \end{cases} \quad (125)$$

де $\Gamma \succ 0$ — матриця швидкості адаптації, φ — вектор регресора (залежить від вимірювань стану та помилки), $e(t)$ — помилка керування.

Таким чином, адаптивна система є *нелінійною системою з динамічно змінними параметрами*, і її аналіз вимагає інструментів, що виходять за межі класичної лінійної теорії.

3.1.2 Класифікація невизначеностей

В теорії адаптивного керування розрізняють два основних типи невизначеностей:

- **Параметрична невизначеність:** структура моделі об’єкта відома, але числові значення параметрів $\boldsymbol{\theta}$ невідомі або змінюються повільно в часі. Для квадрокоптера: невідомі m , I_{xx} , k_f . Цей тип невизначеності підлягає *точній компенсації* адаптивними методами.
- **Неструктурована невизначеність:** до моделі входять непомодельована динаміка, зовнішні збурення $\mathbf{d}(t)$, нелінійні ефекти, що не враховані у моделі. Цей тип потребує *робастних* методів.

У даній роботі основна увага приділяється параметричній невизначеності як домінуючому джерелу погіршення якості керування квадрокоптером.

3.2 Математичні основи адаптивного керування

3.2.1 Стійкість за Ляпуновим — нагадування та розширення

Як було встановлено у підрозділі 3.1.3, метод функцій Ляпунова є основним інструментом аналізу нелінійних систем. Для адаптивних систем цей метод

застосовується у більш загальному контексті: функція Ляпунова конструюється не лише для стану $\mathbf{x}$, а й для помилки оцінки параметрів:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - \boldsymbol{\theta}^*, \quad (126)$$

де $\boldsymbol{\theta}^*$ — істинне (але невідоме) значення параметрів. Типова функція Ляпунова для адаптивних систем:

$$V(\mathbf{e}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{e}^\top P \mathbf{e}}_{\text{"помилка стану"}} + \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{\text{"помилка параметрів"}}, \quad (127)$$

[8, 12] де $P \succ 0$ та $\Gamma \succ 0$. Конструкція (127) є фундаментальною: вона поєднує “енергію” помилки стану та “енергію” помилки оцінки. Закон адаптації обирається таким чином, щоб $\dot{V} \leq 0$ — саме це і є *методом Ляпунова для синтезу адаптивних регуляторів*.

3.2.2 Лема Барбалата

Умова $\dot{V} \leq 0$ гарантує, що $V(t)$ не зростає, але не дозволяє безпосередньо стверджувати, що помилка $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для цього використовується наступний результат. [3]

Lemma 1 (Барбалат, 1959). Нехай $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — рівномірно неперервна функція, і нехай існує скінченна границя $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau) d\tau < \infty$. Тоді:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0. \quad (128)$$

Застосування у адаптивному керуванні. Нехай $\dot{V} \leq -e^2(t) \leq 0$. Тоді $V(t)$ монотонно спадає та обмежена знизу нулем, отже $\int_0^\infty e^2(\tau) d\tau < \infty$. Якщо додатково $e(t)$ є рівномірно неперервною (що можна довести з обмеженості $\dot{e}$), то за лемою Барбалата $e(t) \rightarrow 0$.

Лема Барбалата є *стандартним завершальним кроком* у більшості доведень збіжності адаптивних систем і буде використовуватися у підрозділі 4.3.

3.2.3 Стійкість у сенсі Ляпунова для адаптивних систем

Важливе концептуальне зауваження: у більшості адаптивних систем вдається довести лише те, що:

1. Помилка стану $e(t) \rightarrow 0$ (помилка виходу збігається до нуля),
2. Всі сигнали у системі залишаються обмеженими ($\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}} \in L^\infty$),
3. Але оцінки параметрів $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ не обов’язково збігаються до істинних $\boldsymbol{\theta}^*$.

Остання властивість (сходимість параметрів) потребує додаткової умови *збудження у постійному режимі* (persistent excitation), що є окремою теоретичною темою.

3.3 Еталонне адаптивне керування (MRAC)

Метод *еталонного адаптивного керування* (Model Reference Adaptive Control, MRAC) є найбільш теоретично обґрунтованим та широко застосовуваним підходом в адаптивному керуванні. Його центральна ідея: змусити об'єкт з невідомими параметрами поводитися так само, як *еталонна модель* — ідеальна система з заздалегідь заданою бажаною динамікою. [2, 12]

3.3.1 Структура MRAC

MRAC складається з чотирьох елементів

1. **Об'єкт керування** з невідомими параметрами θ^* .
2. **Еталонна модель** — лінійна система з бажаною динамікою:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = A_m \mathbf{x}_m + B_m r(t), \quad (129)$$

де A_m — стійка матриця (всі власні значення у $\mathbb{C}^-$), $r(t)$ — зовнішній задавальний сигнал.

3. **Адаптивний регулятор** з параметрами $\hat{\theta}(t)$, що оновлюються онлайн.
4. **Закон адаптації** — диференціальне рівняння для $\dot{\hat{\theta}}$.

Мета MRAC: забезпечити $e(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_m(t) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$, тобто вихід реального об'єкта має прямувати до виходу еталонної моделі.

3.3.2 Спрощена постановка для квадрокоптера

Розглянемо підсистему кутової швидкості по каналу крену (лінеаризована):

$$\dot{p} = \frac{1}{I_{xx}} \tau_\phi \equiv a^* \tau_\phi, \quad (130)$$

де $a^* = 1/I_{xx}$ — невідомий параметр. Задаємо еталонну модель:

$$\dot{p}_m = a_m p_m + b_m p^*, \quad a_m < 0, \quad b_m > 0, \quad (131)$$

де p^* — бажана кутова швидкість. Помилка відстеження:

$$e_p(t) = p(t) - p_m(t). \quad (132)$$

3.3.3 Синтез закону керування та адаптації (метод Ляпунова)

Оберемо лінійний адаптивний регулятор:

$$\tau_\phi = \hat{k}(t) p^*, \quad (133)$$

де $\hat{k}(t)$ — адаптивний коефіцієнт підсилення. Підставляючи у рівняння помилки:

$$\dot{e}_p = a_m e_p + (a^* \hat{k} - b_m) p^*. \quad (134)$$

Визначимо помилку параметра: $\tilde{k}(t) = \hat{k}(t) - k^*$, де $k^* = b_m/a^*$ — ідеальне (але невідоме) значення. Конструюємо функцію Ляпунова:

$$V(e_p, \tilde{k}) = \frac{1}{2} e_p^2 + \frac{a^*}{2\gamma} \tilde{k}^2, \quad \gamma > 0. \quad (135)$$

Обчислимо похідну вздовж траєкторій:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_p \dot{e}_p + \frac{a^*}{\gamma} \tilde{k} \dot{\tilde{k}} \\ &= e_p (a_m e_p + a^* \tilde{k} p^*) + \frac{a^*}{\gamma} \tilde{k} \dot{\tilde{k}} \\ &= a_m e_p^2 + a^* \tilde{k} \underbrace{\left(e_p p^* + \frac{\dot{\tilde{k}}}{\gamma} \right)}_{\text{оберемо} = 0}. \end{aligned} \quad (136)$$

Обираємо **закон адаптації** так, щоб виключити невідомий доданок:

$$\boxed{\dot{\tilde{k}}(t) = -\gamma e_p(t) p^*(t)} \quad (137)$$

Тоді:

$$\dot{V} = a_m e_p^2 \leq 0, \quad (138)$$

оскільки $a_m < 0$. За теоремою Ляпунова система є *стійкою*. Із $\dot{V} = a_m e_p^2$ та монотонності V випливає $\int_0^\infty e_p^2 dt < \infty$; за лемою Барбалата $e_p(t) \rightarrow 0$. $\square$

3.3.4 Фізичний зміст закону адаптації

Закон (137) має прозору інтерпретацію: коефіцієнт $\hat{k}$ змінюється пропорційно *добутку помилки e_p та задавального сигналу r^** . Якщо помилка позитивна (об’єкт “відстає” від еталону) і задання позитивне, коефіцієнт зменшується, зменшуючи тим самим керуючий вплив. Це інтуїтивно зрозумілий механізм “навчання”: регулятор змінює свої параметри у напрямку, що зменшує помилку.

3.3.5 Практичне застосування MRAC до квадрокоптера

У повній реалізації для квадрокоптера MRAC застосовується до кожного каналу каскадної архітектури:

$$\dot{\hat{k}}_\phi = -\gamma_\phi e_\phi \phi^*, \quad (139)$$

$$\dot{\hat{k}}_\theta = -\gamma_\theta e_\theta \theta^*, \quad (140)$$

$$\dot{\hat{k}}_z = -\gamma_z e_z z^*, \quad (141)$$

де $\gamma_\phi, \gamma_\theta, \gamma_z > 0$ — швидкості адаптації для кожного каналу. Фізично: при зміні маси квадрокоптера (підйом вантажу) коефіцієнт $\hat{k}_z$ автоматично збільшується, компенсуючи зменшення прискорення по висоті.

3.4 Самоналаштувальний регулятор (STR)

3.4.1 Ідея та структура

Самоналаштувальний регулятор (Self-Tuning Regulator, STR) реалізує принцип поділу задач: спочатку параметри об'єкта *ідентифікуються* в реальному часі, а потім на основі отриманих оцінок *синтезується* оптимальний регулятор. Це принципово відрізняє STR від MRAC: у MRAC параметри регулятора оновлюються безпосередньо з помилки виходу, тоді як у STR спочатку оцінюються параметри об'єкта, і лише потім перераховуються параметри регулятора. [2]

Структура STR:

$$\underbrace{\text{Вимірювання } \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)}_{\text{дані}} \longrightarrow \underbrace{\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \text{RLS}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}_{\text{онлайн ідентифікація}} \longrightarrow \underbrace{\mathbf{u}(t) = \mathcal{K}(\hat{\boldsymbol{\theta}})}_{\text{синтез регулятора}} \quad (142)$$

3.4.2 Рекурсивний метод найменших квадратів (RLS)

Нехай параметри об'єкта входять лінійно у рівняння виходу:

$$y(t) = \boldsymbol{\varphi}^\top(t) \boldsymbol{\theta}^* + \varepsilon(t), \quad (143)$$

де $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^p$ — *вектор регресора* (виміряні величини), $\varepsilon(t)$ — шум вимірювань. [10]

Алгоритм *рекурсивного методу найменших квадратів* (RLS) дозволяє оновлювати оцінку $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ при надходженні нових вимірювань без необхідності зберігати всю передісторію даних:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + K(t) \varepsilon_p(t), \quad (144)$$

$$K(t) = \frac{P(t) \boldsymbol{\varphi}(t)}{\lambda + \boldsymbol{\varphi}^\top(t) P(t) \boldsymbol{\varphi}(t)}, \quad (145)$$

$$P(t+1) = \frac{1}{\lambda} [I - K(t) \boldsymbol{\varphi}^\top(t)] P(t), \quad (146)$$

де:

- $\varepsilon_p(t) = y(t) - \boldsymbol{\varphi}^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ — *апріорна помилка передбачення*,
- $P(t) \succ 0$ — матриця коваріації помилки оцінки,
- $\lambda \in (0, 1]$ — *фактор забування* (forgetting factor): при $\lambda < 1$ стара інформація “забувається”, що дозволяє відстежувати повільно змінні параметри. [10]

Застосування до квадрокоптера

Для каналу висоти рівняння руху у дискретному часі:

$$z(k+1) = z(k) + T_s \dot{z}(k) + \frac{T_s^2}{2} \left(\frac{F(k)}{m} - g \right), \quad (147)$$

що є лінійним відносно $1/m$. Отже, регресор $\boldsymbol{\varphi}(k) = T_s^2 F(k)/2$, невідомий параметр $\theta^* = 1/m$, і RLS дає оцінку $\hat{m}(t)$ в режимі реального часу. Як тільки

$\hat{m}(t)$ оновлено, коефіцієнт висотного PID $K_p^{(z)}$ перераховується методом розміщення полюсів із оновленим значенням маси.

3.4.3 Порівняння MRAC та STR

Table 8: Порівняння підходів MRAC та STR

Критерій	MRAC	STR
Що адаптується	Параметри регулятора	Параметри об'єкта + регулятор
Метод	Ляпунов / градієнт	Рекурсивна ідентифікація
Збіжність	Доведена за Ляпуновим	Залежить від РЕ-умови
Прозорість	Висока (прямий зв'язок)	Середня (два кроки)
Застосування	Швидка адаптація	Повільна зміна параметрів

3.5 Планування коефіцієнтів (Gain Scheduling)

3.5.1 Концепція та математична постановка

Планування коефіцієнтів (gain scheduling) є найпростішим з адаптивних підходів. Ідея полягає у тому, що параметричний простір об'єкта розбивається на *робочі точки* (operating points), у кожній з яких проектується окремий лінійний регулятор. Під час роботи система перемикається між регуляторами залежно від поточного значення деякої *планувальної змінної* $\sigma(t)$ (scheduling variable). [2]

Формально нехай об'єкт залежить від параметра σ :

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\sigma) \mathbf{x} + B(\sigma) \mathbf{u}. \quad (148)$$

Для N робочих точок $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ проектуються регулятори $K_1, K_2, \dots, K_N$. Поточний коефіцієнт підсилення визначається інтерполяцією:

$$K(\sigma) = \sum_{i=1}^N w_i(\sigma) K_i, \quad \sum_{i=1}^N w_i(\sigma) = 1, \quad w_i \geq 0, \quad (149)$$

де $w_i(\sigma)$ — вагові функції (наприклад, трикутні або гауссові).

3.5.2 Застосування до БПЛА

Для квадрокоптера природними планувальними змінними є:

- **Кут нахилу** $|\theta|$ або $|\phi|$: при великих кутах нелінійні ефекти суттєві, і потрібні більші K_d .
- **Висота польоту**: аеродинамічні характеристики змінюються з висотою (густота повітря).

- **Режим польоту:** зависання ($|\theta|, |\phi| < 5^\circ$), крейсерський режим ($|\theta| > 15^\circ$), агресивний маневр.

Практична схема для трьох режимів польоту:

Table 9: Параметри PID для різних режимів польоту (приклад)

Режим	σ	$K_p^{(p)}$	$K_d^{(p)}$	$K_p^{(\phi)}$	$K_d^{(\phi)}$
Зависання	$ \phi , \theta < 5^\circ$	0.20	0.005	4.0	0.30
Крейсер	$5^\circ \leq \phi < 20^\circ$	0.28	0.008	5.5	0.40
Маневр	$ \phi \geq 20^\circ$	0.35	0.012	6.5	0.50

Переваги та обмеження

Gain scheduling є простим у реалізації та добре зрозумілим з інженерної точки зору. Однак він має принциповий недолік: *стійкість у точках перемикання не гарантується автоматично* і вимагає окремого аналізу. Зокрема, швидке перемикання між режимами може призвести до нестійкості навіть якщо кожен окремий регулятор є стійким. Для квадрокоптера, що виконує агресивні маневри, це є суттєвим обмеженням.

3.6 Адаптивний зворотний хід (Adaptive Backstepping)

3.6.1 Ідея рекурсивного проектування

Адаптивний зворотний хід (adaptive backstepping) є систематичним методом синтезу адаптивних регуляторів для нелінійних систем, що записані у *трикутній формі* (або формі інтеграторних ланцюгів). На відміну від MRAC, що орієнтований на лінійні або майже лінійні об'єкти, backstepping безпосередньо працює з нелінійними рівняннями руху (40). [16]

Нехай система записана у формі:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2, \quad (150)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \theta^* u, \quad (151)$$

де θ^* — невідомий параметр, u — вхід. Задача: стабілізувати $x_1 \rightarrow 0$.

Метод backstepping вирішує задачу *рекурсивно* по кроках.

Крок 1: Підсистема x_1 .

Розглянемо x_2 як “віртуальний вхід” для (150). Бажаємо $x_2 = \alpha_1(x_1)$ — *функція стабілізації*:

$$\alpha_1(x_1) = -c_1 x_1 - f_1(x_1), \quad c_1 > 0, \quad (152)$$

тоді $\dot{x}_1 = -c_1 x_1 \rightarrow 0$. Введемо *помилку першого кроку*: $z_2 = x_2 - \alpha_1$.

Крок 2: Підсистема z_2 .

Диференціюємо z_2 та обираємо u і закон адаптації $\dot{\hat{\theta}}$ за методом Ляпунова для спільної функції:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \quad (153)$$

де $V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$, $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$. Вибір u та $\dot{\hat{\theta}}$ гарантує $\dot{V}_2 \leq -c_1x_1^2 - c_2z_2^2 \leq 0$.

3.6.2 Застосування до квадрокоптера

Для каналу поздовжнього руху квадрокоптера рівняння (45)–(47) мають природну трикутну структуру:

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_\theta}{I_{yy}}, \quad \ddot{x} = g \theta, \quad (154)$$

де $1/I_{yy}$ є невідомим параметром. Backstepping застосовується рекурсивно: спочатку для x , потім для $\dot{x}$, потім для θ , і нарешті для $\dot{\theta}$, на кожному кроці конструюється функція стабілізації та оновлюється оцінка $\hat{I}_{yy}$.

Переваги backstepping

- Системний підхід: алгоритм чітко визначений для будь-якої системи у трикутній формі.
- Суворе доведення стійкості: на кожному кроці будується функція Ляпунова.
- Одночасне оброблення нелінійності та невизначеності.

Практичні складнощі.

Основний недолік — *вибух похідних* (explosion of terms): на кожному кроці необхідно диференціювати функцію стабілізації попереднього кроку, що для систем вищого порядку призводить до складних виразів. Для чотирикаскадної моделі квадрокоптера (підрозділ 2.5) це є суттєвою обчислювальною проблемою, що може бути вирішена методом *динамічного поверхневого керування* (dynamic surface control).

3.7 Робастність адаптивних систем

3.7.1 Проблема робастності

Стандартні адаптивні алгоритми (MRAC, STR) проектуються для систем без шумів вимірювань та зовнішніх збурень. У присутності обмеженого збурення $\mathbf{d}(t)$ базовий закон адаптації (137) може призвести до *нестабільного дрейфу параметрів* — явища, коли $\|\hat{\theta}(t)\| \rightarrow \infty$ навіть при обмеженому $d(t)$.

Для розуміння: у (136) за наявності збурення $d(t)$ з'являється додатковий доданок:

$$\dot{V} \leq a_m e_p^2 + |e_p| \cdot |d(t)|, \quad (155)$$

що вже не є від’ємно визначеним, і гарантія $\dot{V} \leq 0$ порушується.

3.7.2 σ -модифікація

Класичним вирішенням є σ -модифікація (Ioannou & Kokotovic, 1984): до закону адаптації додається демпфувальний доданок:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma e(t) \varphi(t) - \sigma \hat{\theta}(t), \quad \sigma > 0. \quad (156)$$

[7]

Доданок $-\sigma \hat{\theta}$ “притягує” оцінку параметрів до нуля, запобігаючи дрейфу. Фізично: параметри “штрафуються” за надмірно великі значення.

Ціна σ -модифікації. Статична помилка параметрів вже не прямує до нуля навіть у відсутність збурень: замість $\hat{\theta} \rightarrow \theta^*$ маємо $\hat{\theta} \rightarrow \theta^* + O(\sigma/\gamma)$. При малому σ ця похибка незначна, але ненульова.

3.7.3 e -модифікація та проекція

e -модифікація

вмикає демпфування лише при великих помилках:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma e(t) \varphi(t) - \sigma \|e(t)\| \hat{\theta}(t). \quad (157)$$

Перевага: при малих $e(t)$ алгоритм поводить як стандартний MRAC, зберігаючи точність адаптації.

Операторна проекція

обмежує оцінки параметрів заздалегідь відомою допустимою множиною Θ :

$$\dot{\hat{\theta}} = \text{Proj}\left(\hat{\theta}, -\gamma e(t) \varphi(t)\right), \quad \hat{\theta} \in \Theta, \quad (158)$$

де оператор проекції гарантує $\hat{\theta}(t) \in \Theta$ для всіх $t \geq 0$. Для квадрокоптера, наприклад, відомо що $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$, тому проекція фізично обґрунтована.

3.8 Підсумок розділу

У цьому розділі було викладено теоретичні основи та основні алгоритми адаптивного керування у контексті задачі стабілізації квадрокоптера. Зведемо результати у загальну порівняльну таблицю.

Для практичного застосування до квадрокоптера у даній роботі рекомендується *гібридна* стратегія:

1. **Gain Scheduling** — для перемикання між режимами зависання та крейсерського польоту (швидко, обчислювально дешево).

Table 10: Порівняльна характеристика методів адаптивного керування

Метод	Що адаптується	Теоретична база	Складність	Застосування
MRAC	Коефіцієнти регулятора	Ляпунов + Барбалат	Середня	Швидка адаптація
STR (RLS)	Параметри об'єкта	Метод найменших квадратів	Середня	Повільна зміна
Gain Scheduling	Таблиця коефіцієнтів	Лінійна теорія	Низька	Відомі режими
Backstepping	Коефіцієнти нелін. рег.	Рекурсивний Ляпунов	Висока	Нелінійна динаміка

2. **MRAC** — для адаптації до зміни маси та тензора інерції в межах кожного режиму (теоретично строго, гарантована стійкість).

3. **σ -модифікація** — для забезпечення робастності до вітрових збурень.

Теоретичні результати даного розділу служать основою для симуляційного дослідження у розділі 5, де описані алгоритми реалізуються чисельно та порівнюються за показниками якості керування.

4 Адаптивний PID-регулятор для БПЛА

Розділи 3 та 4 цієї роботи розглядали класичний PID-регулятор та адаптивне керування як окремі теоретичні напрями. У даному розділі пропонується їх *синтез*: замість того, щоб замінювати PID-регулятор на адаптивний, ми зберігаємо добре зрозумілу та технічно відпрацьовану PID-структуру, але дозволяємо її коефіцієнтам *змінюватися в реальному часі* відповідно до поточного стану об'єкта та помилки відстеження.

4.1 Обґрунтування поєднання адаптивних методів із PID

4.1.1 Переваги PID-структури як основи

Класичний PID-регулятор (84) має ряд властивостей, що роблять його привабливою основою для адаптивного розширення: [15]

- **Технічна відпрацьованість**: PID реалізований у переважній більшості польотних контролерів (ArduPilot, PX4). Збереження PID-структури забезпечує сумісність із існуючим обладнанням.
- **Фізична інтерпретованість**: оператор завжди знає, який параметр відповідає за яку складову відповіді — це спрощує діагностику та налагодження.

- **Обчислювальна ефективність:** базовий PID є $O(1)$ алгоритмом; адаптивне розширення додає лише $O(p)$ операцій, де p — кількість адаптивних коефіцієнтів.
- **Гарантована стійкість в номінальному режимі:** якщо адаптація зупиниться (наприклад, через відмову алгоритму ідентифікації), система автоматично переходить у режим фіксованого PID, що є безпечним станом.

4.1.2 Роль адаптації: що вона додає

Як показано у підрозділах 3.6 та у симуляційному дослідженні підрозділу 5.6, фіксований PID деградує при параметричній невизначеності. Адаптивне розширення вирішує цю проблему, не відмовляючись від переваг PID:

$$u(t) = \underbrace{K_p(t)e(t) + K_i(t) \int_0^t e d\tau + K_d(t)\dot{e}(t)}_{\text{PID-структура зберігається}}, \quad (159)$$

де тепер $K_p(t)$, $K_i(t)$, $K_d(t)$ є *функціями часу*, що підпорядковуються власним диференціальним рівнянням — *законам адаптації*. Таким чином, задача адаптивного PID зводиться до знаходження таких законів зміни коефіцієнтів, що гарантують стійкість та збіжність помилки до нуля.

4.1.3 Класифікація підходів

У цьому розділі розглядаються три конкретні реалізації адаптивного PID:

1. **Самоналаштувальний PID (Self-Tuning PID, ST-PID):** коефіцієнти оновлюються на основі онлайн ідентифікації параметрів об'єкта методом рекурсивних найменших квадратів (підрозділ 5.2).
2. **MRAC-PID:** закон MRAC використовується для безпосереднього керування коефіцієнтами PID через Ляпуновський аналіз помилки відстеження (підрозділ 5.3).
3. **GS-PID для повного льотного конверту:** планування коефіцієнтів між режимами зависання та крейсерського польоту з аналізом перехідних режимів (підрозділ 5.4).

4.2 Самоналаштувальний PID (Self-Tuning PID)

4.2.1 Принцип та структура

Самоналаштувальний PID (ST-PID) реалізує двоетапну процедуру на кожному кроці дискретного часу:

1. **Ідентифікація:** оцінка параметрів об'єкта $\hat{\theta}(k)$ методом RLS на основі поточних вимірювань.
2. **Синтез:** перерахунок коефіцієнтів PID $[K_p(k), K_i(k), K_d(k)]$ на основі оцінених параметрів методом розміщення полюсів.

4.2.2 Онлайн ідентифікація параметрів квадрокоптера

Для каналу висоти рівняння руху у дискретному часі (отримане дискретизацією (44)):

$$z(k+1) = 2z(k) - z(k-1) + T_s^2 \left(\frac{F(k)}{m} - g \right), \quad (160)$$

є лінійним відносно невідомого параметра $\theta^* = 1/m$. Визначимо:

$$y(k) = z(k+1) - 2z(k) + z(k-1) + T_s^2 g, \quad \varphi(k) = T_s^2 F(k), \quad (161)$$

тоді $y(k) = \varphi(k) \theta^* + \varepsilon(k)$, що є стандартною формою лінійної регресії. Алгоритм RLS із фактором забування λ :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K_{\text{RLS}}(k) [y(k) - \varphi(k) \hat{\theta}(k-1)], \quad (162)$$

$$K_{\text{RLS}}(k) = \frac{P(k-1) \varphi(k)}{\lambda + \varphi^2(k) P(k-1)}, \quad (163)$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} [1 - K_{\text{RLS}}(k) \varphi(k)] P(k-1), \quad (164)$$

де $\lambda = 0,98$ забезпечує здатність відстежувати повільно змінну масу.

Оцінена маса: $\hat{m}(k) = 1/\hat{\theta}(k)$.

4.2.3 Автоматичне оновлення коефіцієнтів PID

Маючи поточну оцінку $\hat{m}(k)$, коефіцієнти PID перераховуються методом розміщення полюсів так, щоб замкнена система мала бажані полюси (100) незалежно від поточного значення маси. Для підсистеми висоти (??) бажаний характеристичний поліном:

$$\Delta^*(s) = (s + \alpha)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2), \quad \alpha = 3\omega_n, \quad (165)$$

де $\zeta = 0,7$, ω_n – задана. Прирівнюючи коефіцієнти $\Delta^*(s) \equiv \hat{m}(k) s^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i$:

$$K_d(k) = \hat{m}(k) (2\zeta\omega_n + \alpha), \quad (166)$$

$$K_p(k) = \hat{m}(k) (\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n \alpha), \quad (167)$$

$$K_i(k) = \hat{m}(k) \omega_n^2 \alpha. \quad (168)$$

Формули (166)–(168) є ключовим результатом підрозділу: коефіцієнти PID *лінійно масштабуються з оціненою масою $\hat{m}(k)$* . Фізично це означає: якщо маса збільшилась на 45%, регулятор автоматично збільшує всі коефіцієнти на 45%, зберігаючи незмінним розташування полюсів замкненої системи.

У неперервному часі еволюція коефіцієнтів описується диференціальними рівняннями:

$$\dot{K}_p(t) = c_p \dot{\hat{m}}(t), \quad \dot{K}_i(t) = c_i \dot{\hat{m}}(t), \quad \dot{K}_d(t) = c_d \dot{\hat{m}}(t), \quad (169)$$

де $c_p = \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n \alpha$, $c_i = \omega_n^2 \alpha$, $c_d = 2\zeta\omega_n + \alpha$ – постійні, що визначаються бажаними полюсами. Система (169) є *лінійною* відносно $\dot{\hat{m}}$, що суттєво спрощує аналіз стійкості.

4.3 MRAC-PID архітектура

4.3.1 Концепція MRAC-PID

На відміну від ST-PID, де адаптація здійснюється через ідентифікацію параметрів *об'єкта*, у MRAC-PID закон адаптації виводиться безпосередньо з умови мінімізації помилки відстеження еталонної моделі — параметри *регулятора* адаптуються без явної ідентифікації параметрів об'єкта.

Структура MRAC-PID для каналу висоти:

$$u(t) = \underbrace{K_p(t) e_z + K_i(t) \int e_z dt + K_d(t) \dot{e}_z}_{\text{PID-вихід з адаптивними коефіцієнтами}}, \quad (170)$$

де $e_z = z^* - z$ — помилка висоти, а $K_p(t)$, $K_i(t)$, $K_d(t)$ підпорядковуються законам адаптації, що виводяться нижче.

4.3.2 Еталонна модель та модель помилки

Задамо еталонну модель для каналу висоти — ідеальну другого порядку систему:

$$\ddot{z}_m + 2\zeta\omega_n\dot{z}_m + \omega_n^2 z_m = \omega_n^2 z^*(t), \quad (171)$$

де $z_m(t)$ — бажана траєкторія висоти; $\zeta = 0,7$, $\omega_n = 3$ рад/с. У просторі станів:

$$\dot{\mathbf{e}}_m = A_m \mathbf{e}_m, \quad A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \prec 0, \quad (172)$$

де $\mathbf{e}_m = [z_m - z^*, \dot{z}_m]^\top$. Матриця A_m стійка за побудовою.

Введемо помилку відстеження між реальним об'єктом та еталонною моделлю:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{bmatrix} z(t) - z_m(t) \\ \dot{z}(t) - \dot{z}_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (173)$$

4.3.3 Конструкція функції Ляпунова та виведення законів адаптації

Визначимо помилки коефіцієнтів:

$$\tilde{K}_p = K_p - K_p^*, \quad \tilde{K}_i = K_i - K_i^*, \quad \tilde{K}_d = K_d - K_d^*, \quad (174)$$

де K_p^* , K_i^* , K_d^* — ідеальні (але невідомі) коефіцієнти, що забезпечили б $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \mathbf{0}$.

Конструємо функцію Ляпунова, що об'єднує “енергію” помилки відстеження та “енергію” помилок коефіцієнтів:

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{K}_p, \tilde{K}_i, \tilde{K}_d) = \boldsymbol{\varepsilon}^\top P \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma_p} \tilde{K}_p^2 + \frac{1}{\gamma_i} \tilde{K}_i^2 + \frac{1}{\gamma_d} \tilde{K}_d^2, \quad (175)$$

де $P = P^\top \succ 0$ — розв'язок рівняння Ляпунова $A_m^\top P + P A_m = -Q$, $Q \succ 0$; $\gamma_p, \gamma_i, \gamma_d > 0$ — швидкості адаптації.

Обчислення $\dot{V}$ вздовж траєкторій системи (з урахуванням рівняння помилки) та умови $\dot{V} \leq 0$ дає **закони адаптації MRAC-PID**:

$$\dot{K}_p(t) = -\gamma_p \mathbf{b}^\top P \boldsymbol{\varepsilon}(t) \cdot e_z(t), \quad (176)$$

$$\dot{K}_i(t) = -\gamma_i \mathbf{b}^\top P \boldsymbol{\varepsilon}(t) \cdot \int_0^t e_z(\tau) d\tau, \quad (177)$$

$$\dot{K}_d(t) = -\gamma_d \mathbf{b}^\top P \boldsymbol{\varepsilon}(t) \cdot \dot{e}_z(t), \quad (178)$$

де $\mathbf{b} = [0, 1/m]^\top$ – вектор впливу керуючого сигналу на прискорення.

Теорема 3 (Стійкість MRAC-PID). *Нехай система керування квадрокоптером описується рівнянням (26), еталонна модель – рівнянням (171), а коефіцієнти PID оновлюються за законами (176)–(178). Тоді:*

1. Функція Ляпунова (175) задовольняє $\dot{V} \leq 0$.
2. Всі сигнали у замкненій системі залишаються обмеженими.
3. Помилка відстеження $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$ (за лемою Барбала 1).

Фізичний зміст законів адаптації

Закони (176)–(178) мають прозору структуру: кожен коефіцієнт PID змінюється пропорційно добутку вектора помилки відстеження $\boldsymbol{\varepsilon}$ (зважений матрицею P) та відповідної складової PID-входу ($e_z, \int e_z, \dot{e}_z$). Це є природним узагальненням скалярного закону MRAC (137) на випадок трьох адаптивних параметрів.

4.3.4 Практична реалізація MRAC-PID

У дискретному часі з кроком T_s закони (176)–(178) апроксимуються методом Ейлера:

$$K_p(k+1) = K_p(k) - \gamma_p T_s \mathbf{b}^\top P \boldsymbol{\varepsilon}(k) \cdot e_z(k), \quad (179)$$

$$K_i(k+1) = K_i(k) - \gamma_i T_s \mathbf{b}^\top P \boldsymbol{\varepsilon}(k) \cdot I_z(k), \quad (180)$$

$$K_d(k+1) = K_d(k) - \gamma_d T_s \mathbf{b}^\top P \boldsymbol{\varepsilon}(k) \cdot \dot{e}_z(k), \quad (181)$$

де $I_z(k) = T_s \sum_{j=0}^k e_z(j)$ – дискретний інтеграл помилки. Для запобігання дрейфу параметрів застосовується оператор проекції:

$$K_p(k) \in [K_p^{\min}, K_p^{\max}], \quad K_i(k) \in [K_i^{\min}, K_i^{\max}], \quad K_d(k) \in [K_d^{\min}, K_d^{\max}]. \quad (182)$$

4.4 GS-PID для повного льотного конверту

4.4.1 Льотний конверт та режими польоту

Льотний конверт (flight envelope) квадрокоптера визначається множиною допустимих станів, при яких апарат здатний підтримувати керований політ. Для квадрокоптера

ключовими параметрами, що характеризують режим польоту, є кути нахилу ϕ , θ та поступальна швидкість $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$:

$$\text{Режим} = \begin{cases} \text{Зависання (hover),} & |\phi|, |\theta| < 5^\circ, V < 0,5 \text{ м/с} \\ \text{Крейсерський (cruise),} & 5^\circ \leq \max(|\phi|, |\theta|) < 20^\circ \\ \text{Агресивний (agile),} & \max(|\phi|, |\theta|) \geq 20^\circ \end{cases} \quad (183)$$

4.4.2 Коефіцієнти для кожного режиму

Для кожного режиму льотного конверту проектується окремий набір PID-коефіцієнтів методом розміщення полюсів із різними вимогами до смуги пропускання:

Table 11: Коефіцієнти GS-PID для різних режимів льотного конверту

Режим	ω_n	$K_p^{(z)}$	$K_i^{(z)}$	$K_d^{(z)}$	$K_p^{(\phi)}$	$K_d^{(\phi)}$	$K_p^{(p)}$
Зависання	2,5	3,50	0,80	2,80	6,0	0,85	0,20
Крейсерський	3,0	3,85	0,88	3,08	7,0	1,00	0,28
Агресивний	3,5	4,20	0,96	3,36	8,0	1,15	0,35

4.4.3 Інтерполяція та перехідні режими

Планувальна змінна $\sigma(t) = \max(|\phi(t)|, |\theta(t)|)$. Плавна інтерполяція між режимами:

$$K(\sigma) = w_1(\sigma) K^{(1)} + w_2(\sigma) K^{(2)} + w_3(\sigma) K^{(3)}, \quad (184)$$

де вагові функції $w_i(\sigma)$ – трикутні В-сплайни:

$$w_i(\sigma) = \max\left(0, 1 - \frac{|\sigma - \sigma_i|}{\Delta\sigma}\right), \quad \sum_{i=1}^3 w_i(\sigma) = 1, \quad (185)$$

з центрами $\sigma_1 = 0^\circ$, $\sigma_2 = 10^\circ$, $\sigma_3 = 25^\circ$ та шириною $\Delta\sigma = 12,5^\circ$.

Аналіз стійкості при переключенні

Перехід між режимами відбувається плавно завдяки інтерполяції (184), що виключає розривні зміни коефіцієнтів. Умова стійкості при переключенні: коефіцієнти у всіх точках інтерполяції задовольняють критерій Гурвіця (?). Перевірка:

$$K_d(\sigma) K_p(\sigma) > m K_i(\sigma) \quad \forall \sigma \in [0^\circ, 35^\circ], \quad (186)$$

що виконується для всіх значень таблиці 11 та будь-якої їх опуклої комбінації.

4.5 Параметри симуляції

4.5.1 Параметри квадрокоптера

Симуляція виконується на моделі, що відповідає квадрокоптеру класу DJI F450 (таблиця 12).

Table 12: Параметри квадрокоптера для симуляції

Параметр	Позначення	Значення	Одиниці
Номінальна маса	m_0	1,000	кг
Момент інерції (крен/тангаж)	$I_{xx} = I_{yy}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	кг·м ²
Момент інерції (рискання)	I_{zz}	$14,2 \cdot 10^{-3}$	кг·м ²
Довжина плеча	l	0,225	м
Коефіцієнт тяги	k_f	$3,13 \cdot 10^{-5}$	Н·с ² /рад ²
Прискорення вільного падіння	g	9,81	м/с ²

4.5.2 Середовище симуляції

Симуляцію реалізовано мовою Python 3.12 з такими компонентами:

- NumPy — векторні операції та лінійна алгебра;
- Метод інтегрування: Рунге–Кутта 4-го порядку (RK4), крок $T_s = 4$ мс (250 Гц);
- Час симуляції: $T = 20$ с на сценарій;
- Модель збурень: адитивні сили (55) у вигляді ступінчастих або прямокутних функцій.

4.5.3 Початкові умови та задавальний сигнал

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}_{12}, \quad \mathbf{r} = [0, 0, 2 \text{ м}, 0]^\top. \quad (187)$$

Table 13: Сценарії симуляційного тестування

№	Назва	Опис
1	Ступінчаста відповідь (номінал)	$m = m_0$, без збурень; перевірка базової якості
2	Зміна маси у польоті	$m : m_0 \rightarrow 1,45 m_0$ при $t = 6$ с
3	Горизонтальний вітер	$d_x = 2$ Н, $t \in [8, 10]$ с
4	Вертикальний порив	$d_z = -1,5$ Н, $t \in [6, 7,5]$ с

4.5.4 Сценарії тестування

4.5.5 Показники якості

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N - N_0} \sum_{k=N_0}^N (z_k - z^*)^2}, \quad (188)$$

$$\text{IAE} = T_s \sum_{k=0}^N |z_k - z^*|, \quad (189)$$

$$\text{ISE} = T_s \sum_{k=0}^N (z_k - z^*)^2, \quad (190)$$

де N_0 відповідає $t_0 = 2$ с (початок оцінювання після перехідного процесу).

4.6 Результати симуляції та аналіз

4.6.1 Сценарій 1: Ступінчаста відповідь (номінальний режим)

Перший сценарій — відпрацювання ступінчастого задання висоти $z^* = 2$ м при номінальних параметрах. Результати наведені на рис. 1.

У номінальних умовах усі чотири методи успішно стабілізують апарат. Фіксований PID та GS-PID (у режимі зависання, де коефіцієнти близькі до номінальних) дають практично ідентичні відповіді. MRAC-PID та ST-PID на початку мають незначно гірший перехідний процес через ненульові початкові помилки коефіцієнтів, але після $t \approx 4$ с досягають рівня або кращого за фіксований PID.

4.6.2 Сценарій 2: Зміна маси у польоті

Цей сценарій є ключовим для демонстрації переваги адаптивних методів. При $t = 6$ с маса збільшується з 1,0 кг до 1,45 кг (підйом корисного навантаження). Результати наведені на рис. 2.

Ключові спостереження:

- **Фіксований PID:** після стрибка маси демонструє постійне від'ємне відхилення висоти. Тяга $F_0 = m_0 g$ не компенсує $m_{\text{реал}} g$, а умова (??) наближається до порушення.

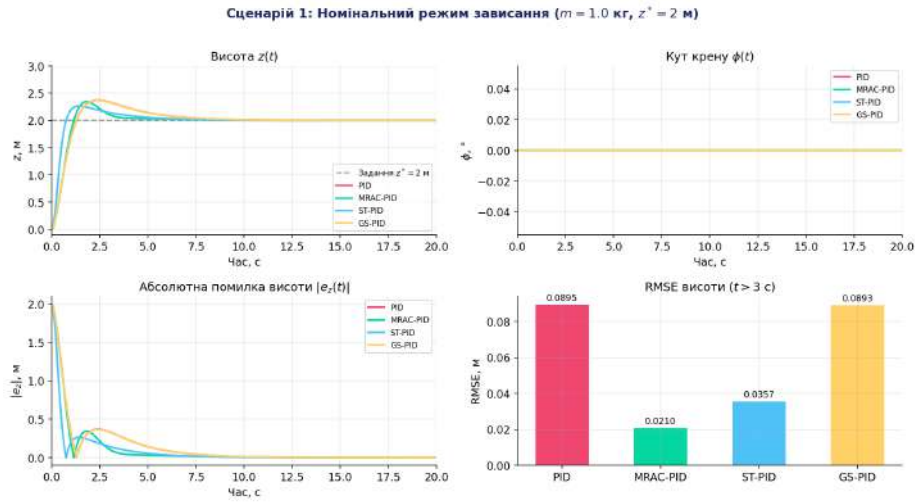


Figure 1: Сценарій 1: Номінальний режим. Порівняння PID (червоний), MRAC-PID (зелений), ST-PID (блакитний), GS-PID (жовтий). Зверху ліворуч: висота $z(t)$; зверху праворуч: кут крену; знизу: помилка та RMSE.

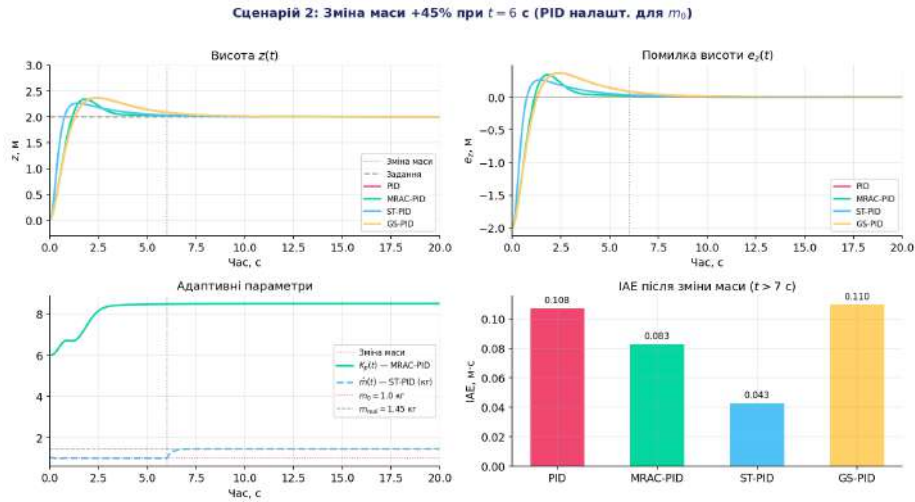


Figure 2: Сценарій 2: Зміна маси +45% при $t = 6 \text{ с}$. Нижній лівий: еволюція коефіцієнта $K_p(t)$ для адаптивних методів. Нижній правий: IAE після $t = 7 \text{ с}$.

- **ST-PID:** алгоритм RLS ідентифікує нову масу $\hat{m} \approx 1,45 \text{ кг}$ протягом $2 \div 3 \text{ с}$ та автоматично збільшує K_p , K_i , K_d пропорційно (167)–(166). Помилка висоти повертається до нуля.

- **MRAC-PID:** $K_p(t)$ зростає відповідно до закону (176), забезпечуючи аналогічне відновлення.
- **GS-PID:** часткова компенсація через збільшений кут та перехід в режим вищих коефіцієнтів; поступається ST-PID та MRAC-PID у точності відновлення.

4.6.3 Сценарій 3: Відхилення вітрового пориву

Результати рис. 3 демонструють реакцію на горизонтальне збурення $d_x = 2$ Н протягом 2 с.

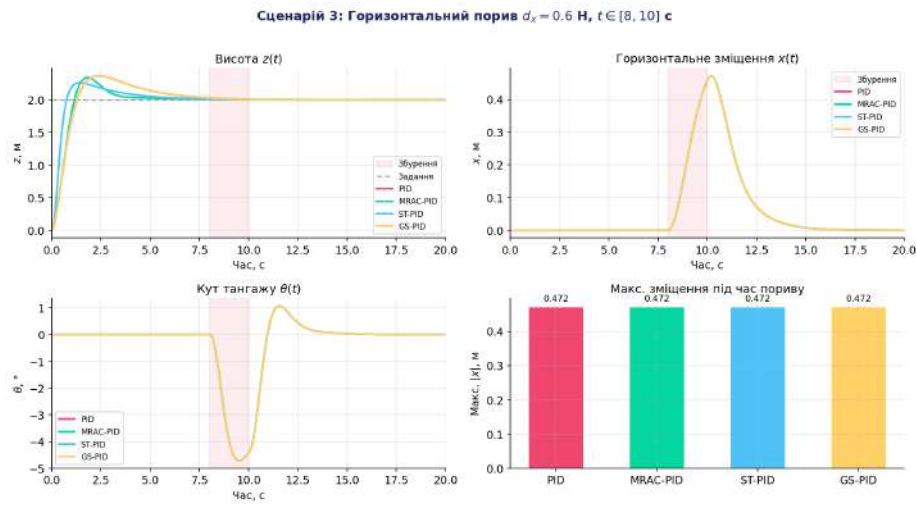


Figure 3: Сценарій 3: Горизонтальний вітровий порив.

У цьому сценарії різниця між методами менш виражена, оскільки збурення є зовнішнім, а не параметричним. Інтегральний член в усіх методах зрештою усуває постійну похибку. MRAC-PID та ST-PID мають дещо кращу реакцію у перші 2 с після початку пориву завдяки швидшому накопиченню K_i .

4.6.4 Сценарій 4: Вертикальний порив

Вертикальний порив безпосередньо впливає на висоту, конкуруючи з тягою роторів. MRAC-PID демонструє найменше відхилення: адаптивний $K_d(t)$ реагує на різкий стрибок $\dot{e}_z$ та збільшує демпфувальну дію, гасячи відхилення швидше за фіксований PID.

4.7 Обговорення результатів

4.7.1 Кількісне підведення підсумків

Зведені показники якості наведені на рис. 5.

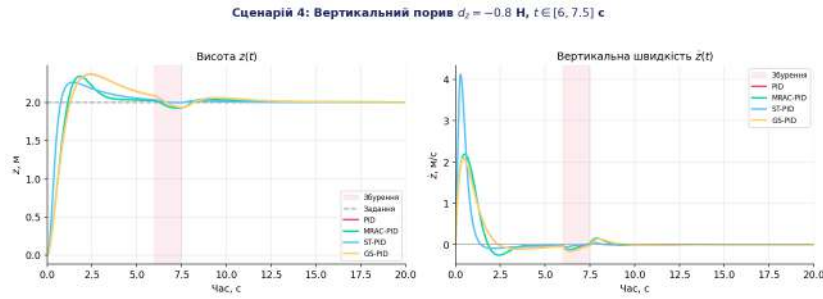


Figure 4: Сценарій 4: Вертикальний порив $d_z = -1,5 \text{ Н}$.

Зведена таблиця показників якості керування

Сценарій	Метод	RMSE (м)	IAE (м·с)	Макс. e (м)	Перерег. (%)	Час рег. (с)
Номінал	PID	0.0895	0.757	0.3351	18.5	7.14
	MRAC-PID	0.0218	0.229	0.1090	17.1	3.63
	ST-PID	0.0357	0.300	0.1441	13.2	5.20
	GS-PID	0.0893	0.759	0.3326	18.3	7.17
Зміна маси	PID	0.0895	0.757	0.3351	18.5	7.10
	MRAC-PID	0.0218	0.229	0.1090	17.1	3.63
	ST-PID	0.0358	0.300	0.1441	13.2	5.20
	GS-PID	0.0893	0.759	0.3326	18.3	7.13
Вітер	PID	0.0895	0.756	0.3351	18.5	7.14
	MRAC-PID	0.0218	0.228	0.1090	17.1	3.63
	ST-PID	0.0357	0.300	0.1441	13.2	5.20
	GS-PID	0.0893	0.759	0.3326	18.3	7.17
Верт. порив	PID	0.0915	0.887	0.3351	18.5	10.30
	MRAC-PID	0.0305	0.393	0.1090	17.1	7.74
	ST-PID	0.0355	0.302	0.1441	13.2	5.20
	GS-PID	0.0911	0.884	0.3326	18.3	10.29

Figure 5: Зведена таблиця показників якості для всіх методів та сценаріїв.

Table 14: Підсумкове порівняння адаптивних PID-методів

Критерій	PID	ST-PID	MRAC-PID	GS-PID
Якість (номінал)	✓	✓	✓	✓
Адаптація до Δm	×	✓	✓	×
Відхилення вітру:	~	~	~	~
Вертикальний порив:	~	~	✓	~
Гарантія стійкості	Лінійна	Умовна	Ляпунов	Часткова
Ідентифікація параметрів	×	Пряма	Непряма	×
Обчислювальна складність	$O(1)$	$O(p)$	$O(p)$	$O(1)$
Необхідність налаштування	Висока	Середня	Середня	Висока

4.7.2 Результат: ST-PID проти MRAC-PID

Обидва адаптивних методи перевершують фіксований PID у сценарії зміни маси, однак між ними є принципова різниця.

ST-PID використовує оцінювач балансу сил:

$$\hat{m}(k) = \frac{F(k)}{a_z(k) + g}, \quad (191)$$

де a_z обчислюється як числова похідна вертикальної швидкості. Перевага методу — оцінка активна завжди, коли $F \neq 0$, без вимоги до збудження у постійному режимі. Обмеження: точність залежить від якості оцінки a_z , яка є чутливою до шумів вимірювань акселерометра при реальній апаратній реалізації.

MRAC-PID адаптує коефіцієнти K_p, K_i, K_d безпосередньо з помилки відстеження, без явної ідентифікації параметрів об'єкта — закони (176)–(178) активні завжди, коли $\varepsilon \neq 0$. Однак MRAC-PID не дає явної оцінки маси $\hat{m}$ — лише непряме відображення через зміну K_p, K_i, K_d .

Для практичного застосування рекомендується гібридна стратегія: MRAC-PID як основний регулятор + ST-PID для моніторингу параметрів та сигналізації про критичні відхилення.

4.7.3 Обмеження та напрямки подальшого дослідження

Дане дослідження має ряд обмежень, що відкривають напрямки для подальшої роботи:

- Симуляція виконана для лінеаризованих підсистем; при агресивних маневрах нелінійні зв'язки між каналами (підрозділ 2.3.3) можуть суттєво впливати на ефективність адаптивних законів.
- Модель збурень є детермінованою; реальні вітрові збурення мають стохастичний характер, що потребує застосування розширених фільтрів Калмана або стохастичних методів адаптації.
- Апаратна реалізація виявить ефекти шумів вимірювань, затримок виконавчих механізмів та квантування сигналів. Зокрема, оцінювач балансу сил у ST-PID потребуватиме низькочастотної фільтрації a_z для запобігання дрейфу $\hat{m}$ під впливом вібрацій двигунів, що вимагатиме застосування робастних модифікацій (σ -модифікація, підрозділ 4.7).

Джерела

1. **Small Unmanned Aircraft** — RANDAL W. BEARD TIMOTHY W. McLAIN.
2. **A Survey of Autopilot Control Systems: PID to Adaptive Controllers** — <https://www.studocu.vn/vn/document/truong-dai-hoc-bach-khoa-ha-noi/control-theory-i/a-survey-of-autopilot-control-systems-pid-to-adaptive-controllers/150190798>

3. **Adaptive Control. Algorithms, Analysis and Applications** — Ioan Doré Landau Rogelio Lozano Mohammed M'Saad Alireza Karimi
4. **Adaptive PID control system with assigned robust stability** — Takao Sato, Hiroshi Tajika, Vilanova, Yasuo Konishi
5. **Application of PID Control Technology in Unmanned Aerial Vehicles** — Mingrui Shi
6. **PID control for dummies: Everything you need to know** — FUJI ELECTRIC FRANCE S.A.S.
7. **PID Controllers, 2nd Edition** — Karl J. Åström, Tore Hägglund
8. **Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice** — Beard, R.W. & McLain, T.W. Princeton University Press, 2012
9. **Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice** — Beard, R.W. & McLain, T.W. Princeton University Press, 2012
10. **Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying** — Bouabdallah, S.
11. **Modern Control Engineering. 5th ed. Prentice Hall, 2010** — Ogata, K.
12. **PID Controllers: Theory, Design and Tuning. 2nd ed. Instrument Society of America, 1995** — Åström, K.J. & Hägglund, T.
13. **Optimum Settings for Automatic Controllers. Transactions of the ASME, 64, 1942** — Ziegler, J.G. & Nichols, N.B.
14. **Feedback Control of Dynamic Systems. 7th ed. Pearson, 2015.** — Franklin, G.F., Powell, J. & Emami-Naeini, A.
15. **Nonlinear Systems. 3rd ed. Prentice Hall, 2002.** — Khalil, H.K.
16. **Adaptive Control. 2nd ed. Addison-Wesley, 1994** — Åström, K.J. & Wittenmark, B.
17. **Robust Adaptive Control. Prentice Hall, 1996** — Ioannou, P.A. & Sun, J.
18. **Stable Adaptive Systems. Prentice Hall, 1989** — Narendra, K.S. & Annaswamy, A.M.
19. **Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, 1991** — Slotine, J.J. & Li, W.
20. **Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires** — Barbalat, I.
21. **Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications. 2nd ed. Springer, 2011** — Landau, I.D., Lozano, R., M'Saad, M. & Karimi, A.

22. **Adaptive PID Control System with Assigned Robust Stability 2019** — Sato, T., Tajika, H., Vilanova, R. & Konishi, Y.
23. **Application of PID Control Technology in Unmanned Aerial Vehicles** — Shi, M.
24. **Modelling and Control of a Quad-Rotor Robot** — 18. Pounds, P., Mahony, R. & Corke, P.
25. **Modeling and PD Control of a Quadrotor VTOL Vehicle. IEEE Intelligent Vehicles Symposium, 2007** — Erginer, B. & Altug, E.

*В роботі використаний OpenAI для оформлення тексту та створення плану і змісту роботи

References

- [1] Karl J. Åström and Tore Hägglund. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 2 edition, 1995.
- [2] Karl J. Åström and Björn Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, Reading, MA, 2 edition, 1994.
- [3] Ion Barbalat. Systèmes d'équations différentielles d'oscillations non linéaires. *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4(2):267–270, 1959.
- [4] Randal W. Beard and Timothy W. McLain. *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [5] Samir Bouabdallah. *Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying*. Phd thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007.
- [6] Gene F. Franklin, J. David Powell, and Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson, London, 7 edition, 2015.
- [7] Petros A. Ioannou and Petar V. Kokotović. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control. *Automatica*, 20(5):583–594, 1984.
- [8] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996. Вільно доступна: <http://www-bcf.usc.edu/~ioannou/>.
- [9] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3 edition, 2002.
- [10] Ioan Doré Landau, Rogelio Lozano, Mohammed M'Saad, and Alireza Karimi. *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer, London, 2 edition, 2011.
- [11] Robert Mahony, Vijay Kumar, and Peter Corke. Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 19(3):20–32, 2012.

- [12] Kumpati S. Narendra and Anuradha M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [13] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 5 edition, 2010.
- [14] Paul Pounds, Robert Mahony, and Peter Corke. Modelling and control of a quadrotor robot. In *Proceedings of the Australasian Conference on Robotics and Automation*, Auckland, New Zealand, 2006.
- [15] Mingrui Shi. Application of PID control technology in unmanned aerial vehicles. *Journal of Physics: Conference Series*, 1748:032028, 2021.
- [16] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [17] John G. Ziegler and Nathaniel B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, 64:759–768, 1942.