ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЮВАННЯ φ-СУБГАУССОВОГО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

К.І. ШУРУБУРА

У роботах [1, 2] запропоновано алгоритм моделювання процесів строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$, але не розглядалася задача оптимізації параметрів моделі.

В даній роботі для φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху з функцією $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $|x| \geq 1$, $\omega \geq 2$, знайдено оптимальні значення параметрів моделі.

Означення 1. [1] Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орліча*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$. Для N-функції φ виконується *умова Q*, якщо $\liminf\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. Можливо, що $C = +\infty$.

Означення 2. [1] Нехай φ — N-функція Орлича, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ-субгауссових випадкових величин), якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $\mathsf{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda))$.

Означення 3. [1] Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ-субгауссовим (тобто, належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Означення 4. [1] Будемо називати центрований випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t),\ t \in T\}$ строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом (φ-УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, якщо Z_H є строго φ-субгауссовим та $R_H(t,s) = \mathsf{E}Z_H(s)Z_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H})$.

Означення 5. Модель $\tilde{Z}$ наближає процес Z із заданими надійністю $1-\nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0,1])$, якщо

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |Z(t) - \tilde{Z}(t)| > \delta\right) \leq \nu.$$

Розглядається модель φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху на основі розкладу в ряд:

$$\tilde{Z}(t) = \sum_{n=1}^{N} \Big(\tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t)\, \xi_n \ + \ \tilde{d}_n \big(1 - \cos(\tilde{y}_n t)\big)\, \eta_n \Big), \tag{1}$$

де $t \in [0,1]$, $\tilde{c}_n$ та $\tilde{d}_n$ – деякі сталі, $\tilde{x}_n$ та $\tilde{y}_n$ – наближені значення нулів функцій Бесселя першого роду J_{-H} та J_{1-H} відповідно, ξ_n, η_n – незалежні однаково розподілені випадкові величини з простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, $\mathsf{E}\xi_n^2 = \mathsf{E}\eta_n^2 = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Припустимо, що похибка наближення для значень $\tilde{c}_n$, $\tilde{d}_n$, $\tilde{x}_n$ та $\tilde{y}_n$ відсутня.

Наступна теорема містить основний результат даного дослідження.

Теорема 1. *Нехай процес Z є сепарабельним строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста $H \in (0,1)$ та функцією $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $|x| \geq 1$, $\omega \geq 2$. Модель (1) наближає процес Z із заданими надійністю $1-\nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в просторі $C([0,1])$, якщо виконуються такі нерівності:*

$$N \geq \left(\frac{a_\varphi}{\delta} \sqrt{\frac{5c}{2H}} \right)^{\frac{1}{H}} + 1 \quad \textit{та} \quad \frac{\pi^2 N^2}{8} \exp\left[\frac{1}{H(1-x_G)} - \frac{1}{q}\left(\sqrt{G} - 1\right)^q \right] \leq \nu,$$

де

$$G = \frac{N^{2H}\delta^2 2H}{5ca_\varphi^2}, \quad x_G = R\left(\frac{8G}{5} \left(\frac{G^{\frac{1}{\omega-1}}}{(1-y_G)^2} \right)^{\frac{1}{y_G}} \right), \quad y_G = R\left(G^{\frac{1}{2(\omega-1)}} \right),$$

$c = \frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{\pi^{2H+1}}$, $q : \frac{1}{\omega} + \frac{1}{q} = 1$, *та $R(p)$ - розв'язок наступного рівняння відносно z:*

$$\frac{1}{1-z} + ln(1-z) - lnp - 1 = 0, \ \textit{для}\ z \in (0,1),\ p > 1.$$

При цьому значення параметрів моделі є оптимальними, тобто, дають можливість визначити мінімально необхідну кількість доданків N у моделі (1).

Література

[1] Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. *φ-субгауссові випадкові процеси.* К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. 231 с.

[2] Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O. *Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-Processes: A Series Expansion Approach* // Methodology and Computing in Applied Probability. 2005. **7**. P. 379–400.

Київський політехнічний інститут Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: shurubura@hotmail.com