

Досконалі графи

Лучка Катерина

2023

Вступ

Мета

- Систематизація основних теоретичних тверджень про досконалі графи.
- Огляд різних типів родин досконалих графів та їхня характеристика.
- Доведення досконалості застосовуючи розглянутий теоретичний матеріал.

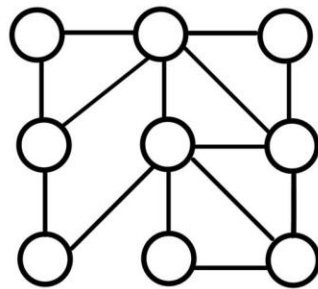
Досконалі графи мають широкий спектр практичних застосувань у різних галузях, таких як операційні дослідження, інформаційна сфера та теорія ігор, і ефективні при вирішенні складних оптимізаційних задач.

Розфарбування графів

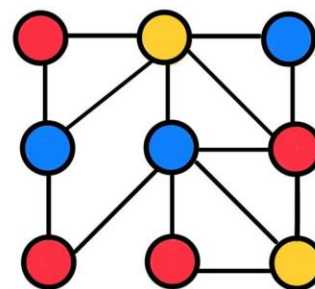
Нехай k – деяке натуральне число. Вершинним k -розфарбуванням, або просто **розфарбуванням** графа $G = (V, E)$ називається відображення $f: V \rightarrow N_k$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність деяке натуральне число $f(v) \in N_k$.

Розфарбування f графа G називають **правильним**, якщо $f(v) \neq f(w)$ для будь-яких його суміжних вершин v і w .

Мінімальне число k , для якого існує правильне розфарбування графа G , називають **хроматичним** числом графа G і позначають $\chi(G)$.



Нерозфарбований граф



Розфарбований граф

Досконалий граф

Граф називається **досконалим**, якщо кожен породжений підграф $H \subseteq G$ має хроматичне число $\chi(H) = w(H)$, тобто якщо тривіальна нижня оцінка в $w(H)$ кольорів для розмальовки вершин графа H досяжна.

Нехай граф G є досконалим, H – його породжений підграф, $G \supseteq H$. І нехай K – індукований граф H , $H \supseteq K$. Оскільки граф K є індукованим графом графа G ($G \supseteq K$), і G є досконалим, то K є також досконалим графом. Таким чином клас досконалих графів є **замкненим** відносно індукованих підграфів.

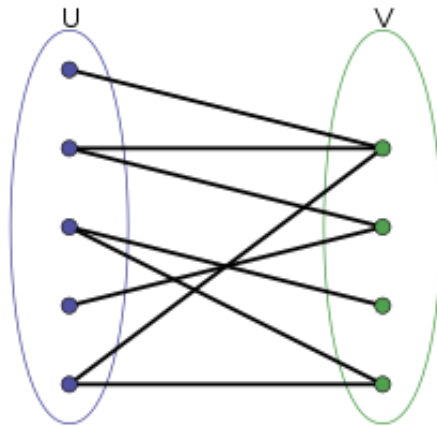
Клас досконалих графів є **незамкненим** відносно взяття довільних підграфів.

Родини досконалих графів

Двочастковий граф

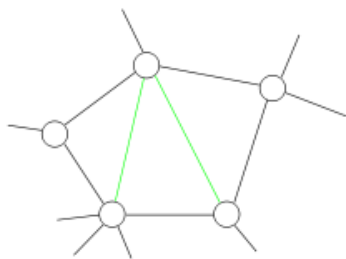
Твердження

Для довільного двочасткового графа завжди справджується рівність $w(G) = \chi(G)$.

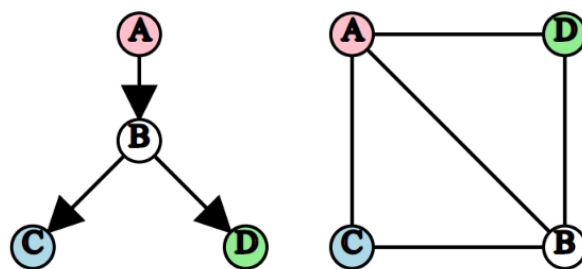


Родини досконалих графів

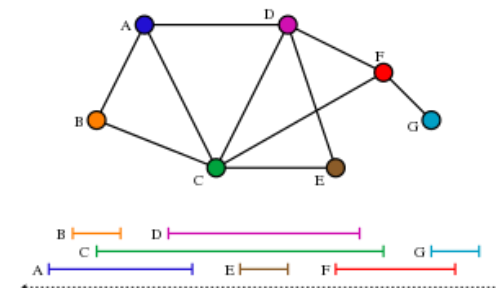
Граф хордальний



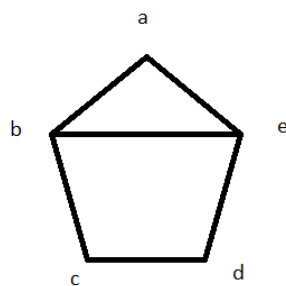
Граф порівнянності



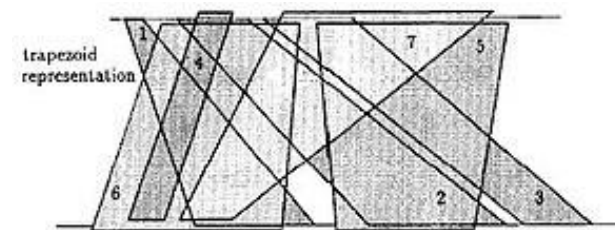
Інтервальний граф



. Цілком упорядкований граф



Трапецієдальний граф



Власні дослідження

Твердження 1

Для довільного графа $G = (V, E)$ виконується нерівність $|V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Теорема Ловаса. Граф G є досконалим тоді і тільки тоді, коли $|H| < \alpha(H) \cdot \omega(H)$ для всіх індукованих підграфів $H \subseteq G$.

Сильна теорема про досконалі графи. Граф G є досконалим тоді і тільки тоді, ні G ні $\bar{G}$ не містять в якості індукованого підграфа непарного цикла довжиною не менше 5.

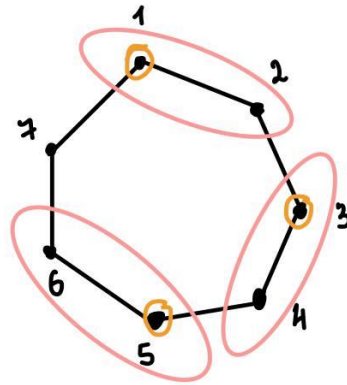
Твердження 2

Із сильної теореми про досконалі графи випливає теорема Ловаса.

Твердження 2

$\Rightarrow$ Випливає з $|V| \leq \chi(F) \cdot \alpha(F)$. Наведена нерівність виконується для будь-яких графів. Для досконалих графів за означенням $\chi(G) = w(G)$. А тому $|G| < \omega(G) \cdot \alpha(G)$.

$\Leftarrow$ Методом від супротивного. Припустимо, що $\exists k \geq 2$, таке що цикли C_{2k+1} і $\overline{C_{2k+1}}$ є породженими підграфами G . Розглянемо C_{2k+1} цикл і послідовно розділимо його вершини на k пар: $(1, 2), (3, 4), \dots, (2k-1, 2k)$ і окрему вершину $(2k+1)$



Суперечність:

$$|C_{2k+1}| > \alpha(C_{2k+1}) \cdot w(C_{2k+1}) \rightarrow 2k + 1 > k \cdot 2$$

$$2k + 1 = |\overline{C_{2k+1}}| > \alpha(\overline{C_{2k+1}}) \cdot w(\overline{C_{2k+1}}) = 2 \cdot k$$

Власні дослідження

Відношенням часткового порядку називається таке відношення R , для якого виконуються рефлексивність, антисиметричність та транзитивність

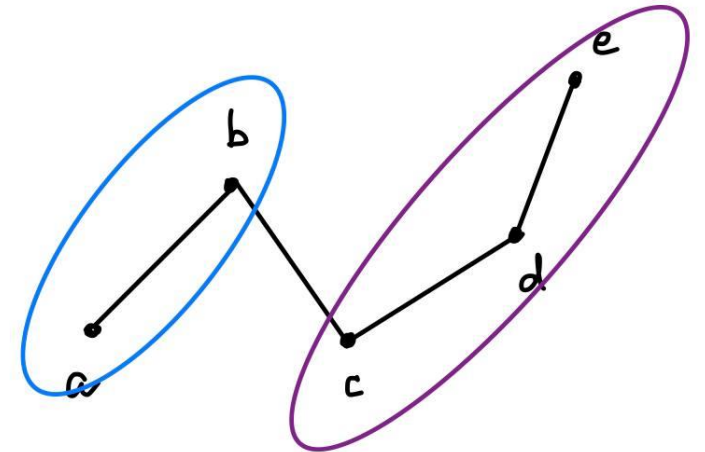
Теорема Ділуорса. У довільній частково впорядкованій множині найбільше число елементів у будь-якому антиланцюзі дорівнює найменшому числу ланцюгів у будь-якому розбитті даної множини на ланцюги.

Твердження 3

Наслідок з теореми Ділуорса: графи порівняльності є досконалими

Твердження 4

Твердження. Граф перестановок – це граф порівняльності.



Алгоритми на досконалих графах

- *Алгоритм Брона-Кербоша*
- *Алгоритм Чудновського*
- *Алгоритм Ловаса-Шайра-Плелса*
- *Алгоритм Фалігна*
- *Алгоритм Бергера*
- *Алгоритм розфарбування досконалого графа*

Для усіх досконалих графів задача про розфарбування, задача про максимальну кліку та задача про максимальну незалежну множину можуть бути вирішені в *поліноміальний час*

Список літератури

- [1] Belmonte R., Vatschelle M. Graph classes with structured neighborhoods and algorithmic applications //Theoretical Computer Science. – 2013. – Т. 511. – С. 54-65.
- [2] Berge, Claude. Perfect graphs. *Six Papers on Graph Theory*. Calcutta: Indian Statistical Institute. – 1963. – С. 1–21.
- [3] Chudnovsky M. et al. On the maximum weight independent set problem in graphs without induced cycles of length at least five //SIAM Journal on Discrete Mathematics. – 2020. – Т. 34. – №. 2. – С. 1472-1483.
- [4] Chudnovsky M. et al. The strong perfect graph theorem //Annals of mathematics. – 2006. – С. 51-229.
- [5] Diestel R., Diestel R. Extremal graph theory //Graph theory. – 2017. – С. 173-207.
- [6] Dilworth R. P. A decomposition theorem for partially ordered sets //Classic Papers in Combinatorics. – 1987. – С. 139-144.
- [7] Dushnik B., Miller E. W. Partially ordered sets //American journal of mathematics. – 1941. – Т. 63. – №. 3. – С. 600-610.
- [8] Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. Polynomial algorithms for perfect graphs //North-Holland mathematics studies. – North-Holland, 1984. – Т. 88. – С. 325-356.
- [9] Hougardy S. Classes of perfect graphs //Discrete Mathematics. – 2006. – Т. 306. – №. 19-20. – С. 2529–2571.

Дякую за увагу!