

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: «**Класифікація деяких сімейств злічених графів
Кокстера відносно значення індексу**»

Виконала: студентка 4-го року
навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Лучка Катерина Романівна

Керівник: Тимошкевич Л. М.

кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Кваліфікаційна робота захищена

з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
(підпис)

« _____ » _____ 20__ р.

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,
проф., доктор фіз.-мат. наук

_____ *Чорней Р.К.*
(підпис)

“ _____ ” _____ 2024

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

для кваліфікаційної роботи

студентці 4-го курсу, факультету інформатики

Лучці Катерині Романівні

Тема: «Класифікація деяких сімейств злічених графів Кокстера відносно значення індексу»

Зміст кваліфікаційної роботи:

1. Анотація
2. Вступ
3. Основні теоретичні відомості
4. Індеси злічених графів Костера
5. Класифікація обраних класів злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$
6. Висновки
7. Список літератури

Дата видачі “ _____ ” _____ 2024 Керівник _____
(підпис)

Завдання отримав _____
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено « _____ » _____ 2024р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	18.10.2023			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	20.10.2023			
3.	Розробка плану та структури роботи.	01.11.2023			
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень.	12.12.2023			
5.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	14.03.2024			
6.	Робота над текстовим оформленням результатів.	25.04.2024			
8.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	09.05.2024			

Науковий керівник _____
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____
(ПІБ)

Зміст

1	Анотація	4
2	Вступ	5
3	Основні теоретичні відомості	6
3.1	Основні означення і твердження	6
3.2	Зліченні графи Кокстера	8
4	Індекси злічених графів Кокстера	10
4.1	Теореми про індекс злічених графів	10
4.2	Індекси графів, що складаються зі скінченного графа на не- чкінченного ланцюга	11
4.3	Формули Швенка для зважених графів	12
5	Класифікація обраних класів злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$	14
5.1	Твердження про класифікацію $\mathbf{T}_{l,k+1,\infty}^4$	14
5.2	Твердження про класифікацію $\mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4$	15
5.3	Твердження про класифікацію $\mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4$	17
6	Висновки	24
7	Список літератури	25

1 Анотація

Метою даної кваліфікаційної роботи є класифікація певних класів графів Кокстера, а саме $\mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4$, $\mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4$ і графів Кокстера з підпорядкованими T-графами відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Мета даної роботи полягає в класифікації певних класів злічених графів Кокстера, а саме $\mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4$, $\mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4$, і графів Кокстера з підпорядкованими T-графами з мітками, що не перевищують 4, і зі значенням індексу в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$. Існує декілька підходів для розширення спектральної теорії графів зі скінченного випадку на злічений, у роботі прийнято підхід В. Моһар (див. [1]). Індеси графів мають широке коло застосувань, наприклад, у теорії представлень (див. [2]). Обмеження на індекс графа впливають на структуру графа, часто можна навести повний перелік можливих графів, що задовольняють їм (див. [3, 4, 5, 6]).

2 Вступ

Дискретна математика є обширним розділом сучасної математики, що займається вивченням властивостей і закономірностей, які мають місце у дискретних структурах. Вона знаходить широке застосування у багатьох сферах, від інформаційних технологій до соціальних наук, забезпечуючи математичні інструменти для аналізу складних систем і мереж. Однією з ключових галузей дискретної математики є теорія графів, що досліджує графи як математичні моделі взаємозв'язків між різними об'єктами або поняттями.

Графи використовуються для моделювання різноманітних структур, таких як транспортні мережі, комп'ютерні мережі, соціальні зв'язки, а також біологічні взаємодії на молекулярному рівні. Завдяки їхній візуальній та структурній ясності, графи дозволяють ефективно вирішувати проблеми, пов'язані з оптимізацією, передачею даних, аналізом складних мереж і багато іншого. Важливою складовою теорії графів є спектральна теорія графів, яка поєднує властивості графів із алгебраїчними характеристиками їхніх матриць, таких як матриці суміжності. Зароджена у середині 20-го століття, ця теорія знайшла застосування у численних галузях науки, включаючи хімію, фізику, біологію, соціальні та економічні науки (див. [7, 8, 9, 10]).

Графи Кокстера, які є одним із цікавих і менш досліджених видів графів у теорії графів, зокрема їх спектральна теорія, займають важливе місце в математиці, фізиці та інших наукових дисциплінах. Названі на честь видатного математика Г. Кокстера, ці графи відіграють ключову роль у класифікації скінченних груп Кокстера.

3 Основні теоретичні відомості

3.1 Основні означення і твердження

Означення 3.1. *Граф* визначається як впорядкована пара $G = (V, E)$, де V є непорожньою множиною, а E — підмножиною множини усіх неупорядкованих пар деяких елементів з V . V відома як *множина вершин* графа G , і E відома як *множина ребер* графа G .

Означення 3.2. Вершини v і w у графі G називаються *суміжними*, коли існує ребро vw між ними.

Означення 3.3. Вершини ребра vw визначаються як *інцидентні* одна одній.

Означення 3.4. *Степінь вершини* v в графі G визначається як кількість ребер, що інцидентні вершині v , та позначається як $\deg(v)$.

Означення 3.5. Вершина зі степенем рівним 1 відома як *висяча вершина*.

Означення 3.6. Вершина зі степенем рівним 0 відома як *ізолювана вершина*.

Означення 3.7. У графі $G = (V, E)$, *порядок графа* позначається як $|V|$ і відповідає кількості вершин у множині V .

Означення 3.8. *Підграфом графа* G є граф, усі вершини якого входять до множини вершин $V(G)$ і всі ребра якого належать до множини ребер $E(G)$.

Означення 3.9. *Граф Кокстера* \mathbf{G} визначається як пара (G, f) , де G — граф, f — відображення множини ребер графа G у множину, що складається з натуральних чисел, котрі не менші за 3 та символа ∞ . Граф G називається підпорядкованим графу Кокстера $\mathbf{G} = (G, f)$.

Зображення графа Кокстера представляють діаграмою підпорядкованого графа з позначкою $f(e)$ над кожним ребром e . Число 3 над ребрами *не пишеться* і такі ребра є *непозначеними*. Інші ребра, котрі мають позначку 4 і вище, називають *позначеними*.

Означення 3.10. Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ - граф Костера. Граф $G_1 = (G_1, f_1)$ називається підграфом графа \mathbf{G} , якщо G_1 підграф G , і для всякого ребра e графа G_1 : $f_1(e) \leq f(e)$. Позначається як $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}$. [3]

Означення 3.11. Матриця суміжності графа \mathbf{G} має вигляд $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, де $n = |\mathbf{G}|$ — порядок графа \mathbf{G} . Елементи матриці визначаються наступним чином:

- $a_{ij} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$, якщо $f(i, j) = k$,
- $a_{ij} = 2$, якщо $f(i, j) = \infty$,
- $a_{ij} = 0$, якщо вершини не з'єднані ребром.

Матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ — симетрична, дійсна та містить нулі на головній діагоналі.

Матриця суміжності залежить від порядку, в якому розглядаємо вершини. Якщо граф \mathbf{G} скінченний, $|V| < \infty$, то матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ буде квадратною матрицею порядку $|V|$.

Означення 3.12. *Спектр матриці* — це множина усіх її власних значень. Оскільки матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ скінченного графа \mathbf{G} порядку n симетрична, то його спектр складається лише з дійсних чисел. Позначимо власні значення матриці як λ_i , де $(i = 1, \dots, n)$ та розташуємо точки спектру λ_i в порядку спадання: $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Означення 3.13. *Спектром графа \mathbf{G}* називають спектр матриці суміжності $A(\mathbf{G})$. Позначають як $\sigma(\mathbf{G})$. Він не залежить від способу нумерації вершин, а тому є інваріантом.

Означення 3.14. *Індексом графа* називають найбільше власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ матриці суміжності A графа \mathbf{G} .

Означення 3.15. *Характеристичним многочленом* матриці суміжності називають $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$.

3.2 Злічені графи Кокстера

Означення 3.16. *Зліченим графом Кокстера* називають граф зі зліченною множиною вершин.

Позначимо через $\text{Fin}(\mathbf{G})$ множину всіх скінченних підграфів графа \mathbf{G} .

Для злічених графів Кокстера матриця суміжності буде нескінченною вправо та вниз.

Означення 3.17. *Спектром зліченого графу G* називають об'єднання спектрів його скінченних підграфів $\text{Fin}(\mathbf{G})$.

Означення 3.18. *Індексом зліченого графа* називаємо додатне число або символ ∞ , визначені рівністю

$$\text{ind } \mathbf{G} = \sup_{\Gamma \in \text{Fin}(\mathbf{G})} \text{ind } \Gamma$$

Операції на злічених графах Кокстера.

Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ – зв'язний граф Кокстера. Визначимо операції:

1. *Операція видалення вершини.* У графі G оберемо вершину x . Розглянемо граф $G_1 = (V_1, R_1)$, де визначаємо множину вершин $V_1 = V \setminus x$, множину ребер, яку отримуємо шляхом видалення з R ребер, що інцидентні вершині x та функцію f_1 , яка є обмеженням функції f на множину ребер R_1 . Тоді граф Кокстера $G_1 = (G_1, f_1)$ – граф Кокстера, отриманий з графа \mathbf{G} видаленням вершини x та позначається $\mathbf{G} - x$.
2. *Операція видалення ребра.* У графі G оберемо ребро e . Розглянемо граф $G_1 = (V_1, R_1)$, де визначаємо множину вершин $V_1 = V$ незмінною, множину ребер $R_1 = R \setminus \{e\}$ та функцію f_1 , яка є обмеженням функції f на множину ребер R_1 . Тоді граф Кокстера $G_1 = (G_1, f_1)$ – граф Кокстера, отриманий з графа \mathbf{G} видаленням ребра e та позначається $\mathbf{G} - e$.

3. *Операція заміщення мітки на ребрі.* У графі G оберемо ребро e . Розглянемо функцію f_1 , яка тотожно рівна функції f на множині ребер $R \setminus \{e\}$, а на ребрі e визначається $f_1(e) < f(e)$. Тоді граф Кокстера $G_1 = (G, f_1)$ називається графом Кокстера, отриманий з графа G зменшенням мітки на ребрі e .

Введемо ще одну операцію на незв'язних графах (всі позначки на ребрах дорівнюють 3). *Операція підрозбиття ребра або додавання вершини на внутрішнє ребро.* [5] У графі G оберемо ребро $e = x, y$. Розглянемо граф $G_1 = (V_1, R_1)$, де визначаємо множину вершин $V_1 = V \cup z$, $R_1 = (R \setminus e) \cup x, z \cup z, y$. Тоді граф Кокстера $G_1 = (G, f_1)$ – граф Кокстера, отриманий з графа G підрозбиттям ребра e або додаванням вершини z на внутрішнє ребро e .

Означення 3.19. *Підграф* графа G в термінах операцій над графами – граф, отриманий шляхом застосування операцій видалення вершини, ребра або зменшення мітки на ребрі графа G .

4 Індекси злічених графів Кокстера

4.1 Теореми про індекс злічених графів

Твердження 4.1. [4, 5] \mathbf{G} – злічений зв'язний граф. При видаленні вершини, або ребра графа \mathbf{G} , індекс не збільшується. При зменшенні мітки на ребрі графа \mathbf{G} , індекс строго зменшується.

Видалення вершини: Зафіксуємо вершину x графа Γ . Так як $\text{Fin}(\Gamma - x) \subset \text{Fin}(\Gamma)$, то

$$\text{ind}(\Gamma - x) = \sup_{\mathbf{G} \in \text{Fin}(\Gamma - x)} \text{ind} \mathbf{G} \leq \sup_{\mathbf{G} \in \text{Fin}(\Gamma)} \text{ind} \mathbf{G} = \text{ind} \Gamma.$$

Наслідок 4.1. [4, 5] Нехай G_1, G_2 – злічені графи. $G_1 \subset G_2$. Тоді $\text{ind} G_1 \leq \text{ind} G_2$.

Видалення ребра: Зафіксуємо ребро $e = \{u, v\}$ графа Γ . Так як $\text{Fin}(\Gamma - e) \subset \text{Fin}(\Gamma)$, то

$$\text{ind}(\Gamma - e) = \sup_{\mathbf{G} \in \text{Fin}(\Gamma - e)} \text{ind} \mathbf{G} \leq \sup_{\mathbf{G} \in \text{Fin}(\Gamma)} \text{ind} \mathbf{G} = \text{ind} \Gamma.$$

Твердження 4.2. [4, 5] \mathbf{G} – злічений зв'язний граф. При підрозбитті внутрішнього ребра графа \mathbf{G} , індекс не збільшується.

Зменшення мітки на ребрі: Зафіксуємо ребро $e = \{u, v\}$ графа G , позначимо граф, одержаний з графа G зменшенням мітки на ребрі e через G_1 . Так як $\text{Fin}(G_1) \subset \text{Fin}(G)$, то

$$\text{ind}(G_1) = \sup_{\mathbf{G} \in \text{Fin}(G_1)} \text{ind} \mathbf{G} \leq \sup_{\mathbf{G} \in \text{Fin}(G)} \text{ind} \mathbf{G} = \text{ind} G.$$

Твердження 4.3. [4, 5] Індекс зліченого графа рівен супремуму індексів його компонент зв'язності.

Далі графи, які будемо розглядати, вважатимемо зв'язними.

Твердження 4.4. [4, 5] Нехай \mathbf{G} – злічений граф, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність його скінченних підграфів, що задовольняє умовам:

1. $G_n \subset G_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = G$.

Тоді $\text{ind } \mathbf{G} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind } \mathbf{G}_n$.

Наслідок 4.2. [4, 5] Нехай G^1, G^2 – злічені графи, $\{G_n^1\}_{n=1}^{\infty}, \{G_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовності скінченних підграфів G^1, G^2 відповідно. Нехай при цьому виконуються умови:

1. \mathbf{G}_n^1 ізоморфний $\mathbf{G}_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\mathbf{G}_n^1 \subset \mathbf{G}_{n+1}^1, \mathbf{G}_n^2 \subset \mathbf{G}_{n+1}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
3. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{G}_n^1 = \mathbf{G}^1, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{G}_n^2 = \mathbf{G}^2$.

Тоді $\text{ind } \mathbf{G}_n^1 = \text{ind } \mathbf{G}_n^2$.

4.2 Індеси графів, що складаються зі скінченного графа на нескінченного ланцюга

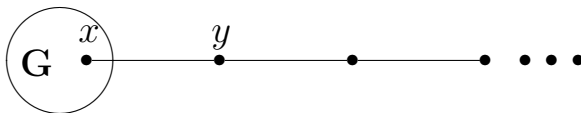


Рис. 4.2.1

Граф такого виду можна задати зліченною кількістю пар (\mathbf{G}, x) .

Теорема 4.1. [4, 5] Нехай злічений граф (\mathbf{G}, x) буде складатися зі скінченного графа G і нескінченного ланцюга. Маємо, що:

- Якщо $(\mathbf{G}, x) \in \{\mathbf{A}_\infty, \mathbf{B}_\infty, \mathbf{C}_\infty\}$, то $ind(\mathbf{G}, x) = 2$;
- Якщо $(\mathbf{G}, x) \notin \{\mathbf{A}_\infty, \mathbf{B}_\infty, \mathbf{C}_\infty\}$, то $ind(\mathbf{G}, x) > 2$, а також є максимальним коренем наступного рівняння:

$$\frac{P_{\mathbf{G}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{G}}(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

Наступний алгоритм допомагає знайти індекс графа \mathbf{Q} , що складається зі скінченного графа \mathbf{G} і нескінченного ланцюга, за допомогою **попередньої** теореми: [4, 5]

1. Знайти характеристичні многочлени графів \mathbf{G} і $\mathbf{G} - \mathbf{x}$: $P_{\mathbf{G}}(\lambda)$, $P_{\mathbf{G}-\mathbf{x}}(\lambda)$.
Отримано рівняння: $\frac{P_{\mathbf{G}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{G}}(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$;
2. Для зручності зробити заміну $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$. Тоді $\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} = \mu$. Підставити значення у рівняння $\frac{P_{\mathbf{G}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{G}}(\lambda)} = \mu$. Отримано рівняння з одним невідомим μ ;
3. У рівнянні з пункту 2 знайти максимальне значення μ ;
4. Знайти λ , підставивши μ у заміну з пункту 2. Це значення λ і є шуканим індексом графа \mathbf{Q} .

Кроки 1 та 2 в даному алгоритмі можна об'єднати.

4.3 Формули Швенка для зважених графів

Теорема 4.2. [5] *Нехай v — вершина графа G , через $C(v)$ позначимо множину циклів, що містять v . Тоді*

$$P_{\mathbf{G}}(x) = xP_{\mathbf{G}-v}(x) - \sum_{u \sim v} w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(x) - 2 \sum_{Z \in C(v)} w(Z) P_{\mathbf{G}-V(Z)}(x).$$

Наслідок 4.3. [5] *(Розклад за висячою вершиною) Якщо v — вершина графа G та u — вершина суміжна з v , то*

$$P_G(x) = xP_{G-v}(x) - w_{uv}^2 P_{G-v-u}(x).$$

Теорема 4.3. [5] *Нехай uv — ребро графа G , через $C(uv)$ позначимо множину циклів, що містять uv . Тоді*

$$P_G(x) = P_{G-uv}(x) - w(uv)^2 P_{G-v-u}(x) - 2 \sum_{Z \in C(uv)} w(Z) P_{G-V(Z)}(x).$$

Наслідок 4.4. [5] *(Розклад за мостом). Нехай ребро $e = (v_1, v_2)$ — міст графа G , який при видаленні ребра e розпадається на графи G_1 та G_2 , при цьому вважаємо, що $v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$. Характеристичний многочлен графа G можна знайти за формулою:*

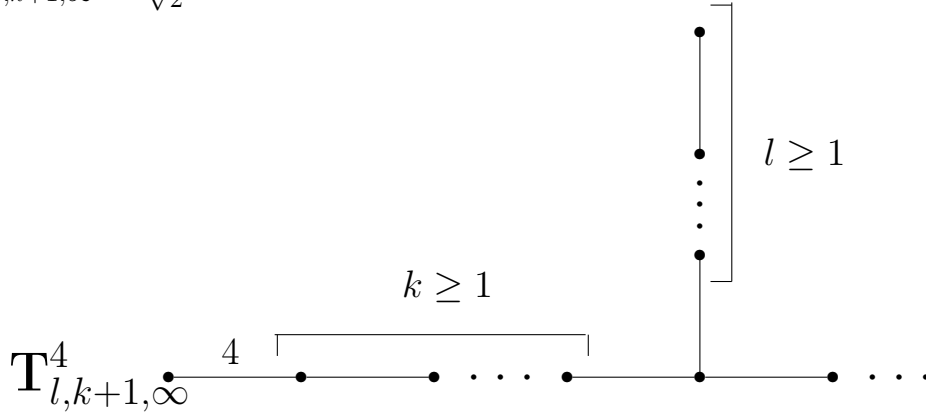
$$P_G(x) = P_{G_1}(x)P_{G_2}(x) - w(e)^2 P_{G_1-v_1}(x)P_{G_2-v_2}(x).$$

5 Класифікація обраних класів злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

5.1 Твердження про класифікацію $\mathbf{T}_{l,k+1,\infty}^4$

Твердження 5.1. Нехай \mathbf{G} – злічений зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим $\mathbf{T}_{l,k+1,\infty}^4$ -графом, тоді

- $ind \mathbf{T}_{l,k+1,\infty}^4 \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \iff l \leq k.$
- $ind \mathbf{T}_{l,k+1,\infty}^4 > \frac{3}{\sqrt{2}} \iff l > k.$



Зважаючи на те, що $\frac{P_{G-x}}{P_G} = \mu$ і $P_n(\mu) = \frac{\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu}}{\mu - \frac{1}{\mu}}$ покладемо граф P_G рівним $P_{l+k+2,4}$ і граф P_{G-x} рівним $P_{k+1,4} \cdot P_l$ поділимо і порівняємо до μ :

$$\frac{P_{G-x}}{P_G} = \frac{P_{k+1,4} \cdot P_l}{P_{l+k+2,4}}$$

$$\frac{P_{k+1,4} \cdot P_l}{P_{l+k+2,4}} = \frac{\left(\mu^{k+1} + \frac{1}{\mu^{k+1}}\right) \cdot \frac{\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu}}{\mu - \frac{1}{\mu}}}{\mu^{l+k+2} + \frac{1}{\mu^{l+k+2}}} = \mu$$

$$\left(\mu^{k+1} + \frac{1}{\mu^{k+1}}\right) \cdot \left(\mu^{l+1} - \frac{1}{\mu^{k+1}}\right) = \mu \cdot \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) \cdot \left(\mu^{l+k+2} + \frac{1}{\mu^{l+k+2}}\right);$$

$$\mu^{k+l+2} - \mu^{k-l} + \mu^{l-k} - \mu^{-k-l-2} = (\mu^2 - 1) \left(\mu^{l+k+2} + \frac{1}{\mu^{l+k+2}}\right);$$

$$\mu^{k+l+2} - \mu^{k-l} + \mu^{l-k} - \mu^{-k-l-2} = \mu^{k+l+4} + \mu^{-k-l} - \mu^{k+l+2} - \mu^{-k-l-2};$$

$$\mu^{k+l+2} (\mu^2 - 2) + \mu^{k-l} - \mu^{l-k} + \mu^{-k-l} = 0;$$

Маємо рівносильне рівняння:

$$Q(\mu) = \mu^{2k+2l+2} (\mu^2 - 2) + \mu^{2k} - \mu^{2l} + 1 = 0$$

При $\mu = \sqrt{2}$:

$$Q(\sqrt{2}) = 2^k - 2^l + 1$$

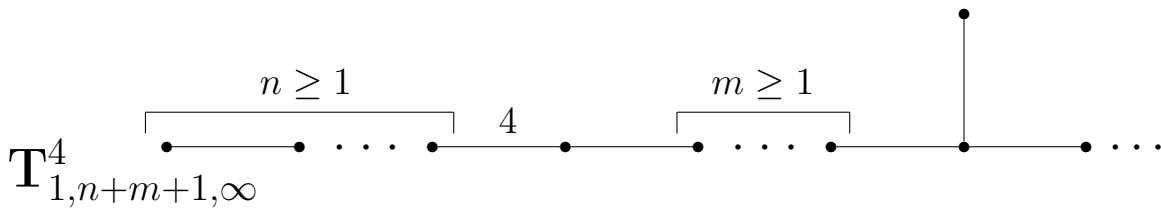
- При $l > k$ маємо $Q(\sqrt{2}) \leq 2^k - 2^{k+1} + 1 = 1 - 2^k < 0 \Rightarrow$ максимальний корінь рівняння $\mu_{max} > \sqrt{2} \Rightarrow \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{T}_{l,k+1,\infty}^4 > \frac{3}{\sqrt{2}}$
- При $l \leq k$ маємо $\forall \mu \geq \sqrt{2}$:

$Q(\mu) = \mu^{2k+2l+2} (\mu^2 - 2) + \mu^{2k} - \mu^{2l} + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow$ максимальний корінь рівняння $\mu_{max} < \sqrt{2} \Rightarrow \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{T}_{l,k+1,\infty}^4 < \frac{3}{\sqrt{2}}$

5.2 Твердження про класифікацію $\mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4$

Твердження 5.2. Нехай \mathbf{G} – злічений зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим $\mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4$ -графом, тоді

- $\text{ind } \mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4 \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \iff m \geq n.$
- $\text{ind } \mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4 > \frac{3}{\sqrt{2}} \iff m < n.$



Зважаючи на те, що $\frac{P_{G-x}}{P_G} = \mu$ і $P_n(\mu) = \frac{\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}}$ покладемо граф P_G рівним $P_n P_{m+3} - 2P_{n-1} P_{m+2}$ і граф P_{G-x} рівним $\lambda (P_n P_{m+1} - 2P_{n-1} P_m)$ поділимо і

прирівняємо до μ :

$$\begin{aligned} & \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{\mu^{m+1} - \frac{1}{\mu^{m+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} - 2 \frac{\mu^n - \frac{1}{\mu^n}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+1} - \frac{1}{\mu^{m+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \right) = \\ & = \mu \cdot \frac{\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+4} - \frac{1}{\mu^{m+4}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} - 2 \frac{\mu^n - \frac{1}{\mu^n}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+3} - \frac{1}{\mu^{m+3}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \end{aligned}$$

Домножимо праву і ліву частини на $\mu - \frac{1}{\mu}$:

$$\begin{aligned} & \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) \left(\mu^{m+n+3} - 2\mu^{m+n+1} + \mu^{m-n+1} + \mu^{n-m-1} - 2\frac{1}{\mu^{m+n+1}} + \frac{1}{\mu^{m+n+3}} \right) = \\ & = \mu \left(\mu^{m+n+5} - 2\mu^{m+n+3} + \mu^{m-n+3} + \mu^{n-m-3} - 2\frac{1}{\mu^{m+n+3}} + \frac{1}{\mu^{m+n+5}} \right) \end{aligned}$$

Після деяких перетворень отримаємо рівносильне рівняння:

$$Q(\mu) = \mu^{2n+2m+8} - 3\mu^{2n+2m+6} + \mu^{2n+2m+2} + \mu^{2m+6} - \mu^{2m+4} - \mu^{2m+2} - \mu^{2n+2} + 2\mu^2 - 1;$$

$$Q(\mu) = \mu^{2n+2m+2} (\mu^6 - 3\mu^4 + \mu^2 + 2) + \mu^{2m+2} (\mu^4 - \mu^2 - 1) - \mu^{2n+2} + 2\mu^2 - 1;$$

При $\mu = \sqrt{2}$:

$$Q(\sqrt{2}) = 2^{n+m+1} (2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 2) + 2^{m+1} (2^2 - 2 - 1) - 2^{n+1} + 3 =$$

$$= 2^{m+1} - 2^{n+1} + 3;$$

- Якщо $n > m$, тобто $n \geq m + 1$, то

$$Q(\sqrt{2}) < 2^{m+1} - 2^{m+2} + 3 = 3 - 2^{m+1} \leq -1 < 0 \Rightarrow \text{максимальний корінь}$$

$$\text{рівняння } \mu_{max} > \sqrt{2} \Rightarrow \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4 > \frac{3}{\sqrt{2}}$$

- Якщо $m \geq n$ для $\forall \mu \geq \sqrt{2}$ маємо:

$$Q(\mu) \geq \mu^{2n+2m+2} (\mu^4 (\mu^2 - 2) - \mu^2 (\mu^2 - 2) - (\mu^2 2)) +$$

$$+ \mu^{2m+2} (\mu^4 - \mu^2 - 2) + 2\mu^2 - 1 > 0$$

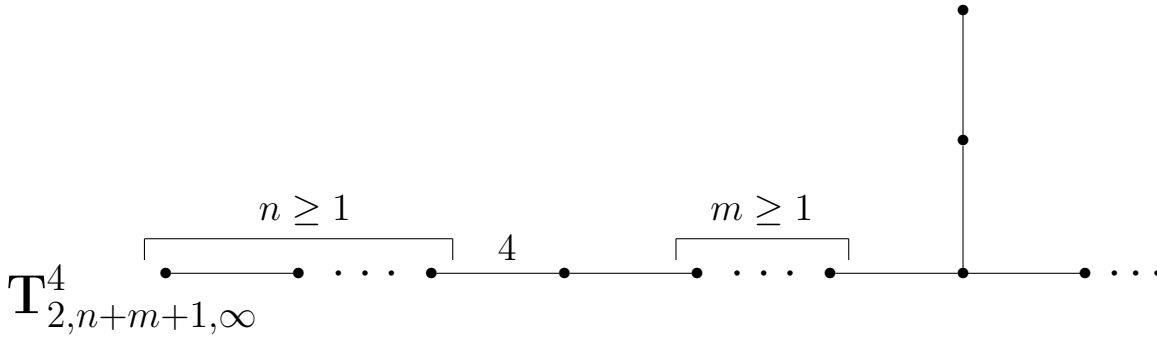
Оскільки кожен доданок з попереднього рівняння додатній, то $Q(\mu) > 0 \Rightarrow$

максимальний корінь рівняння $\mu_{\max} < \sqrt{2} \Rightarrow \lambda_{\max} = \text{ind } \mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4 < \frac{3}{\sqrt{2}}$

5.3 Твердження про класифікацію $\mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4$

Твердження 5.3. Нехай \mathbf{G} – злічений зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим $\mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4$ -графом, тоді

- $\text{ind } \mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4 \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \iff n = 1.$
- $\text{ind } \mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4 > \frac{3}{\sqrt{2}} \iff n \geq 2.$



Покладемо граф P_G такий, що $P_G = P_n P_{m+4} - 2P_{n-1} P_{m+3}$ і граф P_{G-x} такий, що $P_{G-x} = P_2 (P_n P_{m+1} - 2P_{n-1} P_m)$, поділимо і прирівняємо до μ

$$\frac{P_{G-x}}{P_G} = \frac{P_2 \cdot (P_n \cdot P_{m+1} - 2P_{n-1} P_m)}{P_n P_{m+4} - 2P_{n-1} P_{m+3}} = \mu$$

Зважаючи на те, що

$$P_n(\mu) = \frac{\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}}$$

маємо наступне рівняння:

$$\frac{\frac{\mu^3 - \frac{1}{\mu^3}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \left(\frac{\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+2} - \frac{1}{\mu^{m+2}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} - 2 \frac{\mu^n - \frac{1}{\mu^n}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+1} - \frac{1}{\mu^{m+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \right)}{\frac{\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+5} - \frac{1}{\mu^{m+5}}}{\mu - \frac{1}{\mu}} - 2 \frac{\mu^n - \frac{1}{\mu^n}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\mu^{m+4} - \frac{1}{\mu^{m+4}}}{\mu - \frac{1}{\mu}}} = \mu$$

Скоротимо спільний множник $\frac{1}{\mu - \frac{1}{\mu}}$:

$$\frac{\frac{\mu^3 - \frac{1}{\mu^3}}{\mu - \frac{1}{\mu}} \cdot \left(\left[\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}} \right] \cdot \left[\mu^{m+2} - \frac{1}{\mu^{m+2}} \right] - 2 \left(\left[\mu^n - \frac{1}{\mu^n} \right] \cdot \left[\mu^{m+1} - \frac{1}{\mu^{m+1}} \right] \right) \right)}{\left[\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}} \right] \cdot \left[\mu^{m+5} - \frac{1}{\mu^{m+5}} \right] - 2 \left(\left[\mu^n - \frac{1}{\mu^n} \right] \cdot \left[\mu^{m+4} - \frac{1}{\mu^{m+4}} \right] \right)} = \mu$$

Домножимо рівняння на $\mu - \frac{1}{\mu}$:

$$\begin{aligned} & \left(\mu^3 - \frac{1}{\mu^3} \right) \cdot \left(\left[\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}} \right] \cdot \left[\mu^{m+2} - \frac{1}{\mu^{m+2}} \right] - 2 \left(\left[\mu^n - \frac{1}{\mu^n} \right] \cdot \left[\mu^{m+1} - \frac{1}{\mu^{m+1}} \right] \right) \right) = \\ & = (\mu^2 - 1) \left(\left[\mu^{n+1} - \frac{1}{\mu^{n+1}} \right] \cdot \left[\mu^{m+5} - \frac{1}{\mu^{m+5}} \right] \right) - 2 \left(\left[\mu^n - \frac{1}{\mu^n} \right] \cdot \left[\mu^{m+4} - \frac{1}{\mu^{m+4}} \right] \right) \end{aligned}$$

Після деяких перетворень отримуємо рівносильне рівняння:

$$\begin{aligned} & (\mu^{2m+10} - \mu^{2m+4} - \mu^6 + 1 - \mu^{2m+12} + \mu^{2n+10} + \mu^2 - 1) (\mu^{2n+2} - 1) = \\ & = 2 \mu^2 (\mu^{2n} - 1) (\mu^{2m+8} - \mu^{2m+2} - \mu^6 + 1 - \mu^{2m+10} + \mu^{2n+9} + \mu^2 - 1); \end{aligned}$$

Розкриваємо дужки з лівої сторони:

$$\begin{aligned} & \mu^{2n+2m+12} - \mu^{2m+10} - \mu^{2n+2m+6} + \mu^{2m+4} - \mu^{2n+8} + \mu^6 + \mu^{2n+2} - 1 - \mu^{2n+2m+14} + \\ & \mu^{2m+12} + \mu^{2n+2m+12} - \mu^{2m+10} + \mu^{2n+4} - \mu^2 - \mu^{2n+2} + 1 = (2\mu^{2n+2} - 2\mu^2) \cdot \\ & \cdot (\mu^{2m+8} - \mu^{2m+2} - \mu^6 + 1 - \mu^{2m+10} + \mu^{2m+8} + \mu^2 - 1); \end{aligned}$$

Розкриваємо дужки з правої сторони:

$$-\mu^{2n+2m+14} + 2\mu^{2n+2m+12} - \mu^{2n+2m+6} - \mu^{2n+8} + \mu^{2n+4} + \mu^{2m+12} - 2\mu^{2m+10} +$$

$$\begin{aligned}
& +\mu^{2m+4} + \mu^6 - \mu^2 = 2\mu^{2n+2m+10} - 2\mu^{2m+10} - 2\mu^{2n+2m+4} + 2\mu^{2m+4} - 2\mu^{2n+8} + \\
& + 2\mu^8 + 2\mu^{2n+2} - 2\mu^2 - 2\mu^{2n+2m+12} + 2\mu^{2m+12} + 2\mu^{2n+2m+10} - 2\mu^{2m+10} + 2\mu^{2n+4} - \\
& - 2\mu^4 - 2\mu^{2n+2} + 2\mu^2;
\end{aligned}$$

Скорочуємо доданки:

$$\begin{aligned}
& -\mu^{2n+2m+14} + 2\mu^{2n+2m+12} - \mu^{2n+2m+6} - \mu^{2n+8} + \mu^{2n+4} + \mu^{2m+12} + \mu^{2m+4} + \mu^6 - \mu^2 = \\
& = 2\mu^{2n+2m+10} - 2\mu^{2n+2m+4} + 2\mu^{2m+4} - 2\mu^{2n+8} + 2\mu^8 - 2\mu^{2n+2m+12} + 2\mu^{2m+12} + \\
& + 2\mu^{2n+2m+10} - 2\mu^{2m+10} + 2\mu^{2n+4} - 2\mu^4;
\end{aligned}$$

Зводимо спільні доданки:

$$\begin{aligned}
& \mu^{2n+2m+14} - 4\mu^{2n+2m+12} + 4\mu^{2n+2m+10} + \mu^{2n+2m+6} - 2\mu^{2n+2m+4} - \mu^{2n+8} + \mu^{2n+4} + \\
& + \mu^{2m+12} - 2\mu^{2m+10} + \mu^{2n+4} + 2\mu^8 - \mu^6 - 2\mu^4 + \mu^2 = 0
\end{aligned}$$

Отож, маємо рівносильне рівняння:

$$\begin{aligned}
Q(\mu) = & \mu^{2n+2m+14} - 4\mu^{2n+2m+12} + 4\mu^{2n+2m+10} + \mu^{2n+2m+6} - 2\mu^{2n+2m+4} - \mu^{2n+8} + \mu^{2n+4} + \\
& + \mu^{2m+12} - 2\mu^{2m+10} + \mu^{2n+4} + 2\mu^8 - \mu^6 - 2\mu^4 + \mu^2
\end{aligned}$$

Підставляємо $\mu = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
& 2^{n+m+7} - 4 \cdot 2^{n+m+6} + 4 \cdot 2^{n+m+5} + 2^{n+m+3} - 2 \cdot 2^{n+m+2} - 2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{m+6} - 2 \cdot 2^{m+5} + \\
& + 2^{n+2} + 18 \quad \forall 0
\end{aligned}$$

$$\text{Оскільки } 2^{n+m+7} - 2^2 \cdot 2^{n+m+6} + 2^2 \cdot 2^{n+m+5} = 2^{n+m+8} - 2^{n+m+8} = 0,$$

то маємо: $-2^{n+4} + 2^{n+3} + 18 = -2^{n+3} + 18$

Зважаючи на те, що $2^5 = 32 \Rightarrow n + 3 \leq 4$

- Якщо $n + 3 \leq 4 \Rightarrow n \leq 1 \Rightarrow n = 1$, тоді $Q(\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow$ максимальний корінь рівняння $\mu_{max} < \sqrt{2} \Rightarrow \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4 < \frac{3}{\sqrt{2}}$
- Якщо $n + 3 \geq 5 \Rightarrow n \geq 2$, тоді $Q(\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow$ максимальний корінь рівняння $\mu_{max} > \sqrt{2} \Rightarrow \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4 > \frac{3}{\sqrt{2}}$

Розглянемо $\mu > \sqrt{2}$:

$$\mu^{2n+2m+14} - 4\mu^{2n+2m+12} + 4\mu^{2n+2m+10} + \mu^{2n+2m+6} - 2\mu^{2n+2m+4} - \mu^{2n+8} + \mu^{2n+4} + \mu^{2m+12} - 2\mu^{2m+10} + \mu^{2n+4} + 2\mu^8 - \mu^6 - 2\mu^4 + \mu^2 = 0;$$

$$\mu^{2n+2m+10} (\mu^4 - 4\mu^2 + 4) + \mu^{2n+2m+4} (\mu^2 - 2) - \mu^{2n+4} (\mu^4 - 2) + \mu^{2m+10} (\mu^2 - 2) + \mu^4 (2\mu^4 - \mu^2 - 2) + \mu^2 \quad \forall 0;$$

Якщо $n = 1$:

$$\mu^{2m+12} (\mu^2 - 2)^2 + \mu^{2m+6} (\mu^2 - 2) + \mu^{2m+10} (\mu^2 - 2) - \mu^6 (\mu^4 - 2\mu^2 + 2\mu^2 - 2) + \mu^4 (2\mu^2 (\mu^2 - 2) + 3 (\mu^2 - 2) + 4) + \mu^2 = (\mu^2 - 2) \mu^{2m+6}.$$

$$\cdot (\mu^6 (\mu^2 - 2) - 2 + \mu^4 + 1) - \mu^6 ((\mu^2 - 2) (\mu^2 + 2) + 2) + \mu^4 (\mu^2 - 2) (2\mu^2 + 3) + 4\mu^4 + \mu^2 = (\mu^2 - 2) (\mu^{2m+6} (\mu^8 - 2\mu^6 + \mu^4 + 1) - \mu^6 (\mu^2 + 2)) + (2\mu^8 - \mu^6 - 2\mu^4 + \mu^2 - 2\mu^6);$$

Порівняємо окремі доданки рівняння, щоб дізнатися його знак відносно нуля:

а) $\mu^4 (2\mu^4 - \mu^2 - 2) + \mu^2 \quad \forall 2\mu^6;$

$$2\mu^8 - \mu^6 - 2\mu^4 + \mu^2 \vee 2\mu^6;$$

$$2\mu^6 (\mu^2 - 2) + \mu^4 (\mu^2 - 2) + \mu^2 \geq \sqrt{2}.$$

$$\text{б) } (\mu^2 - 2) \mu^{2m+6} (\mu^8 - 2\mu^6 + \mu^4 + 1) \vee (\mu^2 - 2) \mu^6 (\mu^2 + 2);$$

$$\mu^{2m} (\mu^8 - 2\mu^6 + \mu^4 + 1) \vee \mu^2 + 2;$$

$$\mu^8 - 2\mu^6 + \mu^4 + 1 \vee 0;$$

$$\mu^6 (\mu^2 - 2) + \mu^2 (\mu^2 - 2) + \mu^2 - 1 \geq 1.$$

Отже, знак рівняння відносно нуля:

$$\begin{aligned} & (\mu^2 - 2) (\mu^{2m+6} (\mu^8 - 2\mu^6 + \mu^4 + 1) - \mu^6 (\mu^2 + 2)) + \\ & + (2\mu^8 - \mu^6 - 2\mu^4 + \mu^2 - 2\mu^6) \geq 2 \end{aligned}$$

Для $n = 1$:

$$\begin{aligned} \forall \mu \geq \sqrt{2}, Q(\mu) > 0 &\Rightarrow \text{максимальний корінь рівняння } \mu_{max} < \sqrt{2} \Rightarrow \lambda_{max} = \\ &= \text{ind } \mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4 < \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Для $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \forall \mu \geq \sqrt{2}, Q(\sqrt{2}) < 0 &\Rightarrow \text{максимальний корінь рівняння } \mu_{max} > \sqrt{2} \\ \Rightarrow \lambda_{max} = \text{ind } \mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4 &> \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

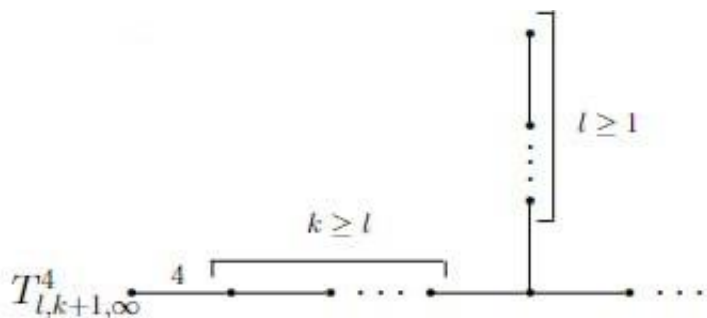
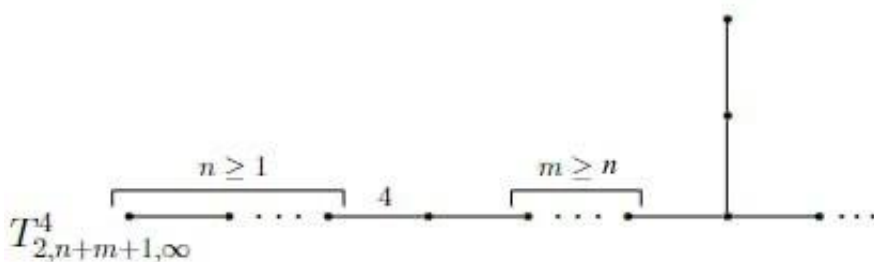
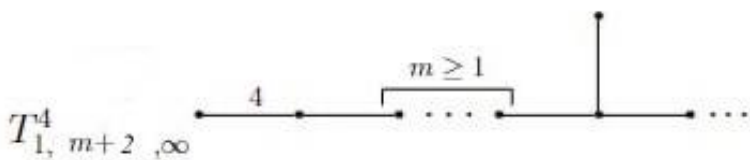
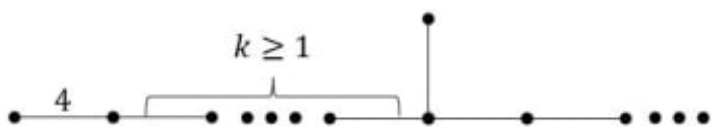
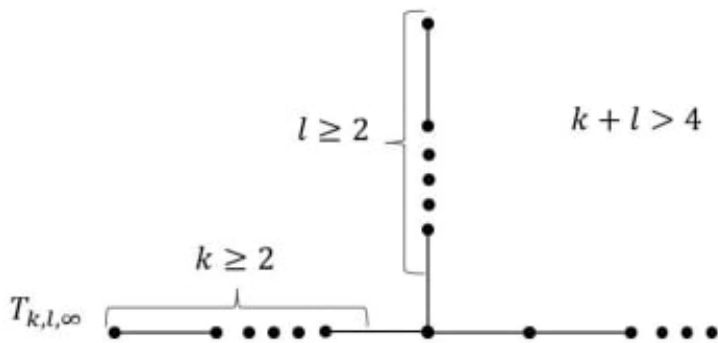
Із попередніх тверджень, а також тверджень в роботах [5, 6] випливає наступна теорема:

Теорема 5.1. (про класифікацію графів Кокстера з підпорядкованими \mathbf{T} -графами з індексами в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, мітки на

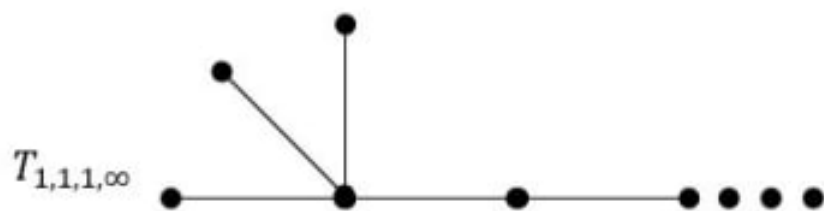
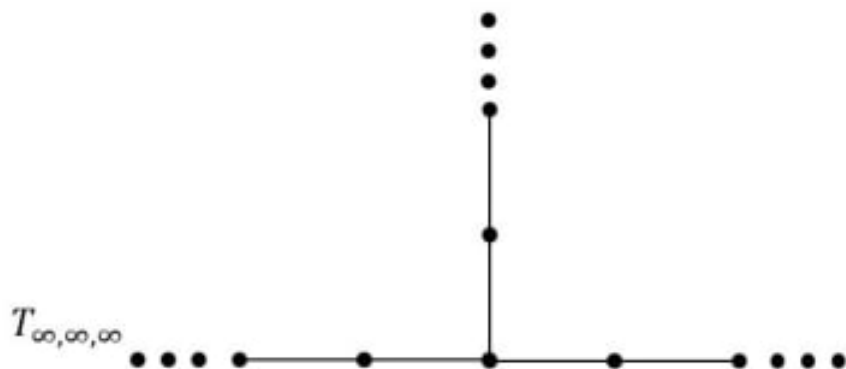
яких не перевищують 4.)

Нехай \mathbf{G} – злічений зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими незваженими T-графами, то

1. Якщо $ind\mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, то \mathbf{G} – граф виду:



2. Якщо $indG = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то G – граф виду: [6]



6 Висновки

Класифікація графів Кокстера з підпорядкованими T -графами і мітками, що не перевищують 4 відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, яка була проведена у рамках даної роботи, відкриває нові можливості для розробки математичних моделей, що можуть бути використані для вивчення симетрій у різних природних і соціальних системах. Основні результати полягають у визначенні та класифікації специфічних графів $\mathbf{T}_{1,n+m+1,\infty}^4$ та $\mathbf{T}_{2,n+m+1,\infty}^4$, що дає можливість кращого розуміння їхньої структури та взаємозв'язків з алгебраїчними та геометричними характеристиками. Виявлені властивості цих графів не лише поглиблюють розуміння теорії графів Кокстера, але й відкривають нові перспективи для подальших досліджень у галузях теоретичної фізики, хімії та біології, де такі графи можуть використовуватись для моделювання складних мереж.

Завдяки проведеній роботі було також розширено наявні теореми про графи Кокстера, особливо ті, що стосуються їх спектральних характеристик. Такий підхід сприяє не тільки академічному розвитку в області дискретної математики, але й знаходженню практичного застосування у вирішенні комплексних реальних задач.

7 Список літератури

- [1] Mohar B., Woess W. A survey on spectra of infinite. Bull. London Math. Soc. – 1989. – vol. 21. – P. 209-234.
- [2] Кириченко А. А., Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М. Структура систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченими деревами Кокстера, Український математичний журнал. – 2014. – Том. 66, №9. – С.1185-1192.
- [3] Tymoshkevych L. M. On spectral theory of Coxeter graphs and its applications, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки. – 2014. – випуск №1. – С. 27-33.
- [4] Коротков А.С., Тимошкевич Л.М. Аналог теореми Сміта для злічених графів Кокстера, Доповіді Національної академії наук України. – 2013. – №12. – С. 19-24.
- [5] Тимошкевич Л.М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ, 2015. – 160 с.
- [6] Тимошкевич Л.М., Когут М.В. Класифікація злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, Могилянський математичний журнал. – Том 5, – 2022, – с.19-25.
- [7] Cvetkovic D. M., Applications of graph spectra, Cvetkovic D. M., Gutman I., Zbornik radova. - 2009. - 13(21). - 138 pp.

- [8] Ключарьов П.Г., Чесноков В. О., Исследование спектральных свойств социального графа сети LiveJournal, Машиностроение и компьютерные технологии, 2013
- [9] Ключарьов П.Г., Басараб М.А., Спектральные методы анализа социальных сетей, Машиностроение и компьютерные технологии, 2017
- [10] Salim A., Sumitra S., Spectral Graph Convolutional Neural Networks in the Context of Regularization Theory, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. - 2022.