КОГОМОМОРФІЗМИ ГРАФІВ І МЕТРИЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ МІЖ ЇХНІМИ ДОПОВНЕННЯМИ

А.О. ГАК, Ю.-Л.В. ДЕХТЯР, С.О. КОЗЕРЕНКО, І.П. РОМАНЮК

У роботі розглядаються лише прості неорієнтовані скінченні графи. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ між множинами вершин двох графів G, H називається гомоморфізмом, якщо для всіх ребер $uv \in E(G)$ виконується $f(u)f(v) \in E(H)$.

Для зв'язного графа G через d_G позначатимемо звичайну відстань на множині вершин $V(G)$, де $d_G(u,v)$ дорівнює довжині найкоротшого ланцюга між u та v у G. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ між двома зв'язними графами G і H називається метричним, якщо $d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u,v)$ для всіх пар вершин $u, v \in V(G)$. Наступний результат показує, що гомоморфізми є метричними відображеннями.

Твердження 1. [2] *Нехай G і H зв'язні графи. Тоді $f : V(G) \to V(H)$ є метричним тоді й тільки тоді, коли $f(u)f(v) \in E(H)$ або $f(u) = f(v)$ для всіх ребер $uv \in E(G)$.*

Цей критерій метричних відображень можна використати як їхнє означення на випадок будь-яких (не обов'язково зв'язних) графів.

Відображення $f : V(G) \to V(H)$ називається когомоморфізмом [1], якщо $f^{-1}(e) \in E(G)$ для всіх ребер $e \in E(H[\operatorname{Im} f])$. Наприклад, якщо образ $\operatorname{Im} f$ є незалежною множиною, тоді f є когомоморфізмом. Також із означення одразу слідує, що кожен когомоморфізм між G і H є метричним відображенням між доповненнями $\overline{G}$ і $\overline{H}$. Проте, не навпаки: розглянемо відображення f циклу C_4 у K_2, при якому пари протилежних вершин із C_4 переходять у дві вершини K_2. Тоді f є метричним між $\overline{C_4} = 2K_2$ і $\overline{K_2}$, але не є когомоморфізмом. Ми покажемо, що ці два класи відображень досить сильно відрізняються навіть у класі гомоморфізмів.

Спершу ми наведемо характеризацію гомоморфізмів, які є метричними відображеннями між доповненнями. Нагадаємо, що дві вершини $u, v \in V(G)$ називаються фальшивими близнюками, якщо $N_G(u) = N_G(v)$ (тут $N_G(x) = \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$ позначає окіл вершини x у графі G).

Теорема 1. *Для $f : V(G) \to V(H)$ наступні умови еквівалентні:*

(1) *f є гомоморфізмом між G, H і метричним між $\overline{G}$, $\overline{H}$;*
(2) *для всіх $u, v \in V(G)$ маємо: $uv \in E(G)$ тоді й лише тоді, коли $f(u)f(v) \in E(H)$;*

(3) *f задовольняє дві умови:*
- *для всіх $u, v \in V(G)$ із $f(u) = f(v)$ слідує $u = v$ або u, v є фальшивими близнюками;*
- *f індукує ізоморфізм $G/R_f \simeq H[\operatorname{Im} f]$ (тут $R_f = \{(u, v) \in V(G)^2 : f(u) = f(v)\}$).*

Наслідок 1. *Для графів G і H існує гомоморфізм $f : V(G) \to V(H)$, який є метричним відображенням між їхніми доповненнями тоді й тільки тоді, коли існує відношення еквівалентності R на $V(G)$ таке, що R є подрібненням відношення "бути фальшивими близнюками" й фактор-граф G/R ізоморфний деякому породженому підграфу H.*

Для опису когомоморфізмів графів нам знадобляться нові позначення. Через $\operatorname{Iso}(G)$ ми позначаємо множину ізольованих вершин графа G. Для відображення $f : V(G) \to V(H)$ покладемо
$$A(f) = \{u \in V(G) : f(u) \notin \operatorname{Iso}(H[\operatorname{Im} f])\}.$$

Теорема 2. *Відображення $f : V(G) \to V(H)$ є когомоморфізмом тоді й тільки тоді, коли звуження f на $A(f)$ є ін'єкцією, а обернене відображення $f^{-1} : f(A(f)) \to A(f)$ є гомоморфізмом між відповідними породженими підграфами.*

Наслідок 2. *Відображення $f : V(G) \to V(H)$ є гомоморфізмом та когомоморфізмом тоді й тільки тоді, коли $f(\operatorname{Iso}(G)) = \operatorname{Iso}(H[\operatorname{Im} f])$ та звуження f на $V(G) \setminus \operatorname{Iso}(G)$ є ізоморфізмом на свій образ.*

Наслідок 3. *Нехай G і H зв'язні графи. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ є одночасно гомоморфізмом і когомоморфізмом тоді й тільки тоді, коли f є ізоморфізмом на свій образ.*

Література

[1] P. Hell and J. Nesetril, *Cohomotorphisms of graphs and hypergraphs* // Math. Nachr. **87** (1979), 53–81.

[2] S. Kozerenko, *Linear and metric maps on trees via Markov graphs* // Comment. Math. Univ. Carolin. **59** (2018), 173–187.

Національний університет "Києво-Могилянська академія", Київ, Україна
Email address: artikgak@ukr.net

Національний університет "Києво-Могилянська академія", Київ, Україна
Email address: y.dekhtiar@ukma.edu.ua

Національний університет "Києво-Могилянська академія"
Інститут математики НАН України
Київська школа економіки, Київ, Україна
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net

Національний університет "Києво-Могилянська академія", Київ, Україна
Email address: i.romaniuk@ukma.edu.ua