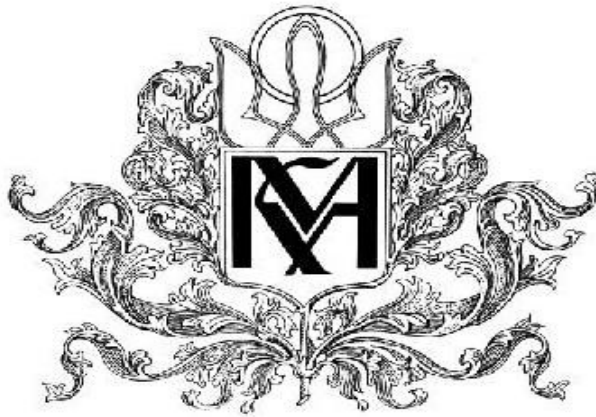


Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики



Спектральна теорія реберно-зважених графів

Курсова робота
за спеціальністю „Прикладна математика” 113

Керівник курсової роботи
к.ф.-м.н., ст. викладач Тимошкевич Л.М.

(підпис)
“ ____ ” _____ 2020 р.

Виконала студентка
Рожанська У.В.
“ ____ ” _____ 2020 р.

Київ 2020

Тема: Спектральна теорія реберно-зважених графів

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу	25.10.2019	
2.	Огляд літератури за темою роботи	15.11.2019	
3.	Аналіз літератури за темою роботи	20.12.2019	
4.	Дослідження результатів отриманих в літературі	15.01.2020	
5.	Аналіз отриманих результатів з керівником	01.02.2020	
6.	Написання пояснювальної роботи	20.03.2020	
7.	Створення слайдів для захисту курсової роботи	30.03.2020	
8.	Корегування роботи згідно з зауваженнями керівника	10.04.2020	
9.	Остаточне оформлення пояснювальної роботи та слайдів	18.04.2020	
10.	Завантаження курсової роботи на Distedu	11.05.2020	

Студентці Рожанській У.В.

Керівник Тимошкевич Л.М.

“ ”

Зміст

	стор.
Анотація.....	4
Вступ.....	5
Розділ 1: Прямі спектральні задачі на реберно-зважених графах	6
1.1 Основні означення спектральної теорії реберно-важених графів.....	6
1.2 Невід’ємні, нерозкладні матриці, теорема Фробеніуса	7
1.3 Графи Костера та теорема Сміта	10
1.4 Зв’язки між спектральними та структурними властивостями графів	13
1.5 Теорема парності для реберно-зважених графів	14
1.6 Обчислення характеристичного многочлена.....	16
Розділ 2: Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах	19
2.1 Задачі відновлення ваг для реберно-зважених графів Динкіна та розширених графів Динкіна	20
Висновки	25
Список використаної літератури.....	26

Анотація

Робота присвячена прямим та оберненим спектральним задачам для реберно-зважених графів, тобто графів з заданою додатною функцією на множині ребер. Перша частина присвячена вивченню та огляду результатів спектральної теорії зважених графів та узагальнень відомих теорем спектральних теорій «звичайних» графів, зокрема формул Швенка, теореми Сміта, теореми парності. Друга частина має дослідницький характер і містить нові результати, в ній вивчаються обернені задачі — відновлення ваги на множині ребер графа за спектральними даними графа та його підграфів.

Вступ

Спектральна теорія графів – сучасна галузь математики, що активно розвивається протягом останніх десятиріч, це пов'язано з обширними можливостями застосувань завдяки теоретико-множинним, комбінаторним та топологічним аспектам, що складають основу поняття самого графа. Успіх застосувань методів теорії графів пояснюється також тим, що вона являє собою зручну мову для формулювання задач з досить широкого кола наукових проблем та є ефективним інструментом для їх розв'язання. Додатковим імпульсом до вивчення задач спектральної теорії графів та її узагальнень стали зв'язки з задачами класифікації конфігурацій підпросторів, вивчення зображень інволютивних алгебр типу Темперлі-Ліба, а також перспективою застосування до теорії квантових графів.

Спектральна теорія звичайний графік є досить розвиненою областю математики з чисельними результатами та викладена в багатьох статтях та монографіях, зокрема в класичних монографіях [1]-[4], із застосуванням якої можна ознайомитися в [5].

РОЗДІЛ 1: Прямі спектральні задачі на реберно – зважених графах

1.1. Основні означення спектральної теорії реберно – зважених графів

Ми вважаємо, що читач знайомий з термінологією теорії графів. Зокрема з термінами: вершини та ребра графа, суміжні вершини, інцидентні вершина та ребро, степінь вершини, порядок графа, шлях, зв'язний граф, компоненти зв'язності графа, цикл, дерево тощо. Детально ознайомитися з загальною теорією графів читач може за книгами [5]-[7].

Надалі в цій роботі під терміном “**граф**” ми розуміємо впорядковану пару $G = (V, E)$, в якій V – деяка непорожня скінченна множина і E – множина, що складається з неупорядкованих пар різних елементів V . Множина V при цьому називається *множиною вершин графа G* , множина E називається *множиною ребер графа G* . У випадку, коли необхідно підкреслити, про вершини та ребра якого графа йде мова, ми будемо писати $V(G)$ та $E(G)$. Ребро, що з'єднує вершини u та v будемо коротко позначати (u, v) або uv .

Реберно—зваженим графом G називаємо пару (G, w) , в якій G – граф і w – *вагова функція*, тобто відображення множини ребер R цього графа G в множину додатних дійсних чисел $w: E \rightarrow (0; +\infty)$. Через w_e будемо позначати число $w(e)$, яке називатимемо вагою ребра e . Будемо казати, що G – граф, підпорядкований зваженому графу $\mathbf{G} = (G, w)$. В літературі можна знайти також такі графи і під назвою “зважений граф” без уточнення “реберно”, надалі для зручності викладу подальшого матеріалу ми будемо наслідувати саме такий термін.

Оскільки ми зазвичай будемо працювати зі зваженими графами, то часто будемо опускати слово “зважений”, якщо з контексту зрозуміло про що йде мова.

Зафіксуємо порядок, в якому будемо розглядати вершини зваженого графа, таким чином, якщо кількість вершин графа дорівнює n , то отожднимо множину вершин з множиною натуральних чисел від 1 до n .

Для простоти сприймання зважений граф почасти представляють схемою, що зображує підпорядкований граф, приписуючи ще над кожним ребром e його вагу w_e .

З кожним графом $\mathbf{G} = (G, w)$ та порядком вершин пов'язують матрицю суміжності $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, де $n = |C|$ - кількість вершин графа, а елементи матриці $a_{ij} = a_{ji} = w_{ij} > 0$, якщо вершини i та j сполучені ребром і $a_{ij} = 0$ в іншому випадку.

Таким чином, матриця $A(\mathbf{G})$ – це симетрична матриця з нулями на головній діагоналі. Вигляд матриці суміжності залежить від порядку, в якому розглядаються вершини. Проте матриці суміжності одного й того ж графа для різних порядків пов'язані між собою відношенням подібності.

Оскільки матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ - симетрична ($a_{ij} = a_{ji}$), то її спектр дійсний. Позначимо точки спектра (власні значення матриці) через λ_i ($i = 1, \dots, n$) та розташуємо їх в незростаючому порядку $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Максимальне власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ називають **індексом графа** та позначають також символом $ind_{\mathbf{G}}$. Спектр матриці суміжності будемо позначати $\sigma(\mathbf{G})$ та називати спектром графа. Спектр графа не залежить від способу нумерації його вершин. Для характеристичного многочлена матриці суміжності скористаємося позначенням $P_{\mathbf{G}}(x) = |xI - A(\mathbf{G})|$.

1.2. Невід'ємні, нерозкладні матриці, теорема Фробеніуса

Даний підрозділ містить відомі твердження та теореми з теорії матриць.

В якості огляду з теорії матриць ми рекомендуємо книги [8],[9]. Матриця називається *невід'ємною*, якщо всі елементи матриці – невід'ємні числа.

Матриця називається *додатною*, якщо всі елементи матриці - додатні числа. Відповідно, вектори з невід'ємними координатами та додатними координатами називаються невід'ємними та додатними векторами. Матриця суміжності довільного графа, як впливає з попереднього пункту – невід'ємна матриця. А тому всі властивості невід'ємних матриць вірні і для матриць суміжності.

Будемо писати $A \geq 0$, якщо матриця A невід'ємна; $A > 0$, якщо матриця A додатна. Для векторів: $x \geq 0$ буде позначати невід'ємність вектора x , $x > 0$ – його додатність.

Матриця називається *розкладною*, якщо перестановкою в деякому порядку рядків, а потім в тому самому порядку стовпчиків, можна одержати блочну матрицю вигляду $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ де на діагоналі стоять квадратні матриці, і *нерозкладною* в іншому разі.

Твердження 1. Матриця суміжності графа нерозкладна тоді та лише тоді, коли граф – зв'язний.

Властивості власних векторів та власних значень невід'ємних нерозкладних матриць, які нас цікавлять, сформульовані у наступній теоремі.

Теорема Фробеніуса (див. [8, с.355]) Нерозкладна невід'ємна матриця A завжди має додатне власне значення r , яке задовольняє наступним властивостям:

- r є простим коренем характеристичного рівняння;
- модулі всіх інших власних значень не перевищують числа r ;
- власному значенню r відповідає власний додатний вектор.

Окрім цього, якщо A має h власних значень, за модулем рівних r , то ці числа всі різні між собою та є коренями рівняння $\lambda^h - x^h = 0$, і взагалі, якщо розглядати весь спектр матриці A як систему точок на комплексній площині, то

він відображається на себе при повороті на кут $2\pi/h$.

Якщо $h > 1$, то перестановкою рядків і такою ж перестановкою стовпчиків можна звести матрицю A до такого “циклічного” вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

(вздовж головної діагоналі розташовані квадратні блоки.)

При $h > 1$ матриця A називається *імпримітивною*; число h - її *індекс імпримітивності*. В протилежному випадку матриця A – *примітивна*.

Нагадаємо, що матриця суміжності зваженого графа є невід’ємною, (тому для неї справедливий результат теореми Г.Фробеніуса), а також симетричною. З урахуванням того, що всі власні значення симетричної матриці – дійсні числа, з теореми Фробеніуса випливає теорема про спектральні властивості зв’язного графа.

Теорема Фробеніуса для матриці суміжності. Нехай G – зв’язний граф та $\lambda_G = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ – власні значення зваженого графа $G = (G, w)$ в порядку не зростання. Тоді

- (1) індекс графа – додатне число ($\lambda_G > 0$);
- (2) модуль довільного власного значення не перевищує індексу графа ($|\lambda_i| \leq \lambda_G$);
- (3) алгебрична кратність власного значення λ_G дорівнює 1 (а отже, і геометрична кратність дорівнює одиниці);
- (4) існує додатний власний вектор, який відповідає власному значенню λ_G (цей додатний вектор будемо називати вектором Перрона-Фробеніуса);
- (5) якщо λ_G – власне значення, то його алгебрична кратність дорівнює одиниці (а отже, і геометрична кратність дорівнює одиниці).

Твердження 2. При збільшенні ваги на довільному ребрі зваженого зв'язного графа індекс строго збільшується.

Доведення Нехай G_1 – вихідний зважений граф, а G – зважений граф, одержаний з G_1 збільшенням ваги на деякому ребрі. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $e = \{v_1, v_2\}$. Тоді матриця A_G відрізняється від матриці A_{G_1} двома елементами : другим елементом у першому рядку та першим елементом у другому рядку. Нехай далі ξ – власний вектор A_G , який відповідає індексу λ_{G_1} . Відмітимо, що $A_G \xi \geq A_{G_1} \xi$ та при цьому виконуються строгі нерівності $(A_G \xi)_1 > (A_{G_1} \xi)_1$ і $(A_G \xi)_2 > (A_{G_1} \xi)_2$. Візьмемо додатний вектор v , тоді, з попередніх нерівностей випливає нерівність $(A_{G_1} \xi, v) < (A_G \xi, v)$. Отже, $\lambda_{G_1}(\xi, v) = (\xi, \lambda_{G_1} v) = (\xi, A_{G_1} v) = (A_{G_1} \xi, v) < (A_G \xi, v) = (\lambda_G \xi, v) = \lambda_G(\xi, v)$. Скоротивши нерівність на додатне число (ξ, v) , одержимо $\lambda_G > \lambda_{G_1}$.

1.3. Графи Кокстера та теорема Сміта

Введемо означення графів Кокстера, які є підкласом зважених графів із ваговою функцією певного вигляду, а саме: **графом Кокстера** називаємо зважений граф $G = (G, w)$, вагова функція w якого діє в множину, що складається з чисел 2 та $2 \cos \frac{\pi}{n}$, $n \geq 3$. Разом з ваговою функцією будемо розглядати *функцію позначок* w^* , що діє з множини ребер графа G в множину, що складається з символу ∞ і натуральних чисел, більших за 2 та w, w^* пов'язані наступним співвідношенням $w^*(e) = k$, якщо $w(e) = 2 \cos \frac{\pi}{n}$ та $w^*(e) = \infty$, якщо $w(e) = 2$.

Для простоти сприйняття граф Кокстера почасти представляють схемою, що зображує підпорядкований граф, приписуючи ще над кожним ребром e

число $w^*(e)$, яке ми будемо для зручності називати “позначкою” на ребрі. Прийнято опускати приписування на ребрах числа 3, і такі ребра будемо ще називати непозначеними, а ребра з позначкою більшою або рівною 4 будемо називати позначеними.

Зауваження: Звичайні графи є підмножиною графів Кокстера, для них функція – це відображення в число 3. Ми будемо називати граф Кокстера просто графом, якщо з контексту зрозуміло, що мова йде про графи Кокстера.

Графи $A_n (n \geq 1)$, $D_n (n \geq 4)$, E_6 , E_7 , E_8 , $B_n (n \geq 2)$, F_4 , G_2 , H_3 , H_4 , $I_2(p)$, ($p = 5$ або $p \geq 7$), зображені на рис. 1, називаються графами **Динкіна-Кокстера**. Для кожного з цих графів індекс в позначеннях дорівнює кількості вершин графа.

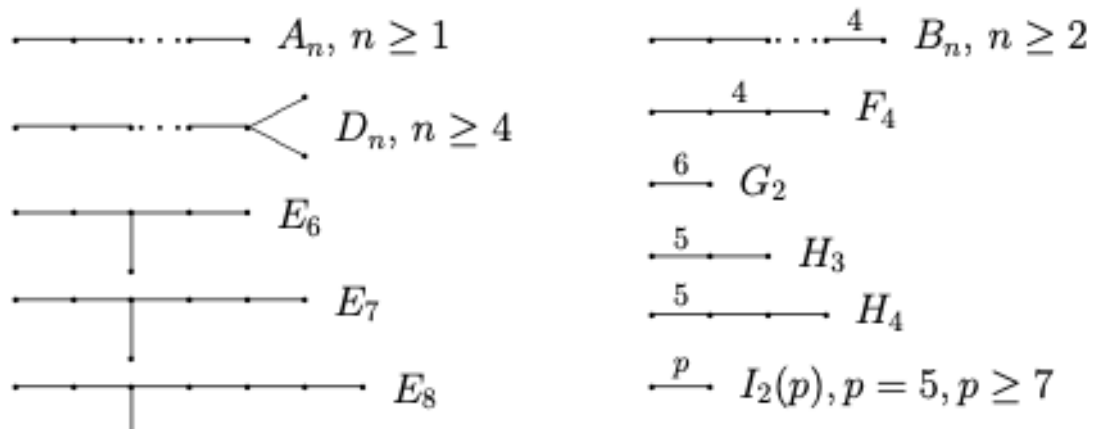


Рис. 1. Графи Динкіна-Кокстера $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, B_n, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(p)$.

На рис. 2 зображені графи, які називаються **евклідовими графами**:

$\widetilde{A}_n (n \geq 1)$, $\widetilde{D}_n (n \geq 4)$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$, $\widetilde{B}_n (n \geq 3)$, $\widetilde{C}_n (n \geq 2)$, $\widetilde{F}_4$, $\widetilde{G}_2$. Порядки евклідових графів на одиницю більше за індекс в позначеннях.

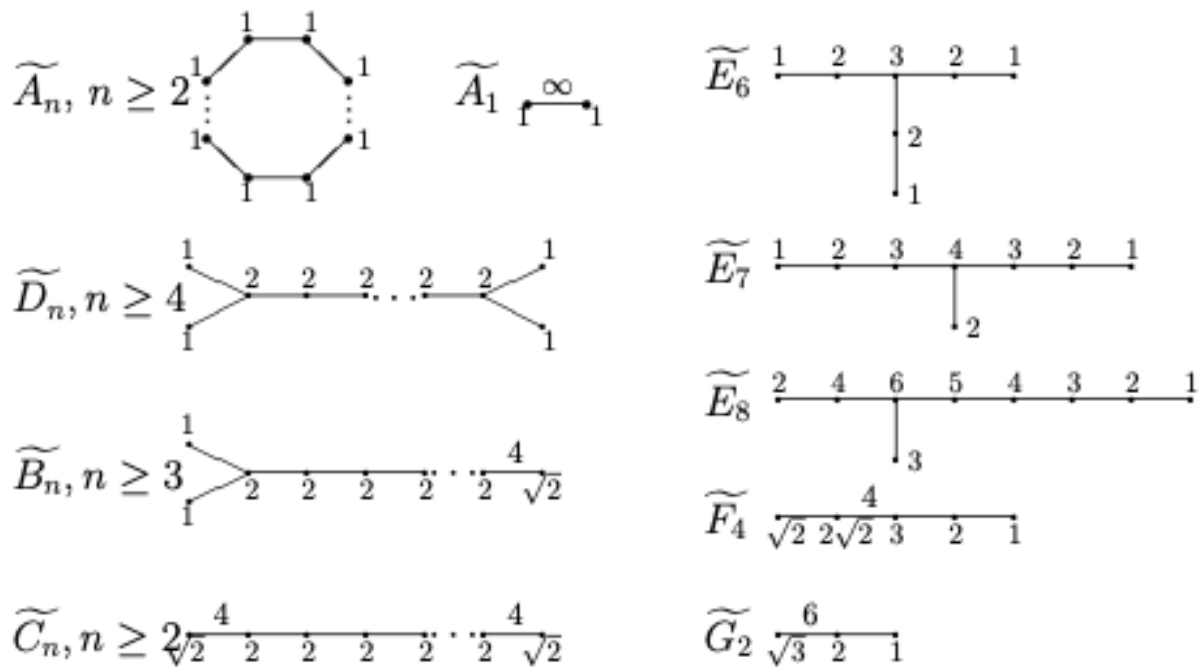


Рис. 2. Евклідові графи $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$, $\widetilde{B}_n$, $\widetilde{C}_n$, $\widetilde{F}_4$, $\widetilde{G}_2$.

Наступна теорема встановлює зв'язок між структурою та індексом графа Кокстера.

Теорема 2. Узагальнена теорема Сміта

1. Нерівність $\lambda_{\mathbf{G}} < 2$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{G}$ є графом Динкіна-Кокстера;
2. Рівність $\lambda_{\mathbf{G}} = 2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{G}$ є одним із евклідових графів;
3. Для інших графів справедлива рівність $\lambda_{\mathbf{G}} > 2$.

Доведення можна знайти в наступних матеріалах: [11, с. 20-22],[13, pp.15-16],[14].

1.4. Зв'язки між спектральними та структурними властивостями графів

В цьому підрозділі ми наведемо декілька відомих теорем з відповідними посиланнями на літературу, які встановлюють зв'язок між спектром та структурою графа. Добре відомо, що деякі структурні властивості не визначаються однозначно спектром, проте навіть в таких випадках можна, використовуючи спектральні дані, уточнити область зміни цих властивостей.

Теорема 1 (про сплетення) [10, с. 119] Нехай $\mathbf{G}$ має спектр $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, i – вершина $\mathbf{G}$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ – спектр $\mathbf{G} - i$, тоді

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$$

Теорема 2 (Нозаля) [15] Якщо $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ – спектр графа $\mathbf{G}$, то з нерівності $\lambda_1^2 > \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$ випливає, що граф $\mathbf{G}$ містить хоча б один трикутник.

Покладемо $w_i = \sum_{j:j \sim i} w_{ij}$. Якщо множину вершин V можна розбити на дві непорожні множини V_1 та V_2 , такі що для довільних вершини i, j з V_1 $w_i = w_j$ і те саме виконується для довільних вершин i, j з V_2 , то граф $\mathbf{G}$ називається **зважено-напіврегулярним**. Якщо ж всі w_i рівні між собою, то граф $\mathbf{G}$ називається **зважено-регулярним**.

Позначимо через $w_{\max} = \max w_i$, $w_{\min} = \min w_i$, $\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i$.

Наступна теорема перенесена з відповідної теореми теорії матриць.

Теорема 3 [8, с. 362-363] Для зваженого графа $\mathbf{G}$ має місце нерівність $w_{\min} \leq \bar{w} \leq \lambda_{\mathbf{G}} \leq w_{\max}$, причому рівність досягається в деякій нерівності тоді та лише тоді, коли граф $\mathbf{G}$ – зважено-регулярний.

Теорема 4 [16] Для зв'язного графа $\mathbf{G}$ виконується нерівність $\lambda_{\mathbf{G}} \leq \max_{i \sim j} \{\sqrt{w_i w_j}\}$, причому рівність досягається тоді і лише тоді, коли $\mathbf{G}$ –

зважено-регулярний граф або зважено-напіврегулярний дводольний граф.

Також в роботі Kindar Ch. Das, Barat R. B. [16] можна знайти більш загальний результат для графів, що реберно-зважені додатно-визначеними квадратними матрицями однакового розміру.

1.5. Теорема парності для реберно-зважених графів

В цьому пункті ми доведемо аналог відомої теореми спектральної теорії звичайних графів – теорему про парність для зважених графів.

Нагадаємо, що граф називається *дводольним*, якщо існує розбиття множини його вершин на дві частини (*доли*) таке, що кінці кожного ребра належать різним частинам.

Доведемо відоме твердження теорії графів.

Твердження 1. Граф дводольний тоді та лише тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

Доведення. $\Rightarrow$ Необхідність. Нехай G – дводольний граф, C – один з його циклів довжини k . Пройдемо всі ребра цього цикла в тій послідовності, в якій вони розташовані, починаючи з деякої вершини v . Зробивши k кроків, повернемося в v . Оскільки кінці кожного ребра лежать в різних долях, то k – парне число.

$\Leftarrow$ Достатність. Не обмежуючи загальності, можна розглядати тільки зв'язні графи, бо диз'юнктивне об'єднання дводольних графів також дводольне. Нехай зв'язний граф G порядку $n > 1$ не має циклів непарної довжини, $v \in VG$. Побудуємо розбиття $VG = A \cup B$ наступним чином: довільну вершину u графа G

віднесемо до класу A , якщо відстань $d(u, v)$ – парне число, і до класу B , якщо ця відстань непарна. Залишається довести, що це розбиття задовольняє вказаній в означенні умові дводольності графа. Нехай, навпаки, існують дві суміжні вершини u та w , що входять до одного класу. Тоді жодна з них не збігається з v , оскільки $v \in A$, а суміжні вершини до вершини v належать класу B за визначенням розбиття. Нехай, далі, U – найкоротший (u, v) ланцюг, W – найкоротший (w, v) ланцюг, остання, рахуючи від v , зі спільних вершин цих ланцюгів, що лежить на ланцюгу U . Позначимо через X_u та Y_u відповідно (v, v_1) і (v_1, u) – підланцюги ланцюга U , а через X_w та Y_w – відповідно (v, v_1) і (v_1, w) – підланцюги ланцюга W . Очевидно, що довжини ланцюгів X_u та X_w збігаються, а, отже, довжини ланцюгів Y_u та Y_w однієї парності. Але тоді об'єднання ланцюгів Y_u та Y_w та ребра uw є циклом непарної довжини.

Теорема 1 (парності). Граф G , який містить хоча б одне ребро, є дводольним тоді й лише тоді, коли його спектр симетричний відносно нуля.

Доведення. $\Rightarrow$ Доведемо, що якщо граф дводольний, то його спектр симетричний відносно нуля. Розглянемо значення $(-1)^{2l+1}C_{2l+1}$, для коефіцієнтів C_{2l+1} характеристичного многочлена з непарними індексами. Вираз $(-1)^{2l+1}C_{2l+1}$ дорівнює сумі визначників матриць суміжностей підграфів, породжених відповідними $2l + 1$ вершинами. Серед $(2l + 1)!$ доданків для кожного визначника розглянемо відмінні від нуля доданки. Оскільки дводольний граф і кожен підграф дводольного графа не містять циклів непарної довжини, то відмінними від нуля доданками будуть доданки $\text{sign}(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \dots a_{2l+1\pi(2l+1)}$, де π – добуток незалежних транспозицій та циклів парної довжини, але таких π не існує. Отже, $(-1)^{2l+1}C_{2l+1} = 0$. Таким чином, характеристичний многочлен графа G має вигляд: $P_G(\lambda) = \lambda^n + c_2\lambda^{n-2} + c_4\lambda^{n-4} + \dots + c_{n-2}\lambda^2 + c_n$, якщо n парне чи $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-3} + c_4\lambda^{n-5} + \dots + c_{n-3}\lambda^2 + c_{n-1})$, якщо n непарне. Пара чисел $-\alpha; \alpha$ буде (або не буде)

коренями цього многочлена одночасно. Отже, його спектр симетричний відносно нуля.

$\Leftarrow$ Доведемо, що коли спектр графа симетричний відносно нуля, то граф є дводольним. Позначимо через r індекс графа, тоді $-r$ також належить спектру, тоді матриця суміжності $\mathbf{A}$ графа $\mathbf{G}$ імпримітивна.

З теореми Фробеніуса випливає, що індекс імпримітивності n може бути лише парним числом та існує матриця перестановок $\mathbf{P}$ така, що $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

А оскільки n – парне, то $\mathbf{G}$, очевидно не містить циклів непарної довжини.

Наслідок 1 (про парність для дерева). Нехай граф $\mathbf{G}$ є деревом.

Тоді його спектр симетричний відносно нуля.

Доведення. Дерево є дводольним графом, тому це твердження є наслідком попередньої теореми.

1.6. Обчислення характеристичного многочлена

Формула визначника матриці суміжності $\mathbf{G} = (G, w)$. Нехай кількість вершин графа $\mathbf{G}$ дорівнює n . Позначимо через H_k підграф $\mathbf{G}$ з k вершинами, компонентами зв'язності якого є лише цикли та ребра. Будемо називати такі підграфи лінійними. Якщо підграф лінійний та містить всі вершини вихідного графа, то будемо називати його каркасним. Для лінійного підграфа H_k

позначимо через $p(H_k)$ кількість компонент зв'язності, що містять парну кількість вершин, через $r(H_k)$ загальну кількість компонент зв'язності та через $c(H_k)$ множину компонент зв'язності, що є циклами. Через $w(H_k)$ позначимо вагу H_k , яка дорівнює добутку ваг його компонент зв'язності: вага компоненти зв'язності, що є ребром (i, j) дорівнює w_{ij}^2 а вага компоненти зв'язності, що є циклом дорівнює добутку значень w_{ij} по всім його ребрам (i, j) .

Теорема 1 (Харарі). [17] Визначник матриці суміжності довільного зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ може бути порахований за наступною формулою

$$\det A(G) = \sum_{\{H_n\}} (-1)^{p(H_n)} 2^{c(H_n)} w(H_n)$$

Доведення. За означенням, визначник матриці $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ дорівнює сумі $n!$ доданків, кожний з яких є добутком вигляду $\text{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$, де π — відповідна підстановка індексів. Множник $a_{i\pi(i)}$ не дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вершини i та $\pi(i)$ з'єднані ребром у графі G . Оскільки в простих графах, які ми розглядаємо, немає петель, то доданки $\text{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$, де π має нерухому точку, дорівнюють нулеві. Отже, кожен ненульовий доданок відповідає існуванню в графі каркасного підграфа, кількість компонент зв'язності якого дорівнює кількості незалежних циклів підстановки π , а підлеглі графи самих компонент зв'язності є ребрами для транспозицій та циклами довжини l для незалежних циклів підстановки π довжини $l, l \geq 3$. Тепер ненульові доданки потрібно просумувати. На $\text{sgn}(\pi)$ (знак дорівнює $(-1)^k$, де k — кількість транспозицій в розкладі підстановки в добуток транспозицій) впливають тільки незалежні цикли π парної довжини, а це якраз компоненти зв'язності G вигляду $A_{2,n}$ при непарному n (C_n — простий цикл довжини n). Ще потрібно врахувати, що кожній компоненті зв'язності вигляду C_n відповідають два незалежних цикла (обхід за годинниковою

стрілкою проти неї).

Теорема Захса. Якщо $P_G(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k} = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n$ – характеристичний многочлен $G = (G, w)$, то

$$(1) \ c_1 = 0;$$

$$(2) \ c_2 = -\sum_{e \in E(G)} w(e)^2$$

$$(3) \ c_k = \sum_{\{H_n\}} (-1)^{p(H_n)} 2^{c(H_n)} w(H_n) \text{ для } k = 1, \dots, n.$$

Доведення. З курсу лінійної алгебри відомо, що добуток $(-1)^i c_i$ дорівнює сумі головних мінорів матриці суміжності A_G розміру $i \times i$. Кожен головний мінор матриці суміжності – це визначник матриці суміжності підграфа, породженого відповідними i вершинами. А тоді це твердження випливає з попереднього з урахуванням того, що $(-1)^{r(H(k))} = (-1)^k (-1)^{p(H(k))}$.

РОЗДІЛ 2: Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах

Різноманітні задачі відновлення для звичайних графів посідають значне місце в спектральній теорії графів, з оглядом різноманітних задач читач може ознайомитися в літературі [19]-[21].

Розглянемо наступну задачу відновлення для зважених графів: нехай нам відомий граф G , ми хочемо відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ за спектрами певних його підграфів (зважених). Спектр підграфа будемо називати *підспектром*. Мінімальну кількість таких підспектрів будемо називати *відновлюючим спектральним числом* графа $\mathbf{G} = (G, w)$, позначення: $\text{Sr}_n(\mathbf{G})$. Для кожного зваженого графа $\mathbf{G}$ виникає дві задачі: навести приклад підспектрів, за якими можна здійснити відновлення та знайти відновлююче спектральне число.

Будемо називати піграф *власним*, якщо він одержується із вихідного графу видаленням деяких вершин. Можна накласти додаткове обмеження на задачу відновлення, а саме відновлення вагової функції за спектрами *власних підграфів*. Ми будемо розглядати ці задачі паралельно.

В усіх наступних твердженнях ми припускаємо, що розглядувані алгебраїчні та чисельні задачі мають розв'язки.

Лема. Задача відновлення ваг за спектрами підграфів еквівалентна задачі відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів.

Доведення. За спектром зваженого графа $\mathbf{G}$ однозначно відновлюється характеристичний многочлен $P_{\mathbf{G}}$ і навпаки, оскільки многочлен зі старшим коефіцієнтом 1 однозначно відновлюється за своїми коренями.

Також можна розглядати наступну задачу: відомий порядок зваженого графу $\mathbf{G} = (G, w)$, проте невідомий ні сам граф G , ні його вагова функція w , за якими підспектрами в цьому випадку можна відновити повністю зважений граф $\mathbf{G}$?

2.1. Задача відновлення ваг для реберно-зважених графів Динкіна та розширених графів Динкіна

$$\mathbf{A}_n$$

Спочатку розглянемо поставлену задачу для зваженого ланцюжка $\mathbf{A}_n = (A_n, w)$. Для зручності вважатимемо, що $V(A_n) = 1, 2, \dots, n$. Вершина $2 \leq k \leq n - 1$ інцидентна з вершинами $k - 1$ та $k + 1$. Введемо для зручності наступні позначення: $a_{k-1} \equiv w(\{k - 1, k\})$, числа a_i будемо називати *вагами*, $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_n - \{k + 1, \dots, n\}$, $P_k \equiv P_{\mathbf{A}_k}$.



Твердження 1. Для відновлення ваг графа $\mathbf{A}_2$ достатньо одного спектру для $\mathbf{A}_2$ та двох підспектрів для $\mathbf{A}_n$, $n \geq 3$, а саме $\sigma(\mathbf{A}_n)$, $\sigma(\mathbf{A}_{n-1})$.

Доведення. Твердження для $\mathbf{A}_2$ очевидне, адже $P_2(x) = x^2 - a_1^2$, $\sigma(\mathbf{A}_2) = \{-a_1, a_1\}$.

Доведемо індукцією за n , що для відновлення ваг графа $\mathbf{A}_n$, $n \geq 3$ достатньо двох підспектрів: $\sigma(\mathbf{A}_n)$, $\sigma(\mathbf{A}_{n-1})$.

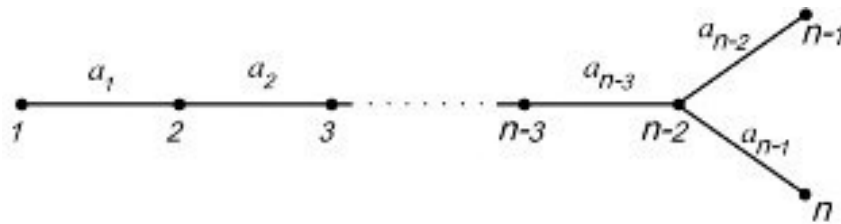
База, індукції: $n = 3$. Маємо за формулою Швенка $P_3(x) = xP_2(x) - a_2^2x$, оскільки старший коефіцієнт P_2 дорівнює 1, то за його коренями однозначно відновлюється і многочлен, отже, однозначно знаходиться a_2 , а знаючи спектр $\mathbf{A}_2$ ми можемо відновити і a_1 .

Індукційний перехід: $n - 1 \rightarrow n$. За формулою Швенка $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - a_{n-1}^2P_{n-2}(x)$, прирівнюючи коефіцієнти при x^{n-2} в обох частинах, знаходимо a_{n-1} , далі можемо виразити многочлен $P_{n-2}(x) = \frac{1}{a_{n-1}^2}(xP_{n-1}(x) - P_n(x))$.

Отже, нам відомі P_{n-1} та P_{n-2} , за індукційним припущенням, ми можемо відновити решту ваг $a_1, \dots, a_{n-2}$.

$\mathbf{D}_n, n \geq 4$

Розглянемо поставлену задачу для зваженого графа $\mathbf{D}_n = (D_n, w)$. Для зручності вважатимемо, що $V(A_n) = \{1, 2, \dots, n\}$. Вершина $2 \leq k \leq n-3$ інцидентна з вершинами $k-1$ та $k+1$, а вершина $n-2$ інцидентна з вершинами $n-3, n-1, n$ вершини $1, n-1, n$ – висячі, як вказано на малюнку. Введемо для зручності наступні позначення: $a_{k-1} \equiv w(\{k-1, k\})$ для $2 \leq k \leq n-1$ та $a_{n-1} \equiv w(\{n-2, n\})$, числа a_i будемо називати *вагами*, $\mathbf{A}_{n-1}^1 = \mathbf{D}_n - \{n\}$, $\mathbf{A}_{n-1}^2 = \mathbf{D}_n - \{n-1\}$, $\mathbf{A}_{n-2} = \mathbf{D}_n - \{n, n-1\}$, $\mathbf{A}_{n-3} = \mathbf{D}_n - \{n, n-1, n-2\}$.



Твердження 2. Для відновлення ваг графа $\mathbf{D}_n$ достатньо трьох спектрів, а саме $\sigma(\mathbf{D}_n), \sigma(\mathbf{A}_{n-1}^1), \sigma(\mathbf{A}_{n-1}^2)$. Для непарних n достатньо двох спектрів $\sigma(\mathbf{D}_n), \sigma(\mathbf{A}_{n-1}^1)$.

Доведення. Маємо за формулою Швенка $P_{\mathbf{D}_n}(x) = x(P_{\mathbf{A}_{n-1}^1}(x) - a_{n-1}^2 P_{\mathbf{A}_{n-3}}(x))$ (1), прирівнюючи коефіцієнти при x^{n-2} в обох частинах, знаходимо a_{n-1} , далі можемо виразити многочлен $P_{\mathbf{A}_{n-3}}(x) = \frac{1}{x a_{n-1}^2} (x P_{\mathbf{A}_{n-1}^1}(x) - P_{\mathbf{D}_n}(x))$.

Аналогічно застосовуємо формулу Швенка для графа $\mathbf{D}_n$ та вершини $n-1$.

Отже, нам відомі $P_{\mathbf{A}_{n-3}}$, а також a_{n-2} та a_{n-1} .

Далі застосуємо формулу Швенка до графа $\mathbf{A}_{n-1}^1$ та вершини $n-1$. Одержуємо наступне співвідношення:

$$P_{\mathbf{A}_{n-1}^1}(x) = x P_{\mathbf{A}_{n-2}}(x) - a_{n-2}^2 P_{\mathbf{A}_{n-3}}(x). \quad (2)$$

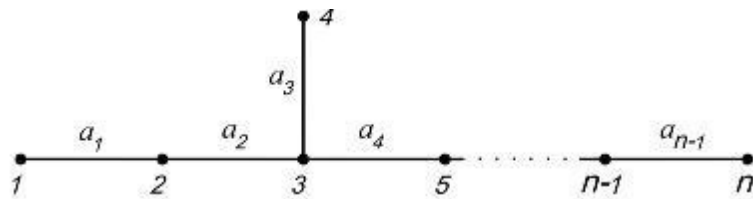
З цього ми можемо виразити многочлен $P_{A_{n-2}}(x)$ через вже відомі:

$$P_{A_{n-2}}(x) = \frac{1}{x} \left(P_{A_{n-1}}(x) + a_{n-2}^2 P_{A_{n-3}}(x) \right).$$

А отже, ми знаємо $P_{A_{n-3}}$, та $P_{A_{n-2}}$, і за Твердженням 1 ми можемо знайти $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-3}\}$, оскільки ми вже знайшли $\{a_{n-2}, a_{n-1}\}$, то ми можемо повністю відновити ваги графа D_n . Якщо n – непарне, то лише за (1) та (2) можна знайти $a_{n-1}, a_{n-2}, P_{A_{n-2}}$ та $P_{A_{n-3}}$, оскільки $\det A(A_{n-2}) = \det A(-a_{n-2}^2 A_{n-2})$.

E_6, E_7, E_8

Розглянемо поставлену задачу для зважених графів $E_n, n \geq 6$. Введемо позначення за аналогією до попередніх пунктів, на рисунках зображено відповідні позначення для вершин та ваг на ребрах.



Твердження 3. Для відновлення ваг графа $E_n, n \geq 6$ достатньо двох спектрів, а саме $\sigma(E_n), \sigma(E_n - \{n\})$.

Доведення. Доведемо твердження індукцією за n .

База індукції $n = 6$ Маємо за формулою Швенка $P_{E_6}(x) = xP_{E_5}(x) - a_5^2 P_{E_4}(x)$, прирівнюючи коефіцієнти при x^4 в обох частинах, знаходимо a_5 , і далі можемо знайти многочлен $P_{E_4}(x)$.

Застосовуємо формулу Швенка для графа E_5 та вершини 5: $P_{E_5}(x) = x(P_{E_4}(x) - a_4^2 P_{E_3}(x))$, з цього співвідношення можемо знайти a_4 та a_1 ($P_{E_2}(x) = x^2 - a_1^2$).

Далі застосуємо формулу Швенка до графа E_4 та вершини 4: $P_{E_4}(x) =$

$xP_{E_3}(x) - a_3^2 P_{E_2}(x)$, розпишемо праву частину $P_{E_4}(x) = x^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)x^2 + a_1^2 a_3^2$.

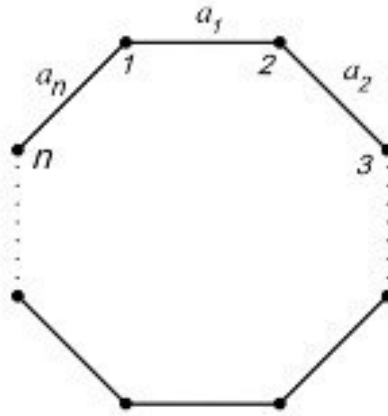
Оскільки ліва частина відома, то відомі і всі коефіцієнти з правої частини, також відомо a_1 , а тоді ми також можемо знайти a_2, a_3 .

Отже, ми можемо повністю відновити ваги графа E_6 .

Індукційний перехід: $n - 1 \rightarrow n$. Маємо за формулою Швенка $P_{E_n}(x) = xP_{E_{n-1}}(x) - a_{n-1}^2 P_{E_{n-2}}(x)$ прирівнюючи коефіцієнти при x^{n-2} в обох частинах, знаходимо a_{n-1} , і далі можемо знайти многочлен $P_{E_{n-2}}(x)$. Оскільки нам відомі $P_{E_{n-1}}(x), P_{E_{n-2}}(x)$, то за припущенням індукції ми можемо повністю відновити ваги $a_i, i = 1, \dots, n - 1$, які разом з a складають всі ваги графа E_n .

Розширені діаграми Динкіна

$$\widetilde{A}_n, \quad n \geq 2$$

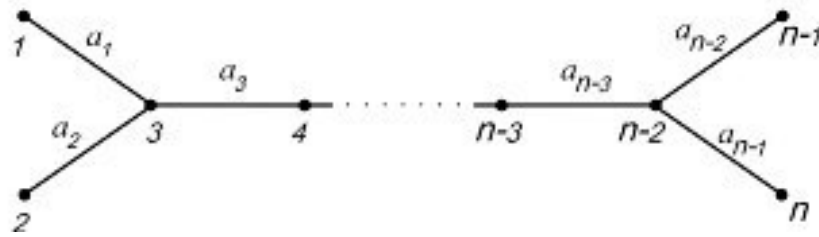


Введемо позначення за аналогією до попередніх пунктів, на рисунках зображено відповідні позначення для вершин та ваг на ребрах.

Твердження 4. Для відновлення ваг графа $\widetilde{A}_n$ достатньо чотирьох головних підспектрів: $\sigma(\widetilde{A}_n - 1), \sigma(\widetilde{A}_n - 2), \sigma(\widetilde{A}_n - 1, 2), \sigma(\{1, 2\})$.

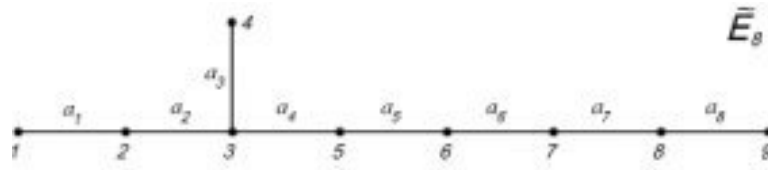
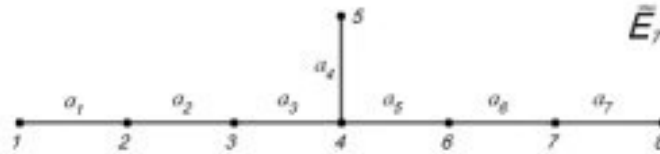
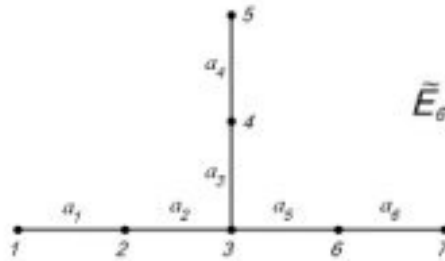
Доведення. Випливає з простого застосування Твердження 1.

$$\widetilde{D}_n$$



Твердження 5. Для відновлення ваг графа $\widetilde{D}_n$ достатньо чотирьох підспектрів.

$$\widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$$



Твердження 6. Для відновлення ваг графа $\widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7$ достатньо трьох спектрів, а для відновлення ваг графа $\widetilde{E}_8$ достатньо двох спектрів.

Висновки

Перша частина присвячена вивченню та огляду результатів спектральної теорії зважених графів та узагальненню відомих теорем спектральної теорії "звичайних" графів, зокрема формул Швенка, теореми Сміта, теореми парності.

Друга частина має дослідницький характер і містить нові результати, в ній вивчаються обернені задачі — відновлення ваги на множині ребер графа за спектральними даними графа та його підграфів.

В 1 розділі роботи зроблений огляд різноманітних результатів з спектральної теорії реберно-зважених графів, зокрема, теореми Фробеніуса для зважених графів (підрозділ 1.2), теореми Сміта для графів Кокстера (підрозділ 1.3), наведені повні доведення теореми парності (підрозділ 1.5) і теорем Харарі та Захса (підрозділ 1.6) та узагальнені відомі формули Швенка для звичайних графів на зважені графи (підрозділ 1.6) .

В 2 розділі роботи досліджені обернені спектральні задачі на зважених графах, зокрема проведена оцінка необхідної кількості спектрів підграфів, за якими однозначно визначається вагова функція зваженого графа для графів Динкіна, розширених графів Динкіна

Література

1. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов, теория и применение Киев, “Наукова думка”, 1984.
2. *Cvetkovic O., Doob M., Gutman I., Torgasev A.*, Recent Results in the Theory of Graph Spectra, in: Annals of Discrete Mathematics, vol. 36, North Holland, Amsterdam, 1988
3. *Cvetkovic D., Rowlinson M., Simic S.*, Eigenspaces of graphs, Cambridge University Press, 1997
4. *Chung F.R.K.*, Spectral Graph Theory, AMS, Providence, RI, 1994
5. *Харари Ф.*, Теория графов, “Мир”, Москва, 1973.
6. *Оре О.*, Теория графов, “Наука”, Москва, 1980.
7. *Bondy J.A., Murty U.S.R.*, Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1976
8. *Гантмахер Ф.*, Теория матриц, “Наука”, Москва, 1966.
9. *Хорн Р., Джонсон Ч.*, Матричный анализ, “Мир”, Москва, 1989.
10. *Marcus M., Minc H.*, A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964
11. *Самойленко Ю., Тимошкевич Л.*, Про спектральну теорію графів Кокстера, “У світі математики” 2009, т. 15, вип.3, стор.14-24.
12. *Москалева Ю., Самойленко Ю.*, Введение в спектральную теорию графов, “Центр учебной литературы”, Киев, 2007.
13. *Godman F.M., P. de la Harpe, Jones V.F.R.*, Coxeter Graphs and Tower of Algebras, Springer-Verlag New York, 1989.
14. *Smith J.H.*, Some properties of spectrum of a graph, in: “Combinatorial structures and their application”. Gordon and Breach 1970, p.403-406.
15. *Nosal E.*, Eigenvalues of Graphs, Masterthesis. Univ. of Galgery, 1970
16. *Kinkar Ch. Das, Barat R. B.*, A sharp upper bound on spectral radius of weighted graphs, Discrete Mathematics, 308 (2008), 3180-3184

17. *Havavy F.*, The determinant of the adjacency matrix of a graph, SIAM Rev., 4 (1962), 202-210
18. *Schwenk A. J.*, Computing the characteristic polynomial of a graph, Graph and Combinatorics, volume 406 of Lecture Notes in Mathematics, pages 153-172. AMS, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
19. *Gutman I., Cvetkovic D.M.*, The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Kak. Ser. Mat. Fiz. № 498-.№ 541 (1975), 45-48
20. *Hogben Lesliee*, Spectral Graph Theory and the Inverse Eigenvalue Prolem of a Graph, Chamchuri Journal of Mathematics, VOLUME 1(2009), NUMBER 1, 51-72.
21. *E.R. van Dam, W.H. Haemers*, Which graphs are determined by their spectrum?, Linear Algebra and its Applications, 373(2003), 241-272