

Графові алгебри Лі

Станіслав Зубко

Національний університет
“Києво-Могилянська академія”

Для векторних просторів V , W і косиметричного відображення

$$\omega: \bigwedge^2 V \longrightarrow W$$

розглянемо алгебру Лі

$$(V \oplus W, [\cdot, \cdot]_\omega)$$

$$[(v_1, v_2), (w_1, w_2)] = [0, v_1 \wedge v_2]$$

.

Нехай маємо простий граф $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$, де $V_\Gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Розглянемо

- $\langle V_\Gamma \rangle$.
- $\wedge^2 \langle V_\Gamma \rangle$.
- $S_\Gamma = \langle v_i \wedge v_j \mid \{v_i, v_j\} \notin E_\Gamma \rangle \subset \wedge^2 \langle V_\Gamma \rangle$.
- Проекцію $\text{pr}_\Gamma: \wedge^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \wedge^2 \langle V_\Gamma \rangle / S_\Gamma$.

Означення

Графовою алгеброю Лі простого графу $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ називаємо

$$\text{Lie}(\Gamma) = \left(\langle V_\Gamma \rangle \oplus \left(\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / S_\Gamma \right), [\cdot, \cdot]_{\text{pr}_\Gamma} \right)$$

Теорема (Dani-Mainkar (2015))

$$\Gamma_1 \cong \Gamma_2 \iff \text{Lie}(\Gamma_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2)$$

Означення

Орієнтацією простого графу $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ називаємо

$$\text{or}: E_\Gamma \longrightarrow \hat{E}_\Gamma = \{(v_i, v_j) \mid \{v_i, v_j\} \in E_\Gamma\}$$

$$\text{or}(\{v_i, v_j\}) \in \{(v_i, v_j), (v_j, v_i)\}$$

Орієнтація $\text{or}: E_\Gamma \longrightarrow \hat{E}_\Gamma$ індукує

$$\text{or}_*: \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / S_\Gamma \longrightarrow \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2} / \text{pr}_\Gamma^{-1}(S_\Gamma)$$

$$\text{or}_*(v_i \wedge v_j) = \begin{cases} v_i \otimes v_j, & \text{or}(\{v_i, v_j\}) = (v_i, v_j) \\ -v_j \otimes v_i, & \text{or}(\{v_i, v_j\}) = (v_j, v_i) \end{cases}$$

Означення

Графовою алгеброю Лі орієнтованого графу (Γ, or) назовемо алгебру Лі

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{or}) = \left(\langle V_\Gamma \rangle \oplus \text{or}_* \left(\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / S_\Gamma \right), [\cdot, \cdot]_{\text{or}_* \circ \text{pr}_\Gamma} \right)$$

Зауваження

Для довільної орієнтації or

$$\text{Lie}(\Gamma, or) \cong \text{Lie}(\Gamma)$$

Наслідок

$$(\Gamma_1, or_1) \cong (\Gamma_2, or_2) \iff \text{Lie}(\Gamma_1, or_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2, or_2)$$

Графова алгебра Лі фарбованого орієнтованого графу

Означення

Розфарбуванням ребер графу Γ називаємо сюр'єкцію $\text{col}: E_\Gamma \rightarrow C$.

Означення

Гомоморфізмом між фарбованими орієнтованими графами

$$f: (\Gamma_1, \text{or}_1, \text{col}_1) \rightarrow (\Gamma_2, \text{col}_2, \text{or}_2)$$

називаємо гомоморфізм орієнтованих графів такий, що

$$\text{col}_2(f(v_1), f(v_2)) = \sigma(\text{col}_1(v_1, v_2))$$

для перестановки σ на C .

Розфарбування col індукує відображення

$$\text{col}_*: \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2} / \text{pr}_\Gamma^{-1}(S_\Gamma) \longrightarrow \langle C \rangle$$

$$\text{col}_*(v_i \otimes v_j) = \text{col}\{v_i, v_j\}$$

Означення

Графовою алгеброю Лі фарбованого орієнтованого графу (Γ, or) називаємо алгебру Лі

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{or}) = (\langle V_\Gamma \rangle \oplus \langle C \rangle, [\cdot, \cdot]_{\text{col}^* \circ \text{or}^* \circ \text{pr}_\Gamma})$$

Зауваження

Нехай C — бієктивне розфарбування. Тоді для довільної орієнтації or

$$\text{Lie}(\Gamma, or, col) \cong \text{Lie}(\Gamma)$$

Наслідок

Для довільних орієнтацій $or_{1,2}$ і розфарбувань $col_{1,2}$

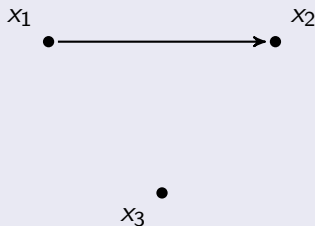
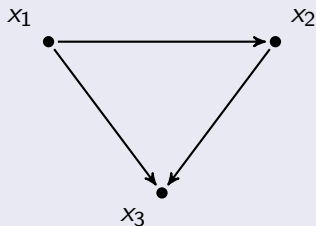
$$(\Gamma_1, or_1, col_1) \cong (\Gamma_2, col_2, or_2) \iff \text{Lie}(\Gamma_1, or_1, col_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2, col_2, or_2)$$

Графова алгебра Лі фарбованого орієнтованого графу

Для довільного розфарбування неізоморфні фарбовані орієнтовані графи можуть мати ізоморфні графові алгебри Лі.

Приклад

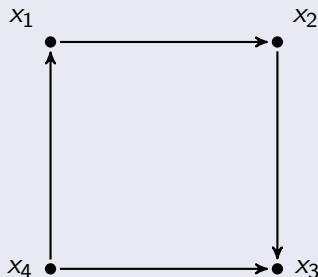
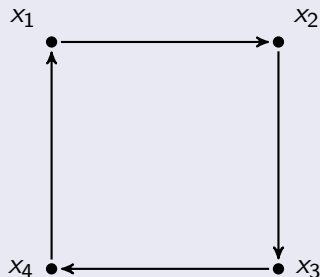
Нехай графи мають розфарбування одним кольором $\text{col}: E_\Gamma \rightarrow \text{pt}$



Графова алгебра Лі фарбованого орієнтованого графу

Для довільного розфарбування орієнтація фарбованого простого графу може змінювати клас ізоморфізму графових алгебр Лі.

Приклад



Графи, що мають ізоморфні графові алгебри Лі

Теорема

Нехай V — скінченновимірний простір, $\omega: \bigwedge^2 V \rightarrow \mathbb{K}$ — кососиметрична форма. Тоді існує базис V такий, що M_ω — матриця ω має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Наслідок

Нехай графи $(\Gamma_1, \text{or}_1, \text{col}_1)$ і $(\Gamma_2, \text{or}_2, \text{col}_2)$ мають розфарбування ребер одним кольором

$$\text{col}_i: E_{\Gamma_i} \longrightarrow \text{pt.}$$

M_1 та M_2 — кососиметричні матриці інцидентності (Γ_1, or_1) і (Γ_2, or_2) .

$$\text{Lie}(\Gamma_1, \text{or}_1, \text{col}_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2, \text{or}_2, \text{col}_2) \iff \text{rk } M_1 = \text{rk } M_2.$$

Наслідок

Нехай граф $(\Gamma_1, \text{or}_1, \text{col}_1)$ і $(\Gamma_2, \text{or}_2, \text{col}_2)$ має розфарбування ребер одним кольором. Тоді існує граф $\bar{\Gamma}$, що є об'єднанням орієнтованих ребер та ізолюваних вершин, такий, що $\text{Lie}(\bar{\Gamma}, \bar{\text{col}}, \bar{\text{or}}) \cong \text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$.

Властивості графів і ранг кососиметричних матриць інцидентності

Зауваження

Нехай Γ — неорієнтоване дерево. Для його довільної орієнтації or і кососиметричної матриці інцидентності $M_{(\Gamma, or)} = 2\beta(\Gamma)$, де $\beta(\Gamma)$ — число парування Γ .

Властивості графів і ранг кососиметричних матриць інцидентності

Наслідок

Нехай $\Gamma = P_n$ — шлях на n вершинах. Для його довільної орієнтації or і кососиметричної матриці інцидентності $M_{(\Gamma, or)}$

$$\text{rk}(M_{(\Gamma, or)}) = \begin{cases} n, & n \text{ парне} \\ n - 1, & \text{інакше} \end{cases}$$

Властивості графів і ранг косиметричних матриць інцидентності

Наслідок

Нехай Γ — неорієнтоване дерево. Для його довільних орієнтацій or_1 , or_2 і розфарбування ребер col одним кольором

$$\text{Lie}(\Gamma, col, or_1) \cong \text{Lie}(\Gamma, col, or_2)$$

Властивості графів і ранг кососиметричних матриць інцидентності

Зауваження

Нехай $\Gamma = C_n$ — орієнтований цикл на n вершинах. Для його довільної орієнтації or і кососиметричної матриці інцидентності $M_{(\Gamma, or)}$

$$\text{rk}(M_{(\Gamma, or)}) = \begin{cases} n, & (C_n, or) \text{ — парний цикл з парною орієнтацією} \\ n - 2, & (C_n, or) \text{ — парний цикл з непарною орієнтацією} \\ n - 1, & (C_n, or) \text{ — непарний цикл} \end{cases}$$

Властивості графів і ранг кососиметричних матриць інцидентності

Зауваження

Нехай Γ — простий граф, $v \in V_\Gamma$ — всяка вершина, $\{v, w\} \in E_\Gamma$ — єдине ребро, що містить v . Для його довільної орієнтації or і кососиметричної матриці інцидентності $M_{(\Gamma, or)}$

$$\text{rk}(M_{(\Gamma, or)}) = \text{rk}(M_{(\Gamma \setminus \{v, w\}, or)}) + 2$$

- [1] S. G. Dani та M. G. Mainkar. “Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs”. B: *Transactions of the American Mathematical Society* 357 (2005), с. 2235—2251.
- [2] Mauricio Godoy Molina та Diego Lagos. *Lie algebras associated with labeled directed graphs*. Preprint. 2023. arXiv: 2308.00272. URL: <https://arxiv.org/abs/2308.00272>.
- [3] Debraj Chakrabarti, Meera Mainkar та Savannah Swiatlowski. *Automorphism Groups of nilpotent Lie algebras associated to certain graphs*. Preprint. 2018. arXiv: 1812.09439. URL: <https://arxiv.org/abs/1812.09439>.
- [4] M. G. Mainkar. “Graphs and Two-Step Nilpotent Lie Algebras”. B: *Groups, Geometry, and Dynamics* 9.1 (2015), с. 55—65.

Дякую за увагу!