Оптимальні стратегії в задачах керуванння стохастичними клітинними автоматами

Виконав: студент 2-го року навчання
Случинський Дмитро Юрійович

Керівник: Чорней Р.К., кандидат фіз.-мат. наук, доцент

7 червня 2024

Задачі дослідження

- Розробка математичної моделі: створити математичну модель поширення лісових пожеж на основі клітинних автоматів.
- Програмна реалізація: розробити програмний застосунок на мові Python для симуляції поширення лісових пожеж та тестування різних стратегій управління.
- Порівняння глобальних і локальних стратегій: порівняти ефективність глобальних і локальних стратегій управління.
- Розробка і тестування альтернативних стратегій: дослідити альтернативні стратегії, такі як гасіння всіх палаючих клітин або запобігання поширенню пожежі шляхом гасіння суміжних живих клітин.

Система стохастичних клітинних автоматів

$G = (V, B)$ — скінченний неорієнтований граф, де $V = \{1, 2, \dots S\}$ — множина клітинних автоматів

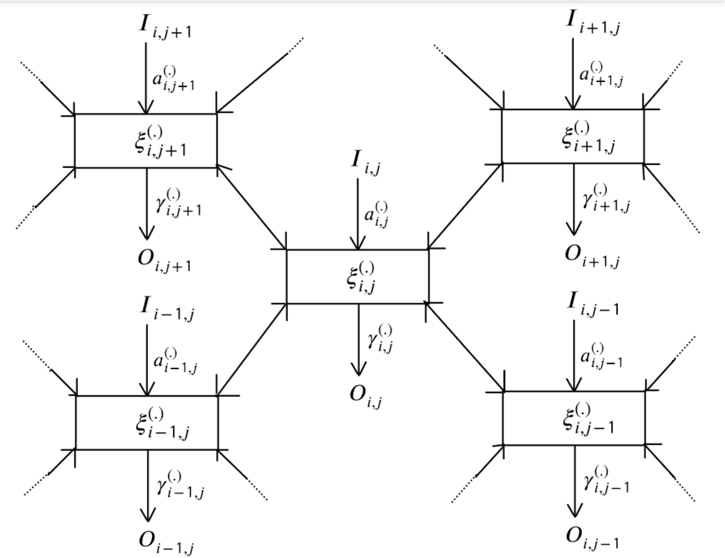
$N(i) = \{j \in \{1, 2, \dots S\} \setminus \{i\} \mid (i, j) \in B\}$
— множина сусідніх автоматів

$\xi_i^t = x_i \in X_i, |X_i| < \infty$ — множина станів автомата i

$\xi = ((\xi_i^t : i \in V) : t \in N)$ — процес зміни станів системи

$\gamma = ((\gamma_i^t; i \in V) : t \in N)$ — вихідний процес

$a_i^t = y_i \in I_i, |I_i| < \infty$ — набір вхідних сигналів(керування)
$O_i, |O_i| < \infty$ — набір вихідних сигналів


$I_{i,j+1}$
$a^{(.)}_{i,j+1}$
$\xi^{(.)}_{i,j+1}$
$\gamma^{(.)}_{i,j+1}$
$O_{i,j+1}$
$I_{i+1,j}$
$a^{(.)}_{i+1,j}$
$\xi^{(.)}_{i+1,j}$
$\gamma^{(.)}_{i+1,j}$
$O_{i+1,j}$
$I_{i,j}$
$a^{(.)}_{i,j}$
$\xi^{(.)}_{i,j}$
$\gamma^{(.)}_{i,j}$
$O_{i,j}$
$I_{i-1,j}$
$a^{(.)}_{i-1,j}$
$\xi^{(.)}_{i-1,j}$
$\gamma^{(.)}_{i-1,j}$
$O_{i-1,j}$
$I_{i,j-1}$
$a^{(.)}_{i,j-1}$
$\xi^{(.)}_{i,j-1}$
$\gamma^{(.)}_{i,j-1}$
$O_{i,j-1}$

Тоді:

$$Q_i(x_i, x_j : j \in N(i), y_i; \tilde{x_i}, O_i) =$$
$$= \Pr(\xi_i^{t+1} = \tilde{x_i}, \gamma_i^{t+1} = O_i \mid a_i^t = y_i, \xi_i^t = x_i, \xi_j^t = x_j : j \in N(i))$$

Функція витрат

$r(\xi_i^t, a_i^t) \geq 0$ — однокрокові витрати для автомата (i)
в стані ξ_i^t та вхідного сигналу a_i^t в момент часу t
Тоді:
$R^t = \sum_{i=1}^{S} r(\xi_i^t, a_i^t)$ — сукупна функція витрат, а
$R = \sum_{t=0}^{T} R^t$ — сукупна функція витрат за весь час

Означення

$\delta = (\delta_i^t : i \in V)$ — стратегія
$h_i^t = (x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^t)$ — історія станів для автомата i
$\tilde{N}(i) = N(i) \cup i$ — повний окіл автомата i
$\delta_i^{t-1} = (a_i^0, a_i^1, \dots, a_i^{t-1}), a_i^k \in I_i$ — попередні прийняті рішення в момент часу t

Імовірність

Тоді ймовірність отримати сигнал $a_i^t = y_i \in I_i$:

$$\Pr(a_i^t = y_i \mid \xi_j^0 = x_j^0 : j \in \tilde{N}(i), a_i^0 = y_i^0, \xi_j^1 = x_j^1 : j \in \tilde{N}(i), a_i^1 = y_i^1, \dots, \xi_j^{t-1} = x_j^{t-1} : j \in \tilde{N}(i), a_i^{t-1} = y_i^{t-1}, \xi_j^t = x_j^t : j \in \tilde{N}(i)) =$$
$$= \Pr(a_i^t = y_i^t \mid h_{\tilde{N}(i)}^t, \delta_i^{t-1})$$

Властивості

Марковість

Якщо стратегія буде залежати тільки від поточного стану та його околу, тобто повного околу, така стратегія буде марківською:
$\mathrm{Pr}(a_i^t = y_i^t \mid h^t_{\tilde{N}(i)}, \delta_i^{t-1}) = \mathrm{Pr}(a_i^t = y_i^t \mid \xi_j^t = x_j : j \in \tilde{N}(i))$

Стацонарність

Якщо імовірність вибору стратегії для конкретного стану автомата незалежить від часу, то таку стратегія буде стаціонарною допустимою:
$\mathrm{Pr}(\cdot \mid \xi_j^{t'} = x_j : j \in \tilde{N}(i)) = \mathrm{Pr}(\cdot \mid \xi_j^{t''} = x_j : j \in \tilde{N}(i)), \forall t' \neq t''$

Детермінованість

Якщо для всіх станів автомата та його околу його сигнал обирається однозначно, так допустимі стаціонарні стратегії є детермінованими:
$\mathrm{Pr}(\cdot \mid \xi_j^t = x_j : j \in \tilde{N}(i)), \forall x_i \in X_i$ — одноточкова міра

Критерій

Для оцінки стратегії будемо знаходити очікувані середні витрати на одиницю часу:
$Q_T^\delta(y) := E_y^\delta \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T r(\xi_t, \delta^t) = E_y^\delta \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T r(\xi_t, \delta^t(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^t))$
Тоді задачею керування є мінімізація цих витрат:
$R_y^\delta = \mathsf{lim}_{T\to\infty} \mathsf{sup}\, Q_T^\delta(y)$

Ключова теорема

Теорема 1 [1]

Розглянемо керований процес (ξ, δ) з локально взаємодіючими синхронними компонентами відносно до графа взаємодії $\Gamma = (\mathrm{V}, \mathrm{B})$ з кінцевим простором станів X для ξ і кінцевим простором керувань A. Нехай множини допустимих дій $\mathrm{A}_\mathrm{t}(\cdot)$ не залежать від t. Тоді в класі $\mathcal{LS}_\mathrm{P}$ допустимих детермінованих локальних стратегій існує оптимальна стратегія яка належить до класу $\mathcal{LS}_\mathrm{P}$ стаціонарних марковських детермінованих політик.

Покращення стратегії

Теорема 2 [2]

Процес еволюції системи синхронних локально взаємодіючих стохастичних клітинних автоматів ергодичний і його єдиний граничний та стаціонарний розподіл $\pi^\delta = (\pi^\delta(\phi_k) : k = 1, 2 \ldots, n)$ такий, що:

$$\pi^\delta(\phi_k) = \pi^\delta(x_1, x_2, \ldots, x_S) = \prod_{i=1}^{S}(\frac{(1 - p(x_i, y_i))}{p(x_i, y_i)})G(\phi_k)^{-1}$$

,де $p(x_i, y_i)$ ймовірність i-го клітинного автомата залишитись в стані x_i, якщо на вхід був поданий сигнал y_i, $G(\phi_k)$ — нормуюча константа, ϕ_n стан системи, n - кількість можливих станів системи.

Покращення стратегії

Процес покращення стратегії наступний [2]:

1

Оберемо довільну стратегію δ та розглянемо невідому функцію $v = (v(\phi_k) : k = 1, 2, \ldots, n)$ яка задовольняє умови:

1) $R^{\delta}_{\phi_k} + v(\phi_k) = r(\phi_k, \delta_k) + \sum_{i=1}^{n} Q(\phi_i \mid \phi_k, \delta_k) v(\phi_k), k = 1, 2, \ldots, n$

2) $\sum_{k=1}^{n} \pi^{\delta_k}(\phi_k) v(\phi_k) = 0$

2

Для кожного $k = 1, 2, \ldots, n$ визначимо A_k як множину рішень δ^*_k, що задовольняє:

1) $\sum_{i=1}^{n} Q(\phi_i \mid \phi_k, \delta^*_k) R^{\delta}_{\phi_k} = R^{\delta}_{\phi_k}$

2) $r(\phi_k, \delta^*_k) + \sum_{i=1}^{n} Q(\phi_i \mid \phi_k, \delta^*_k) v(\phi_k) < r(\phi_k, \delta_k) + \sum_{i=1}^{n} Q(\phi_i \mid \phi_k, \delta_k) v(\phi_k) = R^{\delta} + v^{\delta}(\phi_k)$

Покращення стратегії

3

Для всіх можливих станів системи ϕ_k, для яких множина A_k непорожня, змінюємо керування δ^* на $\delta_k^* \in A_k$, таким чином формуючи нову стратегію δ^*. Повторюємо процедуру покращення. Якщо ж $\forall k = 1, 2, \ldots, n : A_k = \varnothing$, то стратегія δ^* є оптимальною.

Ліс

Стани та керування

Кожна клітина на сітці є частиною лісу і має один зі станів: Alive (живий), Fire (горить) або Burnt (згорів). Їм відповідає зелений, червони, сірий кольори відповідно.
Множиною рішень для кожної клітини є Extinguish (гасити), Leave (залишити).

Винагороди та ймовірності

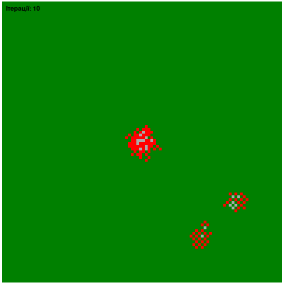
Знаходження в станах Fire та Burnt завдає збитків.
Задані ймовірності переходу між станами які залежать від станів сусідніх клітин та обраного керування.

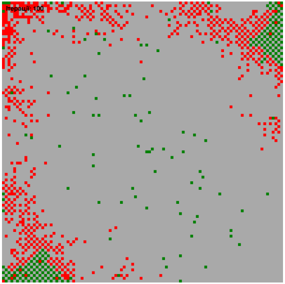
Поширення без керування

Рис.: iterations = 10

Рис.: iterations = 50

Рис.: iterations = 100



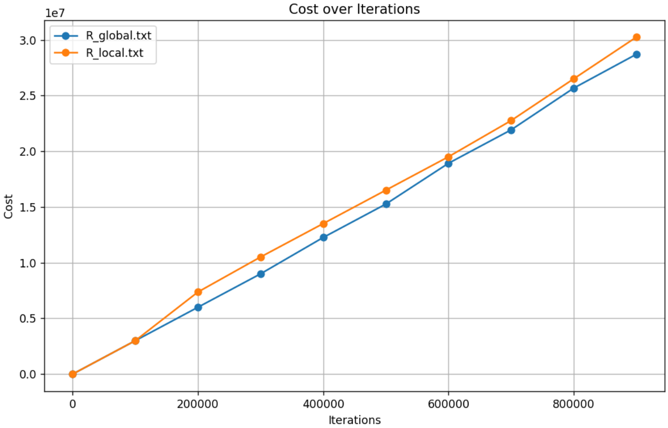


Мета

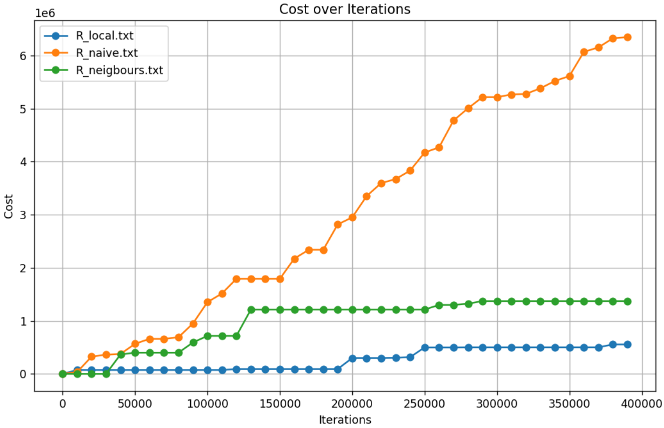
Метою є знаходження оптимального стратегії керування поширенням пожежі.
Можливі типи стратегій.

- Глобальні. Велика кількість розрахунків.
- Локальні. Менша кількість розрахунків. Не обов'язково приводить до глобального мінімуму.

Порівняння локальних та глобальних стратегій



Порівняння різних типів стратегій



Висновки

Проведене порівняння ефективності глобальних та локальних стратегій управління показало, що глобальні стратегії, враховуючи стан всієї системи, значно ускладнюють розрахунки для великих систем. Натомість локальні стратегії спрощують обчислення, базуючись на стані окремих клітин та їх найближчих сусідів. Локальні стратегії можуть бути ефективними для мінімізації сукупних витрат, особливо в умовах великих систем, де глобальні стратегії стають непрактичними.

Література I

[1] R. K. Chornei, H. Daduna, P. S. Knopov., Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications, Boston/Dordrecht/London: Springer, 2006. — 261

[2] Daduna H, Some results for steady-state and sojourn time distributions In open and closed linear networks of Bernoulli servers with statedependent service and arrival rates. Performance Evaluation, 1997. Vol. 30. no. 1

[3] Almeida R. M.. Macau E, Stochastic cellular automata model for wildland fire spread dynamics, Journal of Physics: Conference Series. — 2011.

[4] Чорней Р.К. Локальне керування в мережах Національний університет "Києво-Могилянська академія 2021 - 311 с

Дякую за увагу!