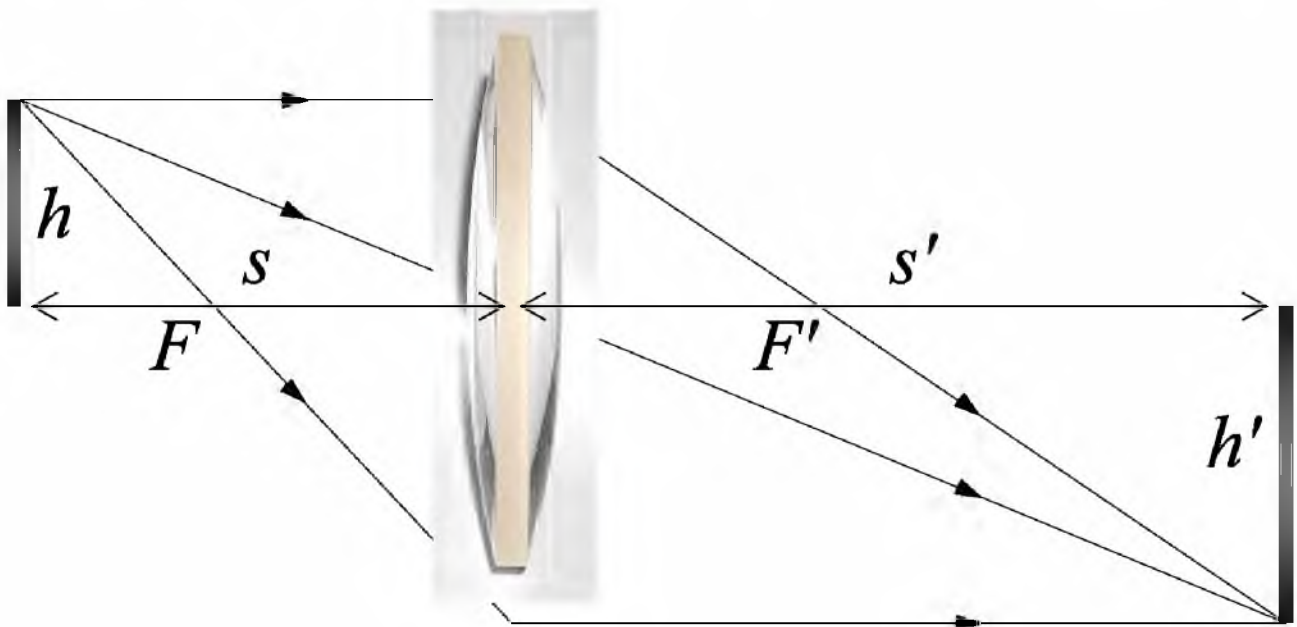


А.К.Дорош, Р.М.Мельник

ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА. ТОНКА ЛІНЗА

- Заломлення світла на сферичних поверхнях
- Розрахунок сферичних оптичних поверхонь
- Визначення характеристик тонкої лінзи



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \text{const}; \quad \beta = \frac{h'}{h} = \frac{s'}{s}$$

1.1 Тонка лінза

В *геометричній оптиці* вивчається хід світлових променів у оптично прозорих середовищах без врахування хвильової природи світла (розмір об'єктів набагато більший за довжину хвилі).

Для *сферичної межі* оптичних матеріалів має місце особливий хід променів із широким застосування в приладах світлопередачі, формування зображень. Це окуляри, зорове обладнання, мікроскопи, фотоапарати, оптико-проектувальна і освітлювальна техніка, організація ходу світлових потоків у спектральних приладах, різноманітній оптико-електронній апаратурі. Практично всі оптичні прилади геометричної оптики конструюються з лінз, об'єктивів, системи сферичних поверхонь або близьких до сферичних.

Лінза — оптичний прозорий однорідний матеріал з двома сферичними гладкими (полірованими) поверхнями певних радіусів кривини сферичних поверхонь R , R' , Рис. 1.1. Кожна з сферичних поверхонь може бути випуклою, увігнутою чи плоскою, Рис. 1.2. Відстань d між поверхнями може бути довільною. В основному використовуються тонкі лінзи. *Тонка лінза* має товщину $d \ll R, R'$, набагато меншу за радіуси кривини сферичних поверхонь, $d \rightarrow 0$.

Лінзи використовуються для проектування, передачі, масштабування, перетворення зображень. Використовують у складних оптичних інструментах як для проникнення у мікросвіт, так і в макросвіт космічних масштабів. По аналогії оптичних лінз створюються чи вивчаються теплові, гравітаційні, електромагнітні лінзи. Деякі природні об'єкти мають властивості лінз. Кришталик ока людини є наближенням тонкої лінзи, очне яблуко з кришталіком є складною оптичною системою.

Існують циліндричні, тороїдальні, конусоподібні лінзи. Все більшого поширення набувають асферичні лінзи. Різноманітність лінз і їх застосування раніше обмежувався складністю розрахунку і виготовлення. На разі такі проблеми нівелювалися застосуванням цифрових технологій. Основою більшості опти-

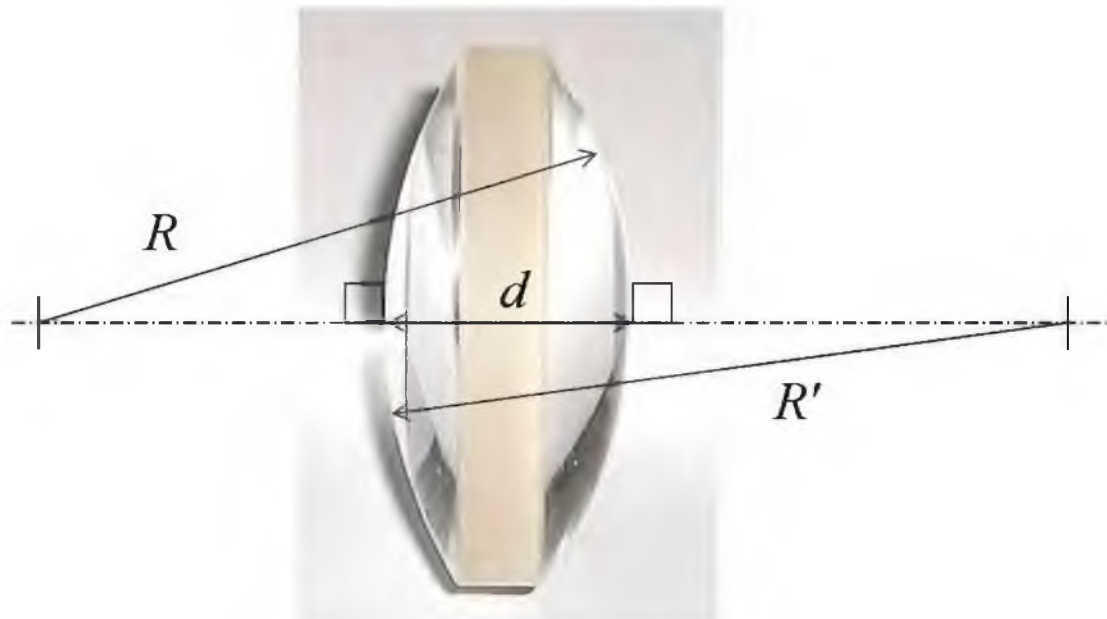


Рис. 1.1. Скляна лінза — виготовляється з прозорого матеріалу (скла), обмежена двома сферичними поверхнями радіусів R і R' , товщина лінзи d . Головна вісь, уявна лінія зображена штрихпунктиром, в точках перетину лінзи перпендикулярна до сферичних поверхонь — вершин лінзи.



Рис. 1.2. Двоопукла лінза; плоско-опукла лінза; збиральний меніск; двоввігнута лінза; плоско-ввігнута лінза; розсіювальний меніск.

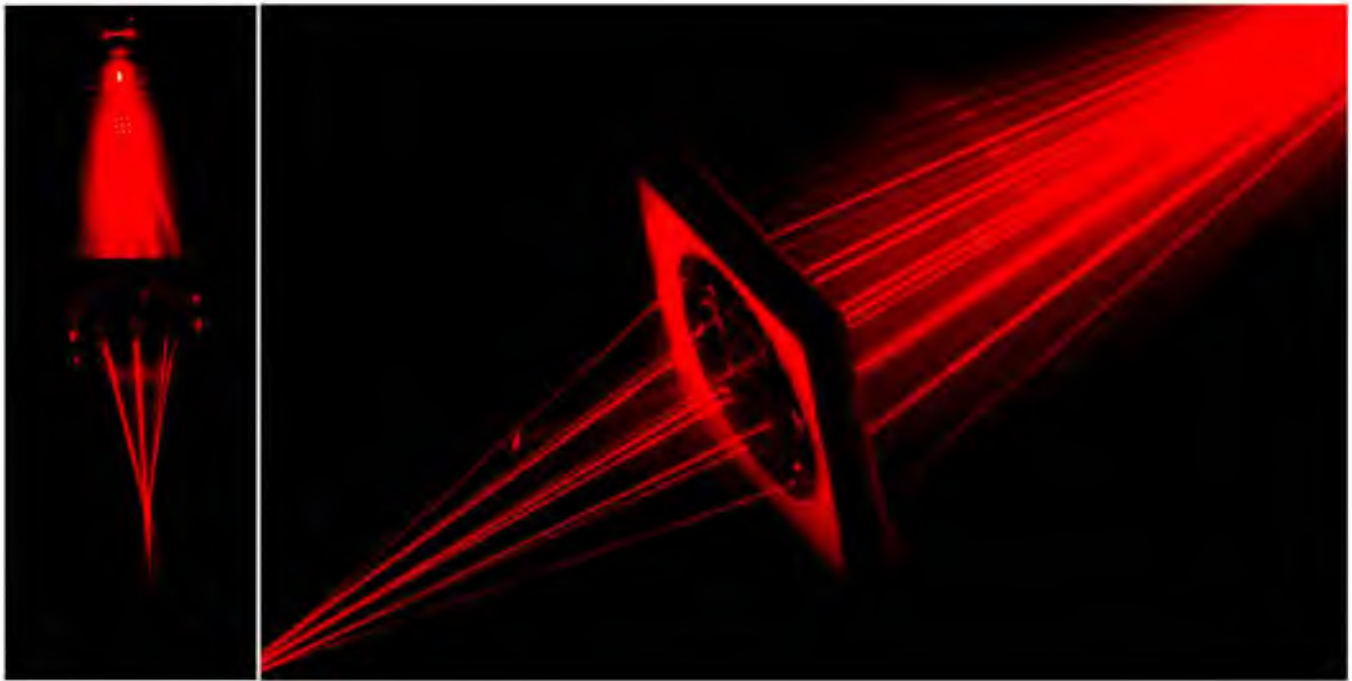


Рис. 1.3. Гомоцентричний пучок розбіжних лазерних світлових променів лінзою збираються у гомоцентричний пучок по другий бік від лінзи. Обидві світлини — вид з різних ракурсів.

чних систем є лінзи з сферичною поверхнею.

Найчастіше виготовляють оптичні лінзи з скла. Можуть використовуватися прозорі кристалічні, деякі керамічні, полімерні структури, інші *оптичні* матеріали, через які світло проходить без поглинання і розсіяння. Дешевшими у виготовленні є лінзи з органічного скла, але мають гіршу однорідність, чутливі до перепадів напруг, температур, механічних пошкоджень.

Застосування оптичних лінз з сферичними поверхнями зумовлене їх здатністю перетворювати гомоцентричний пучок світлових променів знов у гомоцентричний. З грецької "homos" — рівний, однаковий, єдиний; *гомоцентричний пучок світла* — це пучок світлових променів, що проходять через одну і ту ж точку простору. Всі промені світла, які вийшли з однієї точки перед лінзою будуть зібрані в іншій точці за лінзою, Рис. 1.3.

Головною оптичною віссю лінзи називають перпендикуляр спільний до обох сферичних поверхонь, промінь по центру лінзи Рис. 1.3. Побудови ходу променів у тонкій лінзі виконуються відносно головної оптичної осі та центру лінз O — перетину

лінзи ($d \rightarrow 0$) головною оптичною віссю. Зображення в лінзі традиційно виконують побудовою променів зліва на право. Ліва частина перед лінзою зветься *полем предмета*, права — *полем зображень*.

Кожній точка предмета має свою точку зображення за лінзою. Ці точки називають *спряженими*. Лінза "перетворює" точку предмета у спряжену їй точку зображення Рис. 1.3. *Точка предмета має єдину спряжену точку зображення*. Більше того, *плоска площина предмета нормальна до оптичної осі має спряжену у тонкій лінзі площину зображення!* Вся множина точок площини предмета нормальної (перпендикулярної) головній оптичній осі перед лінзою має спряжену їй єдину нормальну до оптичної осі площину чіткого фокусування за лінзою.

Кожна мала частина довільного фізичного тіла є джерелом світла, наближено є точковим джерелом випромінювання з свіченням у всі сторони. Тобто є гомоцентричним точковим джерелом випромінювання. *Активні джерела випромінювання*, такі як нитка розжарювання чи екран комп'ютера перетворюють інші види енергії в світлову. Кожна мала частина нитки розжарення чи пікселя екрана "світить" у всі сторони. *Пасивні джерела світла* відбивають падаюче на них випромінювання, здебільшого дифузно — рівноправно у всі боки "розкидують" світлові хвилі. Кожен предмет є множиною великої кількості гомоцентричних світлових точок.

Параксіальна геометрична оптика — це оптика малих кутів між світловими променями, між оптичною віссю і світловими променями. *Параксіальними* (з гр. *para* — біля, з лат. *axis* — вісь, параксіальний — приосьовий) називаються промені близькі до головної оптичної осі, а значить близькі (майже паралельні) один одному. Спряженість точок предмету і зображення у тонких лінзах виконується саме в *параксіальних променях*.

Більшість випадків використання лінзи відбувається у параксіальних пучках від далеких предметів. Далеке зображення предметів, множина точок їх активного чи пасивного випромі-

нювання, проектується на сітківку ока чи світлочутливу матрицю фото-, відеоапаратури. Зіниця ока, діаметр порядку 2-5 мм, разом з очним яблуком фокусують зображення віддалених предметів на сітківці ока. Відстань предмета найкращого бачення не менше 200 мм. Тобто у око попадає параксіальний пучок від точки зображення з кутом розбіжності менше 1° . Або навпаки, зображення плівки майже у фокусі лінзи проектується на велику відстань у кіно-, слайдопроекторах.

Для непараксіальних променів зображення в лінзах може бути спотвореним, розпливчастим або відсутнім. Практично вся і геометрична оптика, і хвильова оптика є параксіальною.

Формула тонкої збиральної лінзи, кардинальні точки тонкої лінзи. Предмет, xA на Рис. 1.4, переводиться лінзою у зображення, $x'A'$ рисунку. Сферичний фронт хвилі від точки предмета A , пунктирні криві рисунку перед лінзою, і розбіжні промені заломлені лінзою так, що за лінзою фронт хвилі знов сферичний, увігнуті пунктирні криві рисунку, промені зйдуться у точці предмета A' . Довільний сферичний фронт має точку збіжності променів, є фронтом гомоцентричного пучка світла.

У параксіальних променях, для заданої відстані s від предмета до лінзи, Рис. 1.4, існує спряжена площина чіткого зображення на деякій відстані s' від лінзи до екрана; відстані s і s' пов'язані формулою тонкої лінзи

$$\Phi = \frac{1}{f'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \quad (1.1)$$

При зміні відстані s змінюється відстань s' . Значення Φ не міняється, є сталим характеристичним параметром, має назву *оптичної сили лінзи*. Для побудови ходу світлових променів у лінзі і геометричних зображень використовують частіше не оптичну силу, а *фокусну відстань* f' .

З формули (1.1) випливає, що паралельний пучок світла, $s \rightarrow \infty$ ($1/s = 0$), збереться у площині, яку називають *задньою головною фокальною площиною*, ця площина перпенди-

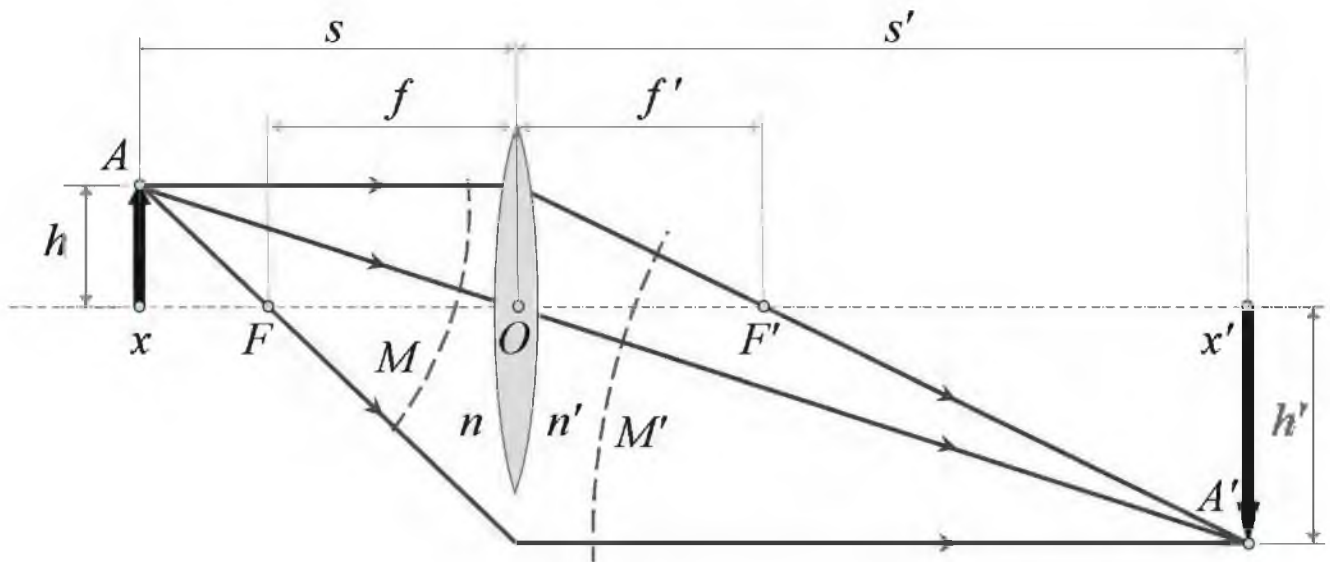


Рис. 1.4. Предмет і спряжене зображення предмета в тонкій лінзі. Розбіжні промені, позначені стрілками на них, від точки A предмета зійдуться у спряженій точці A' . Пунктирними кривими схематично зображені фронти хвиль. Фронт M розбіжної хвилі від т. A , після заломлення на поверхнях лінзи, змінює свою випуклість у іншу сторону — фронт M' .

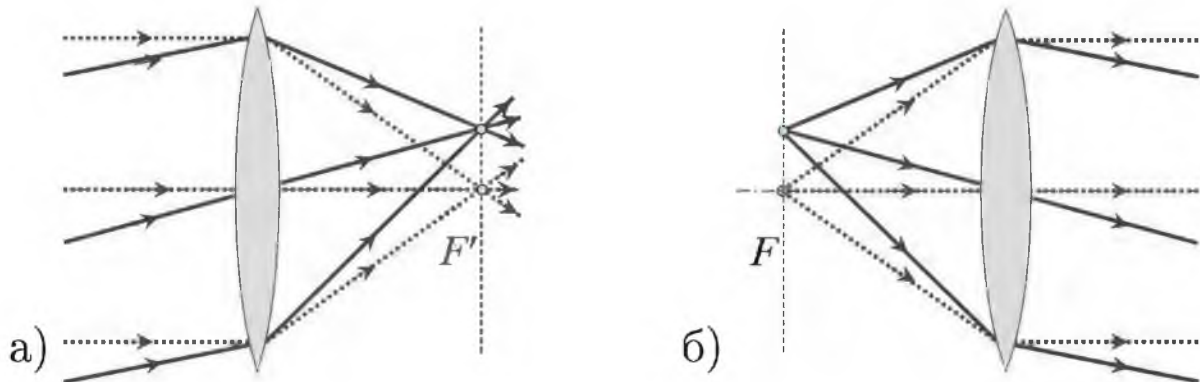


Рис. 1.5. а) Далекий предмет має спряжене зображення у фокальній площині F' . б) Плоский предмет у фокальній площині F має зображення на нескінченній відстані від лінзи.

кулярна до головної оптичної осі і знаходиться у т F' на відстані $s' \cong f' = \frac{1}{\Phi}$, Рис. 1.5, а. З лат. focus — осередок чого-небудь (сходження променів, епіцентр землетрусу, епідемії інше).

Якщо точкове джерело світла знаходиться у *передній фокальній площині предмета* F такій, що $s \cong f = \frac{1}{\Phi}$, то за лінзою світло зколімоване, стає потоком світла паралельних променів,

Рис. 1.5, б. *Колімованим* називають світло паралельних потоків, від лат. collіpeo - націлююсь. Потік світла світної точки фокальної площини перетворюється лінзою у паралельний пучок світла; кожна хвиля з точки фокальної площини має сферичний фронт перед лінзою і плоский фронт за нею.

Лінза перетворює точкове джерело світла головного фокусу у нескінченно віддалене! Одне з застосувань лінзи — формування направлених потоків світла, це рефлекторні лампи, прожектори, світильники рівномірного освітлення у оптичних установках з сферичними відбиваючими задніми поверхнями іноді з потокоформуючими системами лінз перед джерелом світла.

Точки F , F' називають *головними фокусами* тонкої лінзи. У цих точках знаходяться *фокальні головні площини* нормальні головній оптичній осі. Головні фокуси знаходяться на однаковій відстані $f = f'$ від лінзи у випадку однакових оптичних середовищ $n = n'$ по обидва боки від неї.

Площину тонкої лінзи називають *головною площиною*. Ця площина співпадає з т. О перетину головної площини головною оптичною віссю, Рис. 1.4. Т. О і головні фокальні точки F , F' називають *кардинальними точками* тонкої лінзи. У товстих лінзах і складних центрованих оптичних системах є дві спряжені головні площини, на відміну від тонкої лінзи.

Для побудов спряжених точок використовують в основному три промені, Рис. 1.4: 1) якщо промінь паралельний головній оптичній осі перед лінзою, то пройде через задній головний фокус F' ; 2) якщо промінь проходить через передній головний фокус F , то заломлюється лінзою так, що пройде паралельно головній оптичній осі за лінзою; 3) ще один промінь проходить через центр лінзи не міняючи напрямку при однакових оптичних середовищах по обидва боки лінзи $n = n'$, центр лінзи в околі т. О є плоскопаралельною пластинкою.

Оптична сила Φ , значення фокусних відстаней f f' залежать від радіусів кривини сферичних поверхонь лінзи і від показників заломлення матеріалу лінзи і середовищ по обидва боки лінзи. Менший радіус кривини сферичної поверхні зумовлює

більшу "силу" заломлення. При заданій відстані s , чим більша оптична сила, тим ближче знаходиться зображення (1.1). Вимірюється оптична сила в *діоптріях*. 1 *діоптрія* - це оптична сила лінзи з фокусною віддаллю $f = 1$ метр. Має позначення в діоптріях, 1 дптр = 1 м^{-1} , розмірність в обернених метрах. У використанні лінз мають застосування обидва параметри, і оптична сила, і фокусна відстань.

Дійсне перевернуте зображення в тонкій лінзі, $s > f$. З рівності кутів $\angle AOx = \angle A'Ox'$ подібних прямокутних трикутників AOx і $A'Ox'$, Рис. 1.4, випливає рівність $s/h = s'/h'$. Коефіцієнт поперечного збільшення зображення предмету у лінзі $\beta = h'/h = s'/s$. Формула тонкої лінзи (1.1) виражена через коефіцієнт збільшення β ,

$$f = \frac{s\beta}{1 + \beta} = \frac{s'}{1 + \beta}, \quad \beta = \frac{h'}{h} = \frac{s'}{s}; \quad (1.1')$$

перетворимо її

$$s = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f. \quad (1.1'')$$

З (1.1'') і (1.1) випливають співвідношення Табл. 1.1.

Табл. 1.1.

$s = f + 0$	$f < s < 2f$	$s = 2f$	$s > 2f$	$s \rightarrow \infty$
$s' \rightarrow \infty$	$s' > 2f'$	$s' = 2f'$	$f < s' < 2f'$	$s' = f' + 0$
$\beta \rightarrow \infty$	$\beta > 1$	$\beta = 1$	$\beta < 1$	$\beta \rightarrow 0$

- Максимальне збільшення $\beta \rightarrow \infty$ у випадку співпаданя предметної площини з фокальною $s = f + 0$ (тут "+0" означає, що $s \rightarrow f$ з боку значень $s > f$). За лінзою зколімований пучок світла, Рис. 1.5, б. Відношення величини скінченного зображення до предмета точкового розміру рівний нескінченності.

- Збільшення $\beta > 1$ для предмета на віддалі s більшій фокусної відстані f і меншій за подвоєну фокусну відстань $2f$, Рис. 1.4. Зображення дійсне, перевернене і збільшене.
- Збільшення відсутнє, $\beta = 1$, при віддалі предмета до лінзи рівній подвоєній фокусній відстані $s = 2f$, у такому разі $s' = 2f'$. Зображення дійсне, перевернене.
- Зображення дійсне, перевернене, зменшене, $\beta < 1$, за умови $s > 2f$. Таким буде хід променів обернений в протилежному напрямку до ходу зображеного на Рис. 1.4.
- Збільшення рівне нулю, якщо предмет на далекій віддалі $s \rightarrow \infty$ від лінзи, паралельний пучок світла збирається в "точці" у фокальній площині на віддалі $s' = f' + 0$, Рис. 1.5, б. Точка має мікроскопічні розміри світлової плями пояснюваної хвильовою оптикою.

Отже, при відстані від предмета до лінзи меншій подвійної фокусної відстані зображення буде збільшеним; при відстані від предмета до лінзи більшій подвійної фокусної відстані зображення буде зменшеним; при відстані між предметом і екраном меншою чотирьох фокусних відстаней $s + s' < 4f'$ (або $s + s' < 2f + 2f'$ при $n \neq n'$) зображення буде уявним, не вдасться отримати чітке дійсне зображення предмета.

Уявне зображення предмета в лінзі, $s < f$ У випадку $s < f$ буде виконуватися $\frac{1}{s} > \frac{1}{f}$, з формули тонкої лінзи $\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} < 0$ випливає, що предмет знаходиться на від'ємній відстані s' . Відстані тільки додатні, від'ємним може бути значення координати x' .

Перепишемо формулу тонкої лінзи (1.1) через координати

$$\Phi = \frac{1}{x_{F'}} = \frac{1}{-x} + \frac{1}{x'}. \quad (1.1')$$

Координата $x < 0$ — від'ємна, відстань $|xO| = s = -x$. Координата $x' > 0$ — додатна, відстань $|x'O| = s'$. Координати фокусних

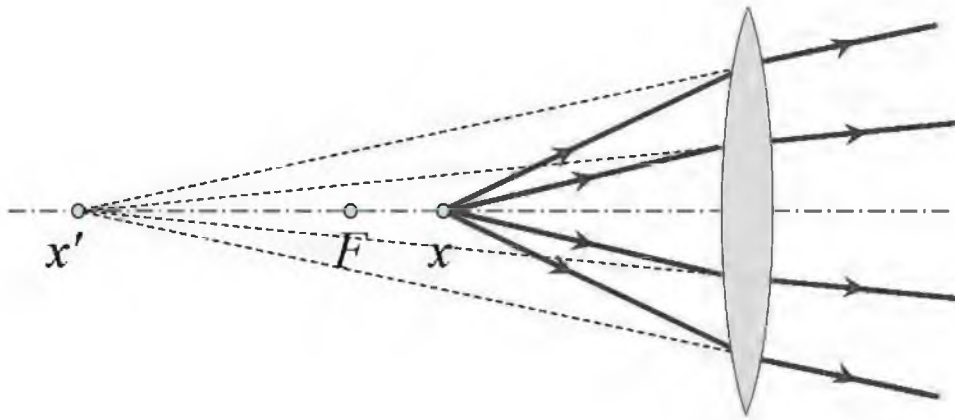


Рис. 1.6. Промені світла світної точки з координатою $x < 0$ перед збиральною лінзою на відстані меншій фокусної віддалі $|x| < |x_F|$, $x_F < x < 0$. $x' < 0$ — зображення уявне і знаходиться перед лінзою.

точок F і F' відповідно x_F і $x_{F'}$.

У випадку $s < f$ або $-x < -x_F$ зображення має від'ємну координату, знаходиться перед лінзою, є уявним. Уявне зображення не можна побачити. Воно знаходиться на перетині заломлених лінзою світлових променів, Рис. 1.6. Також уявним буде положення заднього фокусу $x_{F'} < 0$, знаходиться зліва від лінзи. У випадку однакових середовищ по обидві сторони лінзи $n' = n$ $x_{F'} = x_F$, фокальні площини співпадають. У координатах формула тонкої лінзи (1.1') краще піддається аналізу формування зображення, не "видає" ситуацій від'ємних віддалей, як з формулою (1.1).

Табл. 1.2.

$x = x_F + 0$	$x_F < x < x_F/2$	$x = x_F/2$	$x > x_F/2$	$x \rightarrow 0$
$x' \rightarrow -\infty$	$x' > x_F$	$x' = x_F$	$x' < x_F$	$x' \rightarrow 0$
$\beta \rightarrow \infty$	$\beta > 2$	$\beta = 2$	$1 < \beta < 2$	$\beta \rightarrow 1$

1.1.1 Заломлення променів світла сферичною поверхнею

Спряженість точки предмета і точки зображення

Заломлення світла на сферичних поверхнях відбуваються за законами геометричної оптики для світлових променів: прямолінійне поширення світлової хвилі; рівність кутів падіння на оптичну поверхню і відбивання; заломлення променя на межі оптичних середовищ по закону Снела. Оптичну густину середовища зліва від сф. поверхні означимо n , справа — n_0 .

У будові ходу світлового променя через сферичну межу оптичних середовищ, Рис. 1.7, дотримуються певних правил:

- Геометричну побудову променів починають виконувати зліва направо від від предмета до сферичної границі (лінзи). Зліва знаходиться *поле предмета*, справа — *поле зображення*. (геометрично зображення може бути як з правого боку від поверхні, так і з лівого).
- Вводять нормаль до сферичної поверхні, вісь Ox Рис. 1.7, з початком координат т. O на перетині осі з сферою, називають *вершиною* сферичної поверхні, вісь Ox *оптичною віссю*.
- Побудови виконуються в межах параксіальної оптики *параксіального* (з гр. παρα — біля, з лат. axis — вісь, параксіальний — приосьовий). Математично параксіальність виражається рівністю радіанної міри кута його тангенсу. Кут $i = \tan i = \sin i$, $i_0 = \tan i_0 = \sin i_0$, Рис. 1.7. i — кут падіння на сф. поверхнею, i_0 — кут заломлення. По закону Снела $n \sin i = n_0 \sin i_0$, для параксіальних променів,

$$n i = n_0 i_0. \quad (1.2)$$

- Дотримуються *правила знаків*: кути відкладені від оптичної осі за годинниковою стрілкою вважають додатними, проти годинникової стрілки — від'ємними; координати

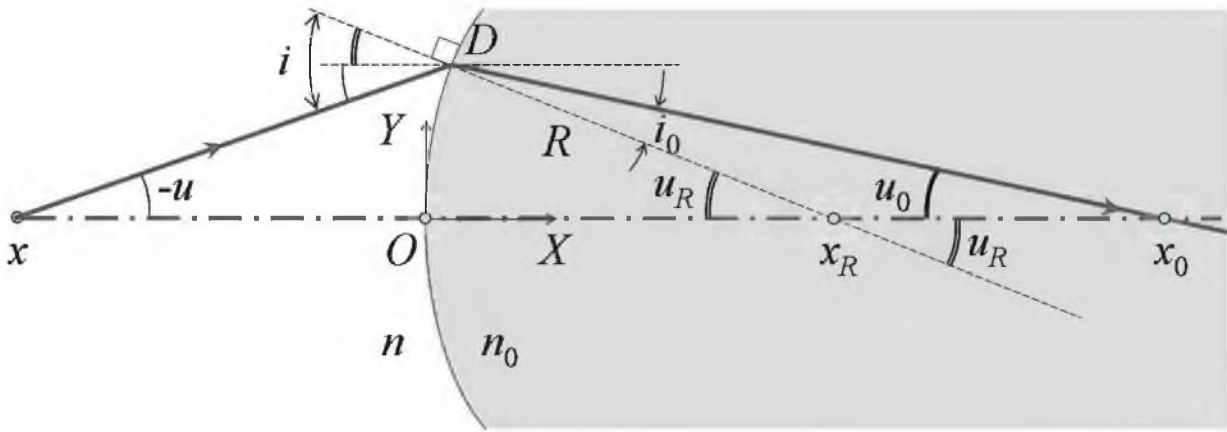


Рис. 1.7. Штрихпунктирна вісь xx_0 нормальна до сферичної поверхні. Падаючий на сферичну межу двох оптичних середовищ світловий промінь xD заломлюється по закону Снела, заломлений промінь Dx_0 . Всі інші позначення подані в тексті.

зліва від поверхні — від’ємні, справа — додатні. Правило знаків є відображенням вибору вершини системи координат співпадаючої з вершиною сф. поверхні. Відповідно, Рис. 1.7: координати $x < 0$, $x_0 > 0$, $x_R > 0$; кути $\angle Dx_0O = u_0 > 0$, $\angle Dx_RO = u_R > 0$, $\angle DxO = -u$, $u < 0$, $|\angle DxO| = -u$. Отже, віддаль від т. x до т. O рівна значенню координати взятої з протилежним знаком $|xO| = -x$, відстань $|x_0O| = x_0$. x_R — центр сферичної поверхні, віддаль $x_R = |Ox_R| = R$ рівна радіусу кривини сфер. поверхні. Нормаль з центра x_R сфери до т. D також є радіусом $|x_R D| = R$. i , i_0 означені на Рис. 1.7 подвійними стрілками, що означає величину кута, його модуль, тому $i > 0$, $i_0 > 0$.

У виконаній побудові ходу параксіального променя xD , Рис. 1.7, очевидно, що кут падіння $i = -u + u_R$ є сумою кутів $-u$ та u_R , кут заломлення $i_0 = u_R - u_0$ — різниця кутів u_R та u_0 . По закону Снела (1.2)

$$n(-u + u_R) = n_0(u_R - u_0), \quad (1.2')$$

перестановкою доданків

$$(n_0 - n)u_R = n(-u) + n_0u_0. \quad (1.2'')$$

З умови параксіальності $\tan u = u = y_D/x$ координати

$$y_D \ll x_R, -x, x_0, \quad u_R = y_D/x_R, \quad u = y_D/x, \quad u_0 = y_D/x_0.$$

і підстановкою кутів u_R, u, u_0 у (1.2'')

$$\Phi = \frac{n_0 - n}{x_R} = \frac{n}{-x} + \frac{n_0}{x_0}. \quad (1.3)$$

Величина $(n_0 - n)/x_R$, позначена Φ , названа *оптичною силою* заломлення променів сф.поверхнею. Φ залежить від оптичних параметрів n_0, n радіуса кривини сферичної поверхні R , не залежить від координат x, x_0 . Одиниця вимірювання оптичної сили — *діоптрій*, $[1 \text{ дптр}] = [1 \text{ м}^{-1}]$.

Для гомоцентричного пучка з центром випромінювання x існує єдина координата x_0 сходження заломлених променів. Тобто, для променя з іншим значенням кута $-u$ зміниться кут u_0 (1.2'), але координата x_0 перетину заломленого променя і оптичної осі залишається незмінною. Т. x_0 *спряжена* т. x_0 . Через оборотність ходу всі промені світлових хвиль з т. x_0 зійдуться в *спряженій* їй точці т. x .

Оптична сила Φ є характеристичним параметром заломлення світлових параксіальних променів монохроматичного світла сферичною поверхнею. Центр розходження променів світла x називають *точкою предмета*, спряжена їй точка x_0 — *точка зображення*.

Промені нескінченно віддаленої світної точки утворюють паралельний пучок променів. Світло віддаленого центру $-x \rightarrow \infty$, $1/x = 0$, Рис. 1.9, а, фокусується у т. $x_0 = \xi_0$ такій (1.3), що

$$\frac{n_0 - n}{x_R} = \frac{n_0}{\xi_0}.$$

Т. ξ_0 називають *заднім головним фокусом*, $|O\xi_0|$ — *задньою фокусною відстанню*.

У полі предмета існує *головний передній фокус* ξ ,

$$\frac{n_0 - n}{x_R} = \frac{n}{-\xi},$$

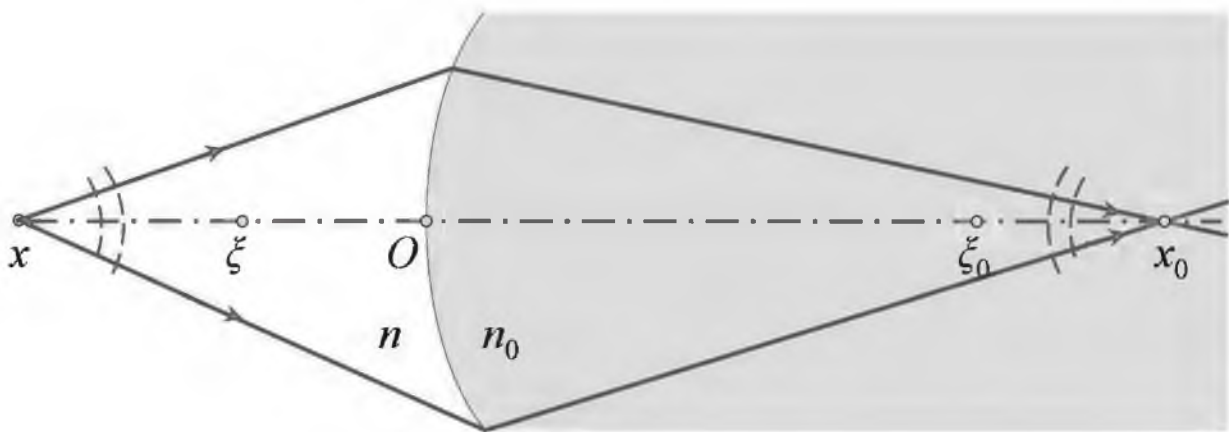


Рис. 1.8. Гомоцентричний пучок параксіальних променів з центром у т. x заломлюється сферичною межею у гомоцентричний пучок з центром у т. x_0 . Пунктирними лініями схематично наведені фронти хвиль розбіжності променів з т. x , і фронти променів сходження в т. x_0 . Далі з т. x_0 промені знов розходяться.

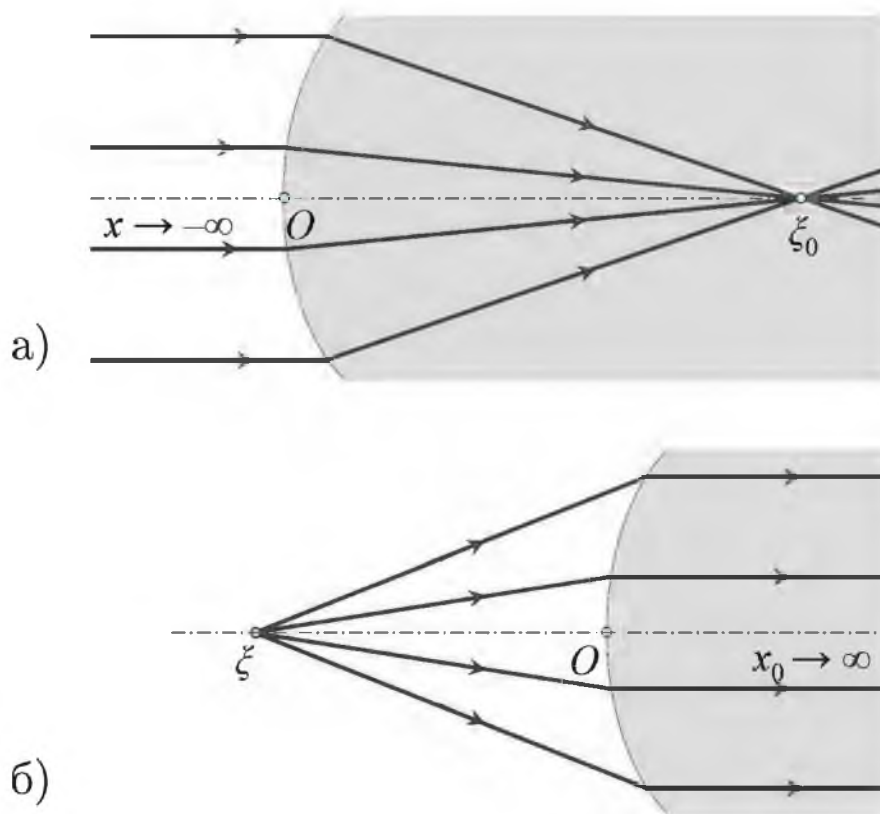


Рис. 1.9. а) Нескінченно віддалене точкове джерело, $x \rightarrow -\infty$, дає паралельний пучок світлових променів; сходження променів у задньому головному фокусі ξ_0 . б) Точкове джерело у передньому головному фокусі $x = \xi$, зображення на нескінченності $x_0 \rightarrow \infty$.

такий, що від нього заломлені промені у полі зображення паралельні, Рис. 1.9, б. Зображення $x_0 \rightarrow \infty$ знаходиться на нескінченності.

Формула спряженості точок предмету і зображення x , x_0 може бути задана через фокусні відстані від вершини заломлюючої поверхні до головних фокусів $|O\xi| = -\xi$, $|O\xi_0| = \xi_0$,

$$\Phi = \frac{n}{-\xi} = \frac{n_0}{\xi_0} = \frac{n}{-x} + \frac{n_0}{x_0}. \quad (1.3')$$

Оптична сила обернена до фокусних відстаней, фокусні відстані також є характеристичними параметри. Одна діоптрія — це оптична сила сферичної поверхні з фокусною віддалю в один метр при показнику заломлення рівному одиниці.

Спряженість площини предмета і площини зображення. Коефіцієнт збільшення

Помістимо плоский предмет перед сферичною поверхнею так, щоб площина предмета була перпендикулярною осі Ox . Для променя з довільної точки y площини предмета, Рис. 1.10, при умові параксіальності $|y_D|$, $|y|$, $|y_0| \ll |x_R|$, $|x|$, $|x_0|$,

$$-u = \frac{y_D - y}{-x}, \quad u_0 = \frac{y_D + y_0}{x_0}, \quad u_R = \frac{y_D}{x_R}.$$

Підстановками у (1.2'') і закону Снела для $n \frac{y}{-x} = n \varphi = n_0 \varphi_0 = n_0 \frac{-y_0}{x_0}$ у (1.2'') виконується та ж сама рівність (1.3) спряженості координат точки площини предмета і точки площини зображення.

Кожна точка з координатою $(x; y)$ площини перпендикулярної оптичній осі Ox є центром гомоцентричного пучка променів, який після заломлення на сфер. поверхні сходяться у $(x_0; y_0)$ спряженої площини, також перпендикулярної осі Ox . У площині з координатою x_0 буде чітке зображення предмета спряженої площини з координатою x .

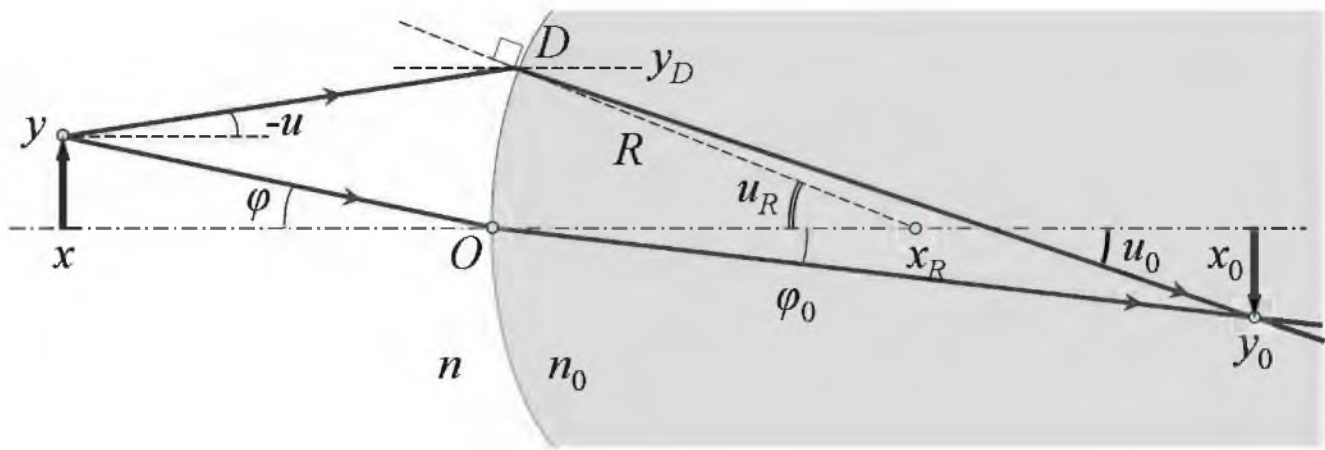


Рис. 1.10. Кожна предметна точка з координатами $(x; y)$ у площині предмета перпендикулярній осі Ox має спряжену точку $(x_0; y_0)$ у площині зображення. Площина зображення також перпендикулярна осі Ox .

З вершини сфери т. O предмет видний під кутом $\varphi = y/x$, зображення — під кутом $\varphi_0 = y_0/x_0$. Врахувавши закон Снела $n_0 \varphi_0 = n \varphi$, збільшення зображення предмета, фігурної стрілки на Рис. 1.10,

$$\beta = \frac{y_0}{-y} = \frac{x_0 \varphi_0}{-x \varphi} = \frac{n}{-x n_0} x_0. \quad (1.4)$$

Коефіцієнт збільшення β рівний відношенню поперечного розміру зображення до поперечного розміру предмета.

Формула тонкої лінзи

Позначимо: показник заломлення середовища зліва від лінзи — n , справа — n' , матеріалу лінзи — n_0 ; т. O — центр лінзи на головній оптичній осі перпендикулярній до сферичних поверхонь, Рис.1.11; координата центра радіуса кривини передньої опуклої сф. поверхні знаходиться справа від лінзи $x_R > 0$, задня поверхня має центр сфери у від'ємних значеннях координат $x_{R'} < 0$.

Світловий промінь з т. x під кутом $-u$ до головної оптичної осі падає на передню поверхню лінзи під кутом $i = -u + u_R$, кут заломлення $i_0 = u_R - u_0$ (1.2'') з "прицілом" пройти через т. x_0 , Рис.1.11, якби не заломився на задній сферичній поверхні. На задню поверхню лінзи промінь падає під кутом $i'_0 = -u_{R'} + u_0$, кут заломлення $i' = -u_{R'} + u'$. По закону Снела

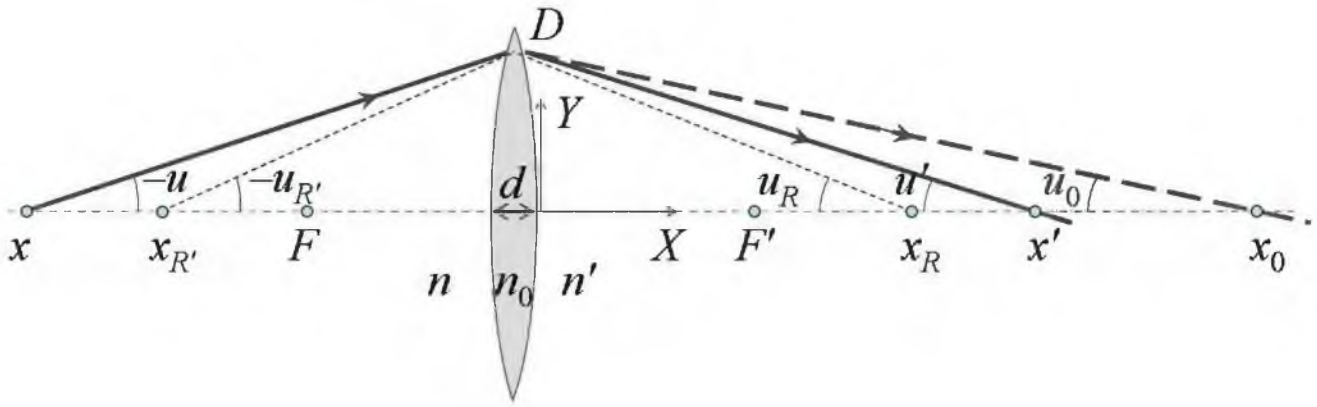


Рис. 1.11. Позначення кутів і координат розрахунку ходу променя світла через тонку лінзу.

$$\begin{cases} n(-u + u_R) = n_0(u_R - u_0) \\ n_0(-u_{R'} + u_0) = n'(-u_{R'} + u') \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n_0 - n)u_R - (n_0 - n')u_{R'} = -nu + n'u'.$$

В системі рівнянь позбулися однакового доданку n_0u_0 . Рівняння є формулою тонкої лінзи вираженою через кути ходу променя.

Вираженням кутів через координати

$$-u = \frac{y_D}{-x}, \quad u' = \frac{y_D}{x'}, \quad u_R = \frac{y_D}{x_R}, \quad -u_{R'} = \frac{y_D}{-x_{R'}},$$

формула тонкої лінзи

$$\Phi = \frac{n_0 - n}{x_R} + \frac{n_0 - n'}{-x_{R'}} = \frac{n}{-x} + \frac{n'}{x'}. \quad (1.5)$$

Оптичну силу доцільно виразити через координати головних фокусів $x_{F'}$, x_F таких, що

$$\Phi = \frac{n_0 - n}{R} + \frac{n_0 - n'}{R'} = \frac{n}{-x_F} = \frac{n'}{x_{F'}}. \quad (1.5')$$

$x_{F'}$ центр заднього сходження променів для падаючого паралельного пучка світла $x \rightarrow -\infty$. Промені переднього фокусу x_F дають зколімований (паралельний) пучок світла із зображенням на нескінченності $x' \rightarrow \infty$.

При заміні відповідних координат відрізками фокусних відстаней $f = |OF| = -x_F$, $f' = |OF'| = x_{F'}$, радіусів кривини поверхонь $R = |Ox_R| = x_R$, $R' = |Ox_{R'}| = -x_{R'}$, спряжених відстаней від лінзи до предмета і до зображення $s = |Ox| = -x$, $s' = |Ox'| = x'$,

$$\Phi = \frac{n_0 - n}{R} + \frac{n_0 - n'}{R'} = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{s'}. \quad (1.5'')$$

Фокусні відстані рівні $f = f'$ при однакових середовищах з обох боків від лінзи $n = n'$. Для лінзи в повітрі $n = n' = 1$

$$\Phi = (n_0 - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'}. \quad (1.5''')$$

Фокусні відстані вводяться для зручності геометричних побудов ходу променів у лінзі, співставлення оберненого параметру оптичної сили з характерними віддалями f , f' , можливого спрощення розрахунку оптичних систем чи наглядності таких розрахунків.

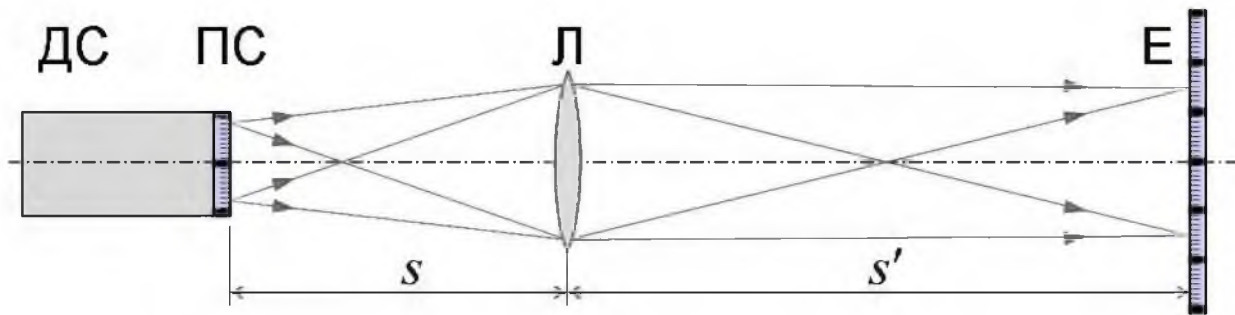


Рис. 1.12. Вдovж оптичної лави на штативах у рейтерах встановлені: світильник ДС з предметним склом ПС, лінза Л, екран з міліметровою шкалою Е.

1.1.2 Дослідження тонкої збиральної лінзи

На оптичній лаві розташовують оптичні елементи згідно Рис. 1.12: джерело світла і екран — на протилежних краях лави, між ними — лінза. Всі елементи наближено центрують на оптичній осі лінзи так, щоб головна оптична вісь лінзи проходила через центр предметної пластинки і центр екрана — перетин вертикальної і горизонтальної шкал на екрані.

Оптичні елементи закріплені на штативах, штативи встановлюються на лаві за допомогою рейтерів. Лава — масивна (металічна) довга рейка, тут використовується лава довжини 1,2 м, з направляючими краями для переміщення на ній рейтерів. Рейтер можна зміщати вздовж лави чи фіксувати положення на лаві бічними гвинтами в основі рейтера. Висота положення оптичного елемента над лавою регулюється положенням штатива і його закріпленням верхнім бічним гвинтом у рейтері.

Блок БП-1 живлення джерела світла вмикається на задній панелі корпусу, на передній панелі знаходиться ручка регулювання потужності випромінювання.

Предметна пластинка ПС встановлена на краю світильника, через неї проходить видиме випромінювання. Пластинка скляна, має матову поверхню повернуту до потоку випромінювання, на другій зовнішній стороні нанесений рисунок шкали з поділками. Ціна поділки становить 0,2 мм.

При потребі потрібно під'юстувати систему спочатку без лінзи: рейтер з екраном наближають до світильника і встановлю-

ють висоту так, щоб центр випромінювання світильника (предметного скла) і центр екрана співпадали; переміщують екран на протилежний кінець лави.

Лінзу встановлюють між світильником і екраном в положення чіткого зображення предмета на екрані, рейтер з лінзою фіксують на лаві. Правиться положення штатива з лінзою: відпускають гвинт вверху рейтера; штатив з лінзою переміщують вверх чи вниз до накладання зображення предмету в центрі екрана; фіксують штатив в рейтері. Для зручності користування шкалою екрана юстують (направляють) положення лінзи так, щоб шкала предмета була трохи вище шкали екрана.

Лінза знаходиться в металевій товстій оправі, головна площина лінзи може не співпадати з центром оправі. На оправі зовні є мітка у вигляді чорної лінії, вказує справжнє положення лінзи. При знаходженні віддалі лінзи до інших предметів потрібно вимірювати відстань до мітки на оправі.

Для роботи використовують лінзу 5 з діафрагмою (від грец. *διάφραγμα* — перегородка) — пластинка на оправі з отвором навпроти центра лінзи, що обмежує ширину пучка світла. Діафрагма знаходиться з боку протилежного джерела світла, обмежує кількість світла, зате контраст зображення вищий через зменшення сферичних аберацій.

1. Джерело світла і екран розміщують на протилежних кінцях лави, вмикають живлення джерела. Лінзу 5 з діафрагмою встановлюють ближче до випромінювача. Центрують оптичну систему, отримують чітке збільшене зображення предмета на екрані.
2. За шкалою лави чи рулеткою визначають віддаль між предметом і лінзою s та віддаль між лінзою і екраном s' . Оцінюють точність виміряних відстаней Δs , $\Delta s'$. Похибка вимірів більша або рівна 3 мм, що зумовлено особливістю кріплення лінзи в оправі, предметного скла у світильнику. Обчислюють оптичну силу лінзи Φ і фокусну відстань f' (1.1), оцінюють точність обрахунків $\Delta\Phi$, Δf . Дані заносять у Табл. 1.3.

Табл. 1.3.

$s, \text{м}$	$s', \text{м}$	$\Phi, \text{м}^{-1}$	$\Delta\Phi, \text{м}^{-1}$	$f, \text{м}$	$\Delta f, \text{м}$	$h, \text{м}$	$h', \text{м}$	β	$\Delta\beta$

3. Вибирають частину предмета ширини h таку, щоб його зображення було чітким і в межах екрана ¹ Знімають значення ширини зображення предмета h' по міліметровій шкалі екрана. Похибка $\Delta h' = 1$ мм зумовлена половиною ціни поділки 0,5 мм на кожному краю ширини h' . Обчислюють коефіцієнт збільшення β , точність обрахунків. Дані заносять у Табл. 1.3.
4. Досліди зі збільшеним зображенням предмета.
 - (а) Переміщують екран на 10 см ближче до джерела світла, лінзу зміщують до отримання збільшеного і максимально чіткого зображення на екрані. Відстань $L = s + s'$ між спряженими площинами буде на 10 см меншою ніж у попередньому досліді. Виконують пункти 2, 3 вимірювання s , s' , h , h' , виконання обрахунків

¹На краях екрана чіткість зображення може бути гіршою через кривизну поля зображення — один із проявів абераций тонкої лінзи.

характеристичних параметрів, оцінки точності їх знаходження.

- (b) Повторюють попередній пункт 4 та пункти 2, 3 багатократно, кожного разу зменшують L на 10 см до досягнення відстані між спряженими площинами $4f < L < 5f$.

5. Досліди зі зменшеним зображенням предмета.

- (a) Не міняючи відстань L між предметом і екраном, $4f < L < 5f$, переміщують лінзу ближче до екрана, отримують зменшене чітке зображення предмета. Повторюють пп. 2, 3.
- (b) Переміщують екран на 2 см далі від світильника, лінзу встановлюють ближче до екрана в положення чіткого зменшеного зображення, виконують пп. 2, 3. Повторюють виконання даного пункту, кожен раз збільшуючи відстань L між екраном і предметом на 2 см, не менше 4 раз.

6. Обробка результатів вимірювань.

- (a) Порівнюють отримані значення фокусної відстані, роблять висновки. Знаходять середнє значення \bar{f} фокусної відстані за отриманими даними.
- (b) Будують точковий графік залежності β від безрозмірної відстані між лінзою і екраном $x = s/\bar{f}$. Побудову виконують на міліметровому папері або в довільному графічному пакеті. Порівнюють отримані дані з Табл. 1.1.

Параметр f знаходять не прямим вимірюванням, по формулі (1.1). Точність знаходження фокусної відстані зумовлена похибками Δs , $\Delta s'$. Оцінюють похибку непрямого вимірювання застосуванням диференціалів: диференціюють (1.1),

$$d\Phi = -\frac{df}{f^2} = -\frac{ds}{s^2} - \frac{ds'}{s'^2},$$

сумують абсолютні значення часткових приростів

$$\Delta\Phi = \left| \frac{\Delta f}{f^2} \right| = \left| \frac{\Delta s}{s^2} \right| + \left| \frac{\Delta s'}{s'^2} \right|; \quad \Delta f = f^2 \left(\frac{\Delta s}{s^2} + \frac{\Delta s'}{s'^2} \right).$$

Застосовують геометричну суму часткових приростів

$$\Delta\Phi = \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s^2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta s'}{s'^2} \right)^2}; \quad \Delta f = f^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s^2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta s'}{s'^2} \right)^2}.$$

Збільшення $\beta = \frac{h'}{h}$ (1.1'), застосуванням диференціювання $d\beta = d\left(\frac{h'}{h}\right) = \frac{1}{h} dh' - \frac{h'}{h^2} dh$. Перший доданок є частковим диференціалом по h' , $\frac{\partial\beta}{\partial h'} = \frac{\partial}{\partial h'} \left(\frac{h'}{h}\right) = \frac{1}{h}$; другий — по h , $\frac{\partial\beta}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{h'}{h}\right) = -\frac{h'}{h^2}$. Для оцінки похибки сумують модулі часткових похідних

$$\Delta\beta = \frac{1}{h} \Delta h + \frac{h'}{h^2} \Delta h' = \beta \left(\frac{\Delta h'}{h'} + \frac{\Delta h}{h} \right),$$

або використовують геометричну суму

$$\Delta\beta = \sqrt{\left(\frac{1}{h} \Delta h' \right)^2 + \left(\frac{h'}{h^2} \Delta h \right)^2} = \beta \sqrt{\left(\frac{\Delta h'}{h'} \right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h} \right)^2}.$$

Знаходження характеристик тонкої лінзи методом Бесселя

1. Лінзу 5 і екран розміщують на такій відстані від світильника, щоб зображення було наближено в півтора рази більшим за предмет, $\beta \approx 1,5$. Фіксують бічними гвинтами положення рейтерів з світильником і екраном. Міряють віддаль L між екраном і предметним склом. Між предметом і лінзою віддаль s , від лінзи до екрана — s' , $L = s + s'$.
2. Невеликими зміщеннями лінзи перевіряють максимальну чіткість зображення. Нотують положення рейтера з лінзою x_1 по шкалі лави.
3. Переміщують лінзу до екрана, до появи чіткого зменшеного зображення, нотують положення x_2 , обчислюють $l = |x_2 - x_1|$.
4. Обчислюють фокусну відстань f і оптичну силу Φ за формулою (1.6), оцінюють похибки Δf , $\Delta \Phi$, порівнюють отримані результати з даними попередніх дослідів.

Перше положення лінзи подібне зображенню Рис. 1.4. Після переміщення на відстань l ближче до екрана з чітким зображенням реалізується "обернений" хід променів — відстань від світильника до лінзи рівна s' , відстань від лінзи до екрана s .

Реалізується наступна система рівнянь з вирішенням відносно шуканих s і s' :

$$\begin{cases} L = s + s' \\ l = s' - s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s' = (L + l)/2 \\ s = (L - l)/2 \end{cases}$$

Підстановкою $s(l, L)$, $s'(l, L)$ в рівність (1.1)

$$\Phi^{-1} = f = \frac{L^2 - l^2}{4L}. \quad (1.6)$$

Знаходження оптичної сили тонкої розсіювальної лінзи

Розсіювальна лінза перетворює паралельний пучок світлових променів у розбіжний з фокуса F' , який знаходиться перед лінзою, Рис. 1.13, а. Координата головного фокуса $x_{F'} < 0$. Оптична сила розсіювальної лінзи від'ємна $\Phi = \frac{1}{f} x_{F'} = \frac{1}{f} - f' < 0$, (1.5''). Зображення у лінзі уявне, пряме і зменшене не залежно від положення предмету перед лінзою, Рис. 1.13, б. Уявне зображення не можна побачити візуально.

Розсіювальні лінзи застосовують у оптичних системах. Якщо потрібно порівняно невелике збільшення у оптичній системі компактного розміру з прямим (не переверненим) зображенням, як у театральних біноклях, то використовується принцип роботи зорової труби Галілея з розсіювальною окулярною лінзою, Рис. 1.14. Розсіювальні лінзи також використовуються у склейці складних об'єктивів для уникнення різного типу аберацій, підвищення якості зображення.

Уявне зображення у розсіювальній лінзі можна перетворити в явне, якщо разом з нею встановити збиральну лінзу з оптичною силою по модулю більшою за модуль оптичної сили розсіювальної лінзи, Рис. 1.15. Для реалізації експерименту оптична сила "стягування" променів світла збиральної лінзи повинна бути більшою за оптичну силу "розкидування" променів розсіювальною лінзою.

1. Світильник з предметною пластинкою встановіть на краю лави, екран приблизно по середині лави навпроти світильника — центр екрана навпроти центру світильника. Збиральну фокусну лінзу 4 розмістіть між лавою і екраном з максимально чітким зображенням (спряжені предмет і площина екрана). Закріпіть рейтер з лінзою нерухомо. Занотуйте віддаль L між лінзою 4 і екраном.
2. Екран перемістіть на край лави, закріпіть його положення. Між збиральною лінзою і екраном встановіть розсію-

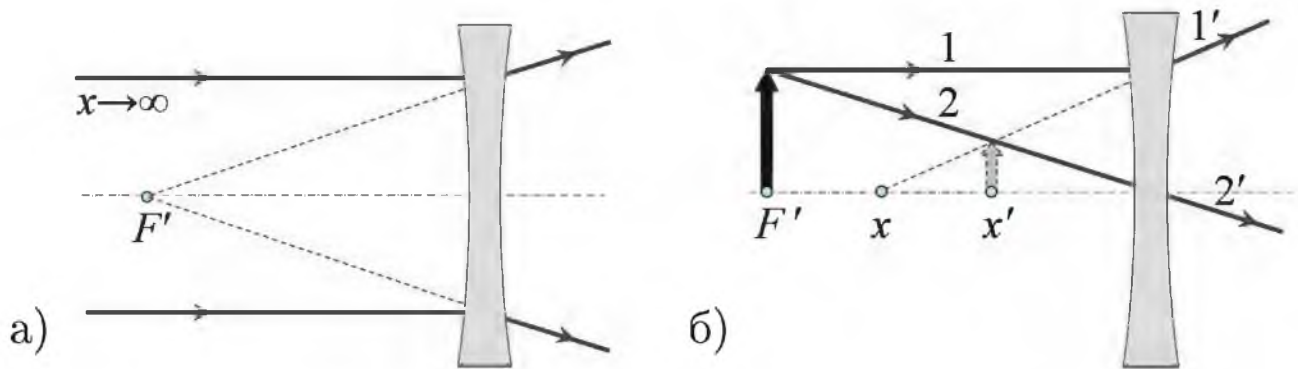


Рис. 1.13. Розсіювальна лінза: а) хід променів колімованого пучка світла. б) зображення уявне, пряме, зменшене.

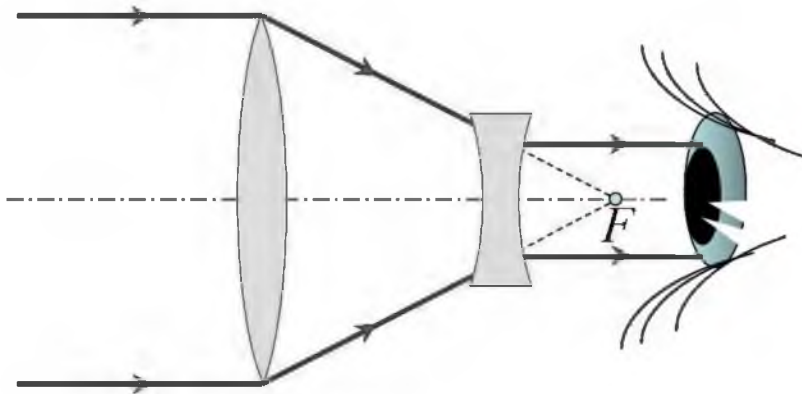


Рис. 1.14. Труба Галілея візуально наближає зображення предмета, збільшує його. Обидві лінзи мають спільний фокус, т. F .

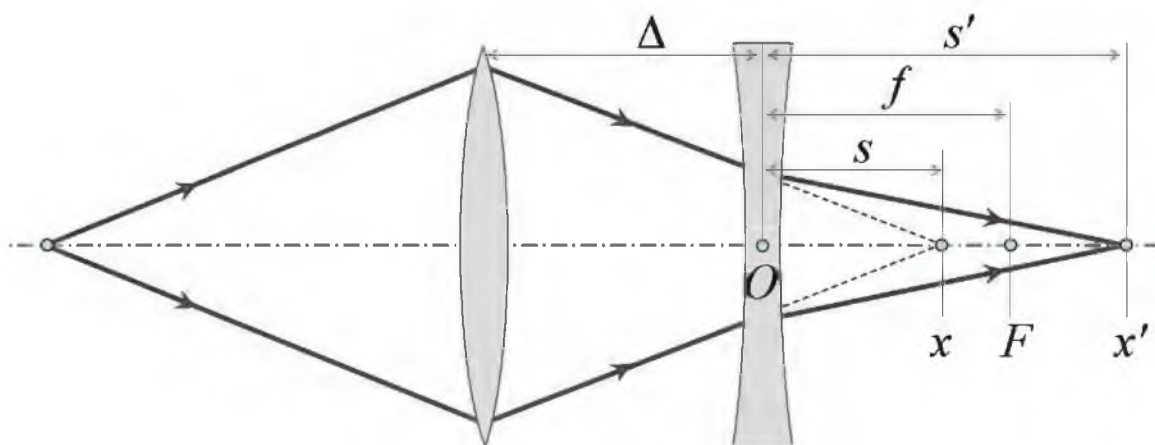


Рис. 1.15. Збиральна лінза створює дійсне зображення у площині з координатою x , яке є уявним "предметом" у розсіювальній лінзі. Розсіювальною лінзою "предмет" перетворюється у дійсне зображення з коорд. x' .

вальну лінзу 13, від'юстуйте положення і висоту лінзи до чіткого зображення в центрі екрана. Поміряйте віддаль s' від лінзи 13 до екрана і віддаль Δ від лінзи 13 до лінзи 4. Збиральна лінза дає явне зображення предмета у площині з координатою x на оптичній осі. Це зображення є уявним "предметом" для розсіювальної лінзи, що перетворює його у явне зображення в площині з координатою x' . Віддаль від уявного предмету до розсіювальної лінзи $s = L - \Delta$.

3. Точка O — положення тонкої розсіювальної лінзи. При виборі початку координат в т. O всі наступні координати додатні: $x = s = L - \Delta > 0$, $x' = s' > 0$, фокусна відстань $f > 0$. Підстановкою у (1.5'')

$$\Phi = \frac{1}{-s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{-f} \quad (1.7)$$

Оптична сила Φ розсіювальної лінзи від'ємна. Обчисліть фокусну відстань f і оптичну силу Φ лінзи 13, оцініть похибки.

Створення колімованого світлового потоку

1. На краю лави встановіть світильник з потоком світла вздовж лави. Обов'язково потужність світла зменшіть до мінімуму поворотом ручки на блоці живлення! Перед світильником впритул встановіть сірий світлофільтр для додаткового зменшення інтенсивності світла. Перед світильником встановіть збиральну лінзу 7. За світильником, на довільній відстані, встановіть зорову трубу. Перевірити, що оптичний прилад є зоровою трубою можна розгляданням далеких предметів чи предметів за вікном, в чіткому візуальному спостереженні.
2. Всі оптичні елементи повинні бути на одній осі. Потік світла у зоровій трубі повинен бути не надмірним по інтенсивності для безпечного візуального огляду. Спостерігаючи у зорову трубу предметне скло на світильнику і переміщаючи рейтер з лінзою 7, добийтеся максимально виразного бачення предметного скла. Закріпіть рейтер з лінзою. У такому положенні предметне скло знаходиться у фокусі лінзи. Розбіжний пучок світла від кожної предметної точки розходить і трансформується лінзою у паралельний пучок світла, Рис. 1.5, б. Зображення предмета направляється на нескінченність. У зорову трубу спостерігаємо далеке зображення.
3. Переміщаючи зорову трубу перевірте, що збільшення зображення і контраст не міняються, не залежать від дистанції труби до лінзи.
4. Поміряйте віддаль лінзи 7 до предметного скла, це є фокусна відстань лінзи.

Зколімований пучок світла використовується для налаштування різних типів осецентрованих оптичних схем геометричної оптики, є основою формування світлового потоку від освітлювачів різних типів оптичних установок.