

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

**Курсова робота на тему:
Триаметр зв’язних графів**

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(*прізвище та ініціали*)

(*підпис*)
“ _____ ” _____ 2022 р.

Виконав студент
4-го року навчання спеціальності
121 “Інженерія програмного забезпечення”
Гак Артем Олегович
(*ПІБ*)

Київ – 2022

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедри математики,
проф. д,ф-м.н.
_____ Б.В. Олійник
(підпис)
“ _____ ” _____ 2022 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу
студенту 4-го курсу факультету інформатики
Гаку Артему Олеговичу

Тема: Трианетр зв'язних графів.

Вихідні дані: Досліджено властивості графів перетинів.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання

Анотація

Вступ

1 Основні означення

2 Оцінки трианетра

2.1 Оцінки трианетра через радіус та діаметр графа

2.2 Оцінки трианетра дерева в термінах кількості вершин та листків

3 Зв'язок трианетра з діаметром

4 Алгоритми знаходження трианетра

5 Трианетр та інші графові параметри

6 Сімейства графів

Висновки

Література

Дата видачі “ _____ ” _____ 2022 р. Керівник _____

(підпис)

Завдання отримав _____

(підпис)

Тема: Триаметр зв'язних графів.

Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	вересень	
2.	Ознайомлення з темою курсової.	вересень	
3.	Розробка плану та структури роботи.	жовтень	
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень теорії графів.	листопад	
5.	Дослідження основних властивостей триаметра	листопад-грудень	
6.	Триаметра дерев та графів блоків та зв'язок триаметра з діаметром. Одержання основних результатів	січень-березень	
7.	Робота над текстовим оформленням результатів.	квітень	
8.	Попередній аналіз курсової. Виправлення помилок.	початок травня	
9.	Захист курсової роботи.	середина травня	

Зміст

Анотація	5
Вступ	6
1 Основні означення	7
2 Оцінки триаметра	9
2.1 Оцінки триаметра через радіус та діаметр графа	9
2.2 Оцінки триаметра дерева в термінах кількості вершин та листків .	11
3 Зв'язок триаметра з діаметром	18
4 Алгоритми знаходження триаметра	22
5 Триаметр та інші графові параметри	24
6 Сімейства графів	25
Висновки	27
Література	28

Анотація

Нехай G – зв’язний граф, а $\forall u, v \in V(G) : d(u, v)$ позначає стандартну графову метрику. Тоді триастром графа називатимемо таку характеристику $tr(G) = \max\{d_G(a, b) + d_G(a, c) + d_G(b, c) : a, b, c \in V(G)\}$.

Мета роботи полягає в дослідженні триастро, зокрема в отриманні верхніх та нижніх оцінок триастро в термінах різних графових параметрів. Окремо розглядаються оцінки триастро дерев в термінах кількості вершин та висячих. А також залежності діаметру на триастро для дерев та графів блоків.

Ключові слова: триастр, діаметр, дерева, графи блоків.

Вступ

Триаметр - це абсолютно новий параметр у теорії графів. Поняття введено індійським математиком Ангсуманом Дасом у статті “Triameter of graphs”, яка вийшла 2021 року.

Чартран та ін. вводять поняття радіо k -розфарбування простих зв'язних графів. Знаходження числа радіо k -розфарбувань дуже нетривіальні і тому відомі для дуже малої кількості графів. Тому знаходження хороших і точних меж є цікавою проблемою, яка була вивчена багатьма авторами. Вже були наведені деякі точні нижчі оцінки для радіо k -хроматичного числа зв'язних графів у термінах наново визначеного параметру (триаметра), у своїй статті ж позначають, як M -значення графа. Крім цього, концепція триаметра також знайшла застосування в метричних багатокутниках.

У своїй роботі він вводить це поняття та дає різні нижні та верхні оцінки триаметра. Розглядає різні способи оцінок триаметра в термінах чисел домінування зв'язного графа, обхвату, максимального степеня вершини. Нижня оцінка загального числа домінування була доведено раніше Хеннінгом і Йео. Багато тверджень присвячено зв'язку триаметра з діаметром, радіусом та центром графів. Це є досить природно, адже всі ці параметри мають метричну природу, як і триаметр. Також Дас приділяє особливу увагу деревам. Математик знаходить оцінки триаметра в термінах загальної кількості вершин та листків. Наприкінці своєї роботи Дас ставить декілька відкритих питань, зокрема: уточнення оцінки для дерев, доповнення діаметральної пари до триаметральної трійки та навпаки – знаходження діаметральної пари серед триаметральної трійки.

Його роботу продовжено в статті Артема Гака, Сергія Козеренка та Богдани Олійник - “A note on the triameter of graphs”. Була дана точна нижня оцінка для триаметра дерев. Також доведена теорема про зв'язки між триаметральною трійкою та діаметральною парою. І розглянуто ці проблеми на дистанційно-спадкових, медіанних та модулярних графах.

У цій курсовій роботі ми продовжуємо дослідження триаметра. Компонуємо результати попередників. Також наводимо власне просте доведення доповнення діаметральної пари до триаметральної трійки для дерев, без використання умови 4-точок. Також наведені алгоритми знаходження триаметра, в цьому полягає наукова новизна. Запропоновано швидкий алгоритм для дерев. За допомогою нього можна знайти триаметр за три обхода графа. Алгоритм вбудований у звичайний BFS та походу рахує відстані. Потім завдяки доведеній Теоремі 3.1 про, те що діаметральну пару можна доповнити до триаметральної трійки знаходить третя вершина серед листків дерева. Має часову складність $O(V)$.

1 Основні означення

Означення 1.1. Неорієнтований граф G — це впорядкована пара (V, E) , де V — множина вершин або вузлів, E — множина пар (у випадку неорієнтованого графу — невпорядкованих) вершин з V , які називаються ребрами.

Означення 1.2. Пара вершин графа i, j графа G називається *суміжними*, якщо $ij \in E(G)$.

Означення 1.3. Графи G і H називаються *ізоморфними*, якщо існує бієкція між їх множинами вершин $f : V(G) \rightarrow V(H)$ така, що будь-які дві вершини u і v графа G суміжні в G тоді і тільки тоді, коли u і v суміжні в H . Позначається $G \simeq H$.

Означення 1.4. Граф H є *породженим підграфом* графа G , якщо $V(H) \subseteq V(G)$ та $\forall u, v \in V(H) : uv \in E(H) \Leftrightarrow uv \in E(G)$.

Означення 1.5. Граф називається *зв'язним*, якщо між кожною парою його вершин існує шлях, який їх сполучає.

Означення 1.6. *Компонентою зв'язності* графа називається його максимальний (за включенням) зв'язний підграф.

Означення 1.7. *Уніциклічний граф* — граф з єдиним циклом.

Означення 1.8. Вершина $u \in V(G)$ графа G називається *точкою з'єднання*, якщо її видалення збільшує кількість компонент зв'язності.

Означення 1.9. *Околом* $N(a)$ вершини a графа G називається множина вершин, суміжних із нею, тобто $N(a) = \{u | u \in V(G), ua \in E(G)\}$.

Означення 1.10. Граф є *деревом*, якщо він не містить циклів.

Означення 1.11. Висячі вершини дерева називаються *листками*.

Означення 1.12. Граф називається *двозв'язним*, якщо він не містить точок з'єднання.

Означення 1.13. *Блоком графа* G називається його максимальний (за включенням) двозв'язний підграф.

Означення 1.14. *Повний граф* — той у якого, кожна пара вершин з'єднана ребром, позначається K_n , де n — кількість вершин.

Означення 1.15. *Триаметром* зв'язного, скінченного, простого графа G називають таку характеристику:

$$tr(G) = \max\{d_G(a, b) + d_G(a, c) + d_G(b, c) : a, b, c \in V(G)\}$$

.

Означення 1.16. *Гусеницею* називають простий зв'язний граф, одержаний додаванням скінченного числа висячих вершин до ланцюга P_n .

2 Оцінки триаметра

2.1 Оцінки триаметра через радіус та діаметр графа

Надалі розглядаються лише скінченні графи.

Твердження 2.1. *Для будь-якого зв'язного графа G виконується:*

$$2 \cdot \text{diam}(G) \leq \text{tr}(G) \leq 3 \cdot \text{diam}(G).$$

Доведення. Верхня оцінка випливає із означень триаметра та діаметра для зв'язних графів. Найбільша можлива відстань між вершинами у графі - це діаметр. Відповідно сума довільних 3 відстаней завжди обмежена трьома діаметрами.

Задля нижньої оцінки позначемо $d(u, v) = \text{diam}(G)$. Зафіксуємо вершину $w \in V \setminus \{u, v\}$. Тоді за нерівністю трикутника $d(u, v) \leq d(v, w) + d(w, u)$. А отже, $2 \cdot \text{diam}(G) = 2 \cdot d(u, v) \leq d(u, v) + d(v, w) + d(w, u) \leq \text{tr}(G)$.

Точність нижньої оцінки досягається на ланцюгу P_n , $n \geq 3$ - беремо крайні вершини ланцюга на довільну третю вершину. Для графа петерсона $\text{tr}(P) = 3 \cdot \text{diam}(P)$. $\square$

Наслідок 2.2. *Для довільного зв'язного графа G виконуються точна оцінка:*

$$2 \cdot \text{rad}(G) \leq \text{tr}(G) \leq 6 \cdot \text{rad}(G).$$

Доведення. Для довільного зв'язного графа G $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$. Підставивши сюди в оцінку з Твердження 2.1 отримаємо те, що і потрібно було довести.

Щоб показати точність оцінки візьмемо $G = C_{2n}$, де $\text{tr}(G) = 2n = 2\text{rad}(G)$, для верхньої оцінки візьмемо $G = K_{1,3}$, де $\text{tr}(G) = 6$, $\text{rad}(G) = 1$. $\square$

Наслідок 2.3. *Для будь-якого дерева T виконуються точна оцінка:*

$$4 \cdot \text{rad}(T) - 2 \leq \text{tr}(T) \leq 6 \cdot \text{rad}(T).$$

Доведення. Для будь-якого дерева T його центр має або 1 або 2 вершини, $\text{diam}(T) = 2 \cdot \text{rad}(T)$ або $2 \cdot \text{rad}(T) - 1$ відповідно до $|\text{center}(T)| = 1$ або $|\text{center}(T)| = 2$. Наслідок слідує з Твердження 2.1.

Точність верхньої та нижньої оцінок досягається на $K_{1,3}$ та P_{2n} відповідно. $\square$

Нижня оцінка Наслідку 2.3 може бути покращена для дерев з більш ніж 2 листками.

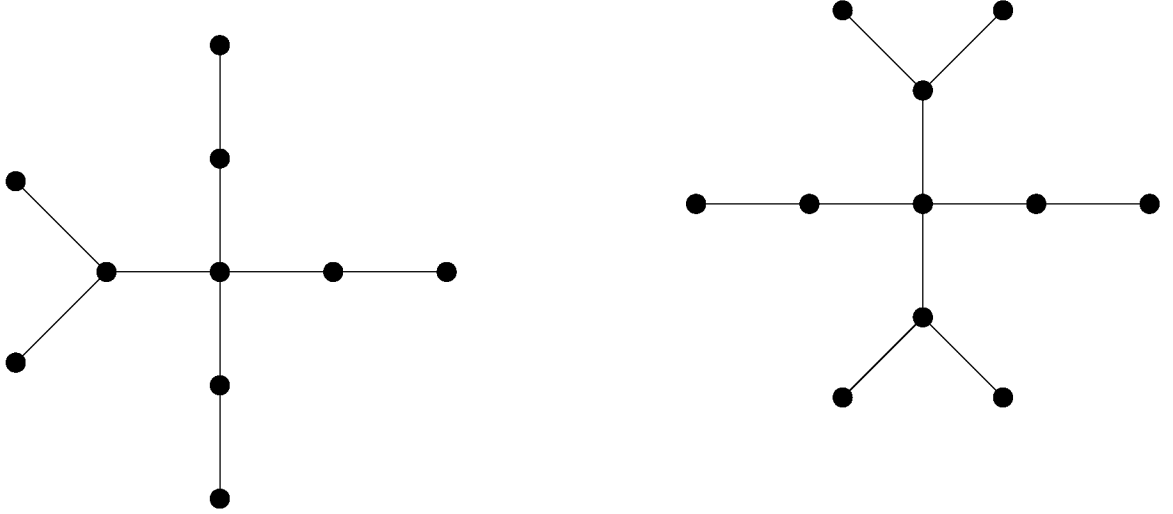


Рис. 1: Приклади дерев, на яких досягаються верхні оцінки: зліва $tr(G) = 3 \cdot \text{diam}(G)$ та справа $tr(G) = 6 \cdot \text{rad}(G)$

Твердження 2.4. Для будь-якого дерева T , що має більше ніж 2 листки виконуються точна оцінка:

$$tr(T) \geq 4 \cdot \text{rad}(T)$$

Доведення. Розглянемо 2 випадки: $|center(T)| = 1$ та $|center(T)| = 2$.

В першому випадку позначимо центральну вершину x_1 . Нехай $\text{rad}(T) = r$, а u, v - дві діаметральні вершини. Тоді $\text{diam}(T) = d(u, v) = 2r$ і $d(u, x_1) = d(v, x_1) = r$. Нехай w - інший листок дерева T , відмінний від u та v . Нехай k - найкоротша відстань від w до вершин, що з'єднують u та v . Тоді $d(u, v, w) = d(u, v) + d(v, w) + d(u, w) = 4r + 2k$, оскільки w - листок та $k \geq 1$. Звідси $tr(T) \geq d(u, v, w) \geq 4r + 2 > 4\text{rad}(T)$.

В другому випадку позначимо центральні вершини - x_1 та x_2 . Аналогічно позначимо $\text{rad}(T) = r$, а u, v - дві діаметральні вершини. Тоді $\text{diam}(T) = d(u, v) = 2r - 1$. Аналогічно візьмемо вершину w і позначимо відстань k . Тоді $d(u, v, w) = 4r + 2k - 2$, оскільки w - листок та $k \geq 1$. Звідси $tr(T) \geq d(u, v, w) \geq 4r = 4\text{rad}(T)$.

Точність впливає із додавання вершини на ребро графа $K_{1,3}$, отримаємо радіус 2 і триапетр 8. $\square$

2.2 Оцінки триаметра дерева в термінах кількості вершин та листків

Твердження 2.5. Для будь-якого зв'язного графа G з $n \geq 3$ вершинами, $tr(G) \leq 2n - 2$. $tr(G) = 2n - 2$ тоді і тільки тоді, коли G є деревом з 2 або 3 листками.

Доведення. Достатньо довести для дерев, адже для будь якого зв'язного графа G та його кістякового дерева T : $tr(G) \leq tr(T)$.

Нехай маємо дерево T , u , v та w - три вершини дерева, такі що $tr(T) = d(u, v, w)$. Нехай P_1 , P_2 та P_3 - три найкоротші шляхи від u до v , u до w та v до w відповідно. Нехай $M = E(P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ - множина всіх ребер шляхів P_1 , P_2 та P_3 . Легко помітити, що під час підрахунку триаметра кожне ребро з множини M рахується двічі.

Тому, маємо $tr(T) = 2|M| \leq 2|E(T)| = 2|V(T)| - 2 = 2n - 2$, де $V(T)$ та $E(T)$ позначають множини вершин та ребер графа T відповідно. Якщо $tr(T) = 2|V(T)| - 2$, тоді $2|V(T)| - 2 = 2|M|$. Звідси $|V(T)| - 1 = |M|$. Тоді $|E(T)| = |M|$. Таким чином, $E(T) = M$. Це показує, що T має рівно 3 листки u , v та w або 2 листки u та v , а w - є іншою вершиною дерева T .

Далі покажемо, що G не може бути зв'язним графом, який не є деревом з $tr(G) = 2n - 2$. Нехай G - граф, для якого $tr(G) = 2n - 2$, де $n = |V(G)|$. Позначимо кістякове дерево графа G як T . Тоді, $2n - 2 = tr(G) \leq tr(T) \leq 2n - 2$. Тоді, $tr(T) = 2n - 2$. А отже, T є деревом із 3 листками. Якби існувало таке ребро $e \in E(G)$ та $e \notin E(T)$, тоді б $tr(G) \leq tr(T + e) < tr(T) = 2n - 2$, отримали б суперечність. Отже, $E(G) \subseteq E(T)$. Тому граф G є деревом з рівно 2 або 3 листками. $\square$

Твердження 2.6. Нехай T - дерево з $n \geq 3$ вершинами та $l \geq 4$ листками. Тоді $tr(T) \leq 2n - 2l + 4$.

Доведення. Нехай $tr(T) = d(u^*, v^*, w^*)$, для 3 листків u^*, v^*, w^* дерева T . Нехай T' - дерево на $n - (l - 3)$ вершинах, одержане видаленням решти $l - 3$ листків з дерева T . Тоді за Теоремою 2.5: $tr(T) \leq tr(T') = 2(n - l + 3) - 2 = 2n - 2l + 4$. $\square$

Наслідок 2.7. Нехай T - дерево з $n \geq 3$ вершинами та $tr(T) = 2n - 4$, тоді T має рівно 4 листки.

Доведення. За Теоремою 2.6 маємо $2n - 4 = tr(T) \leq 2n - 2l + 4$, отже $l \leq 4$. Якщо $l = 2$ or $l = 3$, тоді $tr(T) = 2n - 2 \neq 2n - 4$. Отже, $l = 4$. $\square$

Також зазначемо, що зворотнє твердження не є вірним. Контрприклад зображено на малюнку:

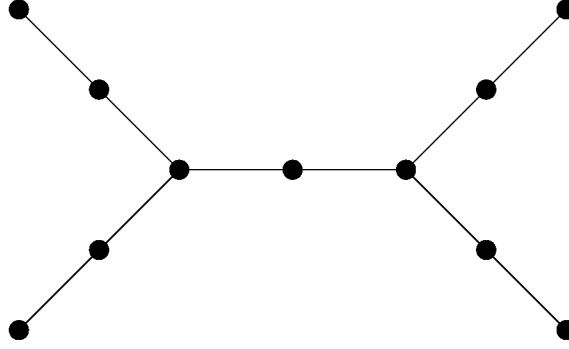


Рис. 2: Приклад дерева T з $l(T) = 4$, $n = 11$ та $tr(T) = 16 < 18 = 2 \cdot 11 - 4$

Теорема 2.8. *Нехай T — це дерево на n вершинах з $l \geq 3$ листками. Тоді $tr(T) \geq \left\lceil \frac{4(n-1)}{(l-1)} \right\rceil$, до того ж це точно оцінка.*

Доведення. Для $l = 3$ виконується рівність. Розглянемо $l > 3$. Нехай $tr(T) = d(u, v, w)$ для трьох листків u, v, w в дереві T . Нехай P_1, P_2, P_3 — унікальні найкоротші шляхи, що з'єднують $u-v$, $v-w$ і $w-u$ відповідно. Нехай $T' = \langle P_1 \cup P_2 \cup P_3 \rangle$ — під-дерево дерева T , індукованого об'єднанням P_1, P_2 і P_3 . Зауважимо, що T' є деревом з трьома листками u, v, w і $tr(T') = tr(T)$. Оскільки T' — це дерево з 3 листками, його можна отримати виходить шляхом поділу ребер графа $K_{1,3}$. Нехай y — коренева вершина в T' . Позначимо $d(u, y) = k_1$, $d(v, y) = k_2$ і $d(w, y) = k_3$. Тоді $tr(T) = tr(T') = 2(k_1 + k_2 + k_3)$.

Оскільки $l > 3$, нехай x буде іншим листком у T , відмінним від u, v, w та $d(x, T') = k$. Тоді існує $z \in T'$ така, що $d(x, z) = k$ і $d(x, t) > k$ для всіх $t \in T' \setminus \{z\}$. Без втрати загальності, нехай z лежить на шляху, що з'єднує u та y (див. Рис. 3).

Твердження 1. $d(u, z) \geq d(x, z) = k$.

Доведення Якщо можливо, нехай $d(u, z) < d(x, z)$, тоді

$$d(u, v) = d(u, z) + d(z, v) < d(x, z) + d(z, v) = d(x, v) \text{ та}$$

$$d(u, w) = d(u, z) + d(y, z) + d(y, w) < d(x, z) + d(y, z) + d(y, w) = d(x, w).$$

Таким чином

$$tr(T) = d(u, v, w) = d(u, v) + d(u, w) + d(v, w)$$

$$< d(x, v) + d(x, w) + d(v, w) = d(x, v, w)$$

маємо суперечність.

Твердження 2. Або $d(v, z) \geq d(x, z)$ або $d(w, z) \geq d(x, z)$.

Доведення Якщо можливо, нехай $d(v, z) < d(x, z)$ або $d(w, z) < d(x, z)$. Без втрати загальності, нехай $k_2 \geq k_3$. Тоді

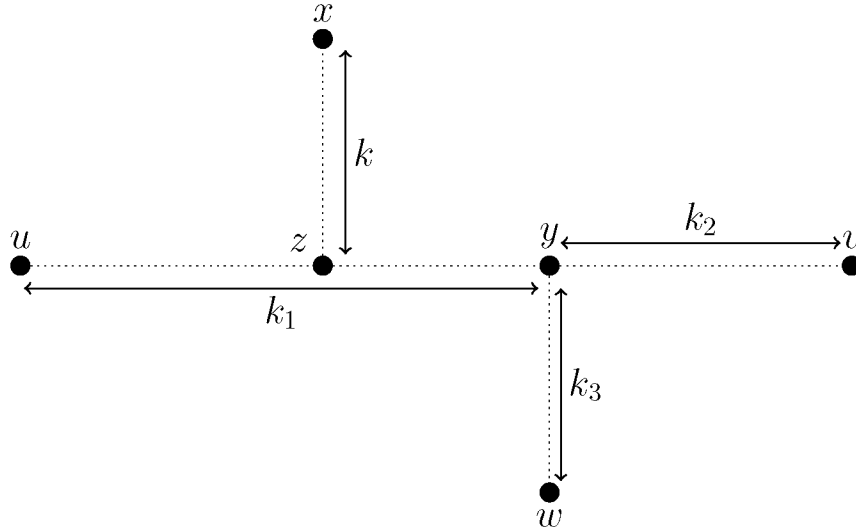


Рис. 3: Схематична діаграма для доведення Теорема 2.8

$$\begin{aligned}
 & d(u, v; w) \\
 &= d(u, v) + d(w, u) + d(v, w) = (d(u, z) + d(z, v)) + (k_2 + k_3) + d(w, u) \\
 &< d(u, y) + d(x, z) + (k_2 + k_3) + d(w, u) \text{ [бо, } d(u, z) \leq d(u, y); d(v, z) < d(x, z)] \\
 &= (d(u, z) + d(y, z)) + d(x, z) + (k_2 + k_3) + d(w, u) \\
 &= (d(u, z) + d(x, z)) + (d(y, z) + k_3) + k_2 + d(w, u) \\
 &= d(u, x) + d(w, z) + k_2 + d(w, u) \\
 &< d(u, x) + d(x, z) + k_2 + d(w, u) \text{ [бо, } d(w, z) < d(x, z)] \\
 &\leq d(u, x) + (d(x, y) + k_3) + d(w, u) \text{ [бо, } d(x, z) \leq d(x, y); k_2 \leq k_3] \\
 &= d(u, x) + d(x, w) + d(w, u) = d(u, x, w) \text{ маємо суперечність.}
 \end{aligned}$$

Оскільки $d(x, z) = k$, із **Твердження 1,2** маємо, що $d(u, z) \geq k$ та або $d(v, z)$ або $d(w, z) \geq k$. Додамо їх, отримаємо $d(u, z) + d(v, z) \geq 2k$ або $d(u, z) + d(w, z) \geq 2k$. З цього випливає, $d(u, y) + d(v, y) = k_1 + k_2 \geq 2k$ або $d(u, y) + d(w, y) = k_1 + k_3 \geq 2k$. В будь-якому випадку, $2k \leq k_1 + k_2 + k_3$

(2)

$$k \leq \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} \leq \frac{tr(T')}{4} = \frac{tr(T)}{4}$$

Нехай n' - кількість вершин в T' . Тоді

$$n' = (k_1 + 1) + (k_2 + 1) + (k_3 + 1) - 2 = k_1 + k_2 + k_3 + 1 = \frac{tr(T)}{2} + 1$$

Із (2), зазначемо, що для того, щоб отримати T' видаленням вершин з T по-

трібно видалити максимум $\frac{tr(T)}{4}(l-3)$ вершини. Тоді

$$\frac{tr(T)}{2} + 1 = n' \geq n - \frac{tr(T)}{4}(l-3)$$

$$2tr(T) + 4 \geq 4n - (l-3)tr(T)$$

$$(l-1)tr(T) \geq 4(n-1) \Rightarrow tr(T) \geq \left\lceil \frac{4(n-1)}{(l-1)} \right\rceil$$

Точна нижня оцінка досягається будь-яким деревом з 3 листками. $\square$

Твердження 2.9. *Нехай маємо P_n , $n \geq 3$ - ланцюг на n вершинах. Тоді $tr(P_n) = 2 \cdot \text{diam}(P_n) = 2n - 2$.*

Доведення. Виходячи із максимальності в означенні триаметра, серед триаметральної трійки обов'язково мають бути кінці ланцюга, позначемо u, v . Тоді взявши довільну третю вершину x (не висячу) отримаємо: $tr(P_n) = uv + ux + xv = \text{diam}(P_n) + uv = 2 \cdot \text{diam}(P_n) = 2n - 2$ $\square$

Твердження 2.10. *Нехай маємо H - гусениця на n вершинах, з $l \geq 3$ листками. Тоді $tr(H) = 2n - 2l + 6$.*

Доведення. Виходячи з міркувань максимальності триаметра він буде досягатись на діаметральній парі u, v вершин та довільній третій висячій x . Зауважимо, що за побудовою гусениці перевисяча вершина x' до вершини x належить діаметральному ланцюгу uv . Таким чином, $tr(H) = d(u, v) + d(u, x) + d(v, x) = \text{diam}(H) + d(u, x') + 1 + d(v, x') + 1 = 2 \text{diam}(H) + 2 = 2(n - l + 1) + 2 = 2n - 2l + 4$ $\square$

Лема 2.11. *Нехай маємо дерево T , з $l \geq 3$ листками, позначемо за T' - дерево отворене видаленням всіх висячих вершин з дерева T . Тоді $tr(T) = tr(T') + 6$.*

Доведення. Зафіксуємо триаметральну трійку вершин: a, b, c - всі вони є висячими з міркувань максимальності триаметра. Та позначимо їх передвисячі вершини, як a', b', c' . Тоді $d(a', b') = d(a, b) - 2$, $d(c', b') = d(c, b) - 2$, $d(a', c') = d(a, c) - 2$. Таким чином сума трьох відстаней зменшиться на 6. Отже, $abc = a'b'c' + 6$. Таким чином це виконується для будь-якої триаметральної трійки дерева T . Для кожної такої трійки дерево T їх вершини перейдуть у відповідні передвисячі дерева T' . Оскільки триаметр - це максимум по трійках, то $tr(T') = tr(T) - 6$.

Аналогічно, якщо $d_T(a, b, c) = tr(T)$, то $a, b, c \in L(T)$. Нехай a', b', c' **передвисячі** вершини в T для листків a, b, c , відповідно. Тоді $tr(T) = d_T(a, b, c) = d_{T'}(a', b', c') + 6 \leq tr(T') + 6$, що доводить лему. $\square$

Теорема 2.12. *Нехай T – дерево з $n \geq 4$ вершинами і $l \geq 3$ листками. Тоді виконується нерівність:*

$$\text{tr}(T) \geq 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 2 \min\{(n-1) \bmod l, 3\}$$

Доведення. Використаємо індукцію по $n \geq 4$. Якщо $n = 4$, то $T = K_{1,3}$, $l = 3$ і $\text{tr}(T) = 6 = 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 2 \min\{(n-1) \bmod l, 3\}$.

Нехай $n \geq 5$. Розглянемо дерево $T' = T \setminus L(T)$ та покладемо $l' = |L(T')|$. Зауважимо, що $l' \leq l$. Якщо $l' = 1$, то $T = K_{1,n-1}$, $l = n-1$ та $\text{tr}(T) = 6 = 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 2 \min\{(n-1) \bmod l, 3\}$.

Якщо $l' = 2$, то T є гусеницею. Зауважемо, що після видалення всіх висячих вершин триамер буде таким: $2(n-l-1)+6$. Для спрощення покладемо: $k = \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor$, $m = (n-1) \bmod l$. Та покажемо, що $\text{tr}(T') - 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 2 \min\{(n-1) \bmod l, 3\} \geq 0$.

$$\begin{aligned} n-l-1+3-3k-\min\{m, 3\} &= \\ kl+m-l+3-3k-\min\{m, 3\} &= \\ k(l-3)-(l-3)+m-\min\{m, 3\} &= \\ k(l-3)-(l-3)+m-\min\{m, 3\} &= \\ (k-1)(l-3)+m-\min\{m, 3\} &\geq 0 \end{aligned}$$

Таким чином, припустимо $l' \geq 3$. Тоді за припущенням індукції, $\text{tr}(T') \geq 6 \left\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \right\rfloor + 2 \min\{(n-l-1) \bmod l', 3\}$.

Покладемо $m = (n-1) \bmod l$ and $m' = (n-l-1) \bmod l'$ для простоти. Зауважимо, що $n-l-1 \geq m$. За Лемою 2.11,

$$\begin{aligned} \text{tr}(T) - (6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 2 \min\{(n-1) \bmod l, 3\}) &= \\ = \text{tr}(T') + 6 - 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor - 2 \min\{m, 3\} &= \\ \geq 6 \left\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \right\rfloor + 2 \min\{(n-l-1) \bmod l', 3\} + 6 - 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor - 2 \min\{m, 3\} &= \\ = 6 \left\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \right\rfloor + 2 \min\{m', 3\} + 6 - 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor - 2 \min\{m, 3\} &= \\ = 6 \left(\left\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 1 \right) + 2(\min\{m', 3\} - \min\{m, 3\}) &= \\ = 6 \left(\left\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-l-1}{l} \right\rfloor \right) + 2(\min\{m', 3\} - \min\{m, 3\}). & \end{aligned}$$

Оскільки $l' \leq l$, $\left\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n-l-1}{l} \right\rfloor$. Якщо $\left\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-l-1}{l} \right\rfloor$, то $\frac{n-l-1-m'}{l'} = \frac{n-l-1-m}{l}$. Тому, $m' = \frac{(n-l-1)(l-l')+ml'}{l} \geq \frac{m(l-l')+ml'}{l} = m$. Звідси, у випадку $\left\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \right\rfloor =$

$\lfloor \frac{n-l-1}{l} \rfloor$, маємо $2(\min\{m', 3\} - \min\{m, 3\}) \geq 0$ таким чином $\text{tr}(T) - (6\lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor + 2\min\{(n-1) \bmod l, 3\}) \geq 0$. Якщо $\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \rfloor > \lfloor \frac{n-l-1}{l} \rfloor$, то

$$\begin{aligned} & \text{tr}(T) - (6\lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor + 2\min\{(n-1) \bmod l, 3\}) \\ & \geq 6(\lfloor \frac{n-l-1}{l'} \rfloor - \lfloor \frac{n-l-1}{l} \rfloor) + 2(\min\{m', 3\} - \min\{m, 3\}) \\ & > 6 + 2(\min\{m', 3\} - \min\{m, 3\}) \geq 6 - 2 \cdot 3 = 0 \end{aligned}$$

так само. У всіх випадках, $\text{tr}(T) \geq 6\lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor + 2\min\{(n-1) \bmod l, 3\}$, що доводить крок індукції.

$T_{10,4}$:

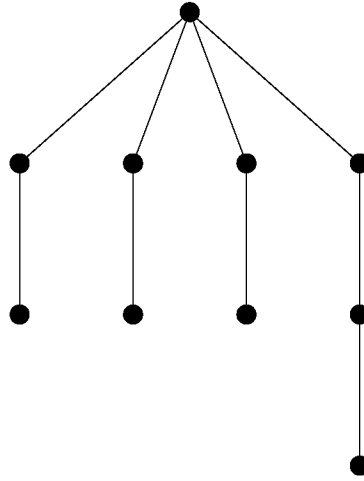


Рис. 4: Приклад дерева $T_{n,l}$

Тепер покажемо, що отримана оцінка є точною. Для цього, зафіксуємо $n \geq 4$ та $3 \leq l \leq n-1$. Побудуємо дерево $T_{n,l}$ таким чином: почнемо із зірки $K_{1,l}$, потім зафіксуємо множину ребер $E' \subset E(K_{1,l}) : |E'| = m = (n-1) \bmod l$ та підрозіб'ємо кожен з них на $\lfloor \frac{n-l-1}{l} \rfloor + 1$ нових вершин, кожне інше ребро в $K_{1,l}$ підрозіб'ємо на $\lfloor \frac{n-l-1}{l} \rfloor$ нових вершин, щоб отримати $T_{n,l}$. За побудовою, $T_{n,l}$ має

$$\begin{aligned} & 1 + l + \left\lfloor \frac{n-l-1}{l} \right\rfloor \cdot l + (n-1) \bmod l \\ & = 1 + l + \left\lfloor \frac{n-l-1}{l} \right\rfloor \cdot l + (n-l-1) \bmod l \\ & = 1 + l + n - l - 1 = n \end{aligned}$$

вершин та l листків.

Далі розглянемо 4 випадки на остачу m . Якщо $m \geq 3$, зафіксуємо трійку вершин a, b, c , кожна з яких інцидентна деякому ребру із E' . Виконується: $\text{tr}(T_{n,l}) = d_{T_{n,l}}(a, b, c) = 3 \cdot 2 \cdot (\lfloor \frac{n-l-1}{l} \rfloor + 2) = 6 \lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor + 6 = 6 \lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor + 2 \min\{m, 3\}$. Якщо $m = 2$, зафіксуємо дві вершини-листки a, b , кожна з яких інцидентна деякому ребру із E' , а третю вершину c із $T_{n,l}$. В цьому випадку,

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_{n,l}) &= d_{T_{n,l}}(a, b, c) = d_{T_{n,l}}(a, b) + d_{T_{n,l}}(a, c) + d_{T_{n,l}}(b, c) \\ &= 2 \cdot \left(\left\lfloor \frac{n-l-1}{l} \right\rfloor + 2 \right) + 2 \cdot \left(2 \left\lfloor \frac{n-l-1}{l} \right\rfloor + 3 \right) \\ &= 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 4 = 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 2 \min\{m, 3\}. \end{aligned}$$

Якщо $m = 1$, зафіксуємо вершину-листок a , яка інцидентна єдиному ребру із E' та два інших листки b, c із $T_{n,l}$. Маємо

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_{n,l}) &= d_{T_{n,l}}(a, b, c) = d_{T_{n,l}}(a, b) + d_{T_{n,l}}(a, c) + d_{T_{n,l}}(b, c) \\ &= 2 \cdot \left\lfloor \frac{n-l-1}{l} \right\rfloor + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \left(\left\lfloor \frac{n-l-1}{l} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 2 = 6 \left\lfloor \frac{n-1}{l} \right\rfloor + 2 \min\{m, 3\}. \end{aligned}$$

Якщо $m = 0$, то для будь-якої трійки a, b, c вершин-листок із $T_{n,l}$ виконується: $\text{tr}(T_{n,l}) = 3 \cdot 2 \cdot (\lfloor \frac{n-l-1}{l} \rfloor + 1) = 6 \lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor = 6 \lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor + 2 \min\{m, 3\}$. В усіх 4 випадках рівність виконується, отже оцінка точна. $\square$

3 Зв'язок триаметра з діаметром

Теорема 3.1. *Нехай маємо дерево T , та $x, y \in V(T)$ - діаметральна пара вершин : $d(x, y) = \text{diam}(T)$. Тоді цю пару можна доповнити третьою вершиною до триаметральної трійки: $\exists z \in V(T) : d(x, y, z) = \text{tr}(T)$.*

Доведення. Нехай маємо дерево T , з діаметральною трійкою a, b, c та діаметральною парою x, y . Розглянемо можливі 2 випадки розташування вершин. Познаймо вершину m - середину триаметральної трійки: $[a; b] \cap [b; c] \cap [a; c] = m$. Зауважимо, що доведення покриває випадки, коли одна або дві з діаметральних вершин збігається із триаметральною вершиною. Адже, такого обмеження ми не вводимо.

Випадок 1. Проекції діаметральних вершин падають на різні відрізки з $[a; m]$, $[b; m]$, $[c; m]$. Без втрати узагальнення будемо вважати, що $x' \in [a; m]$, $y' \in [b; m]$, де x' , y' - проекції вершин x та y - відповідно.

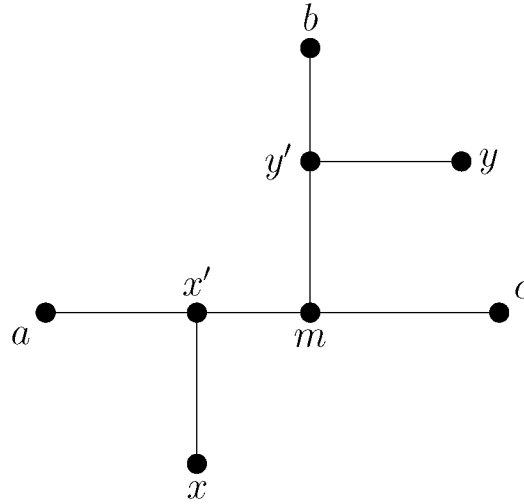


Рис. 5: Схематична діаграма Випадку 1

В цьому доведенні для скорочення будемо позначати відстань між парою вершин як $xy = d(x, y)$. Тоді $xy \geq ab$, бо $xy = \text{diam}(T)$.

$$xx' + x'm + my' + y'y \geq ax' + x'm + my' + y'b'$$

$$xx' + y'y \geq ax' + by'$$

Звідси покажемо, що доповнення вершиною c дасть нам триаметральну пару:

$$xyc \geq \text{tr}(T) = abc$$

$$xy + yc + xc \geq ab + bc + ac$$

$$(xx' + x'y' + y'y) + (yy' + y'c) + (xx' + x'c) \geq (ax' + x'y' + y'b) + (by' + y'c) + (ax' + x'c)$$

$$2xx' + 2yy' \geq 2ax' + 2by'$$

$$xx' + yy' \geq ax' + by'$$

Отже, $xyz = tr(T)$

Випадок 2. Проекції діаметральних вершин падають один і той же відрізок. Без втрати узагальнення будемо вважати, що $x', y' \in [a; m]$.

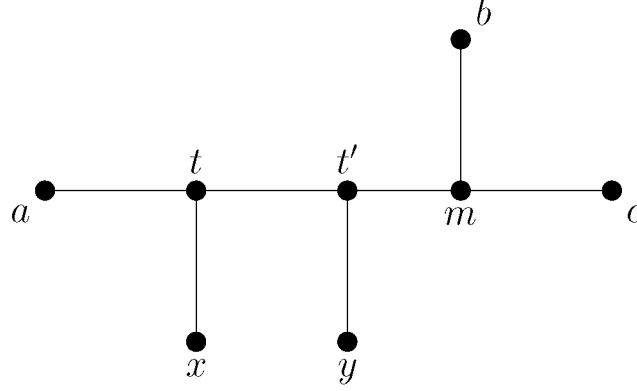


Рис. 6: Схематична діаграма Випадку 2

Розглянемо 2 можливі варіанти: $bt' = \max\{bt', at', t'c\}$ та $at' = \max\{bt', at', t'c\}$. Варіант, коли t' є таким максимумом доводиться аналогічно до bt' .

1) bt' : $xyb \geq tr(T) = abc$

$$xy + (xt + tt' + t'b) + (yt' + t'b) \geq at' + t'b + bc + at' + t'c$$

$$\text{diam} + (xt + tt' + yt') + t'b \geq at' + bc + at' + t'c$$

$$2 \text{diam} + t'b \geq 2at' + bc + t'c$$

$$2 \text{diam} \geq 2at' + bc \text{ (бо } t'b > t'c \text{ - як максимум)}$$

$$\text{diam} \geq 2at' \text{ (бо } \text{diam} \geq bc)$$

$$ab \geq 2at' \text{ (це справджується, бо } at' \leq \frac{ab}{2}, \text{ бо } bt' \text{ є максимумом)}$$

2) at' : Покажемо, що $at = xt$. Від супротивного, якщо $at > xt$, то $ay > xy = \text{diam}$ - суперечність з максимальністю в означенні діаметра. Якщо $at < xt$, то $abc > xbc = tr(T)$ - суперечність з максимальністю в означенні триамetra.

Також зазначимо, що $yt' \geq t'b$, $yt' \geq t'c$. Інакше б була суперечність $xb > xy = \text{diam}$ ($xt' + t'b > xt' + t'y$).

Тоді xy доповнюється вершиною b до триаметральної трійки:

$$xyb \geq abc = tr(T)$$

$$xy + xb + yb \geq ab + ac + bc$$

$$xy + yb \geq ac + bc \text{ (бо } at = xt)$$

$$ay + yb \geq ac + bc$$

$$at' + t'y + yb \geq at' + t'c + bc$$

$$t'y + yt' + t'b \geq t'c + bc$$

$$yt' + t'b \geq bm + mc \text{ (бо } yt' \geq t'c)$$

$$\text{Нерівність справджується, бо } t'b \geq bm, yt' \geq t'c \geq mc$$

□

Теорема 3.2. [8] Зв'язний граф G є графом блоків тоді й тільки тоді, коли його метрика d_G задовільняє “умові 4 точок”: для будь-яких 4 вершин $x, y, z, t \in V(G)$ виконується:

$$d_G(x, y) + d_G(z, t) \leq \max\{d_G(x, z) + d_G(y, t), d_G(x, t) + d_G(y, z)\}.$$

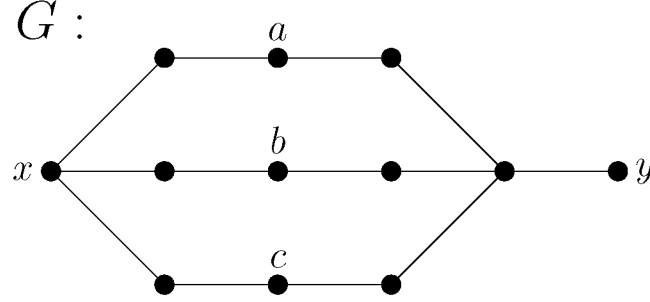


Рис. 7: Триаметральна трійка a, b, c не містить діаметральної пари, а діаметральна пара x, y не може бути доповнена до триаметральної трійки.

Теорема 3.3. Нехай G - зв'язний граф блоків, $d = d_G$ та $a, b, c, x, y \in V(G)$ такий, що $d(a, b, c) = \text{tr}(G)$, $d(x, y) = \text{diam}(G)$. Тоді

$$\begin{aligned} \max\{d(a, b), d(a, c), d(b, c)\} &= \text{diam}(G) \text{ та} \\ \max\{d(a, x, y), d(b, x, y), d(c, x, y)\} &= \text{tr}(G). \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки G є зв'язним графом блоків, з Теорема 3.2 випливає, що $d(x, y) + d(a, b) \leq \max\{d(x, a) + d(y, b), d(x, b) + d(y, a)\}$. Без втрати загальності, нехай

$$d(x, y) + d(a, b) \leq d(x, a) + d(y, b). \quad (1)$$

Якщо $d(a, y) \geq d(y, b)$, тоді

$$\begin{aligned} 0 &\geq d(a, x, y) - d(a, b, c) = d(a, x) + d(a, y) + d(x, y) - d(a, b) - d(a, c) - d(b, c) \\ &= (d(a, x) - d(a, b)) + d(a, y) + d(x, y) - d(a, c) - d(b, c) \\ &\geq (d(x, y) - d(y, b)) + d(a, y) + d(x, y) - d(a, c) - d(b, c) \\ &= (d(a, y) - d(y, b)) + 2d(x, y) - d(a, c) - d(b, c) \\ &\geq 2 \text{diam}(G) - d(a, c) - d(b, c) \geq 0. \end{aligned}$$

Звідси, $d(a, x, y) = d(a, b, c) = \text{tr}(G)$ та $d(a, c) = d(b, c) = \text{diam}(G)$.

Якщо $d(b, x) \geq d(x, a)$, то

$$\begin{aligned}
0 &\geq d(b, x, y) - d(a, b, c) = d(b, x) + d(b, y) + d(x, y) - d(a, b) - d(a, c) - d(b, c) \\
&\quad (d(b, y) - d(a, b)) + d(b, x) + d(x, y) - d(a, c) - d(b, c) \\
&\geq (d(x, y) - d(x, a)) + d(b, x) + d(x, y) - d(a, c) - d(b, c) \\
&= (d(b, x) - d(x, a)) + 2d(x, y) - d(a, c) - d(b, c) \\
&\geq 2 \operatorname{diam}(G) - d(a, c) - d(b, c) \geq 0.
\end{aligned}$$

Таким чином, $d(b, x, y) = d(a, b, c) = \operatorname{tr}(G)$ та $d(a, c) = d(b, c) = \operatorname{diam}(G)$.

Тепер нехай $d(a, y) < d(y, b)$ та $d(b, x) < d(x, a)$. Тоді $d(a, y) + d(b, x) < d(y, b) + d(x, a)$ implying that $d(y, b) + d(x, a) \leq d(x, y) + d(a, b)$ (again, see Theorem 3.2). Поєднавши цю нерівність із (1), отримуємо рівність:

$$d(x, y) + d(a, b) = d(x, a) + d(y, b). \quad (2)$$

Подібним чином розглянемо дві суми $d(x, y) + d(a, c)$, $d(x, y) + d(a, c)$ та застосуємо Теорему 3.2 до кожної з них. Оскільки, ми обмежились до випадку, де наступна рівність виконується:

$$d(x, y) + d(a, c) = d(a, x) + d(c, y) \text{ or} \quad (3)$$

$$d(x, y) + d(a, c) = d(a, y) + d(c, x) \quad (4)$$

та

$$d(x, y) + d(b, c) = d(b, x) + d(c, y) \text{ or} \quad (5)$$

$$d(x, y) + d(b, c) = d(b, y) + d(c, x). \quad (6)$$

Якщо (4) виконується, то виконристовуючи (2), отримаємо:

$$\begin{aligned}
0 &\geq d(a, x, y) - d(a, b, c) = d(a, x) + d(a, y) + d(x, y) - d(a, b) - d(a, c) - d(b, c) \\
&= (d(x, y) + d(a, b) - d(y, b)) + (d(x, y) + d(a, c) - d(c, x)) \\
&\quad + d(x, y) - d(a, b) - d(a, c) - d(b, c) \\
&= 3 \operatorname{diam}(G) - d(y, b) - d(c, x) - d(b, c) \geq 0.
\end{aligned}$$

Звідси, $d(a, x, y) = \operatorname{tr}(G)$ та $d(b, c) = \operatorname{diam}(G)$. Якщо (5) виконується, то за допомогою (2), можемо подібним чином отримати $d(b, x, y) = \operatorname{tr}(G)$ та $d(a, c) = \operatorname{diam}(G)$.

Нехай (3) та (6) виконується. Тоді

$$\begin{aligned}
0 &\geq d(c, x, y) - d(a, b, c) = d(c, x) + d(c, y) + d(x, y) - d(a, b) - d(a, c) - d(b, c) \\
&= (d(x, y) + d(b, c) - d(b, y)) + (d(x, y) + d(a, c) - d(a, x)) \\
&\quad + d(x, y) - d(a, b) - d(a, c) - d(b, c) \\
&= 3 \operatorname{diam}(G) - d(b, y) - d(a, x) - d(a, b) \geq 0.
\end{aligned}$$

В цьому випадку $d(c, x, y) = \operatorname{tr}(G)$ та $d(a, b) = \operatorname{diam}(G)$. □

4 Алгоритми знаходження триаметра

Алгоритми проілюстровані мовою C++. Клас графів має поля: $\text{int } V$ - позначає кількість вершин графа, $\text{int } E$ - кількість ребер графа та список суміжностей - представлено списком списків цілих чисел $\text{list<int>}[V]$. На i -тій позиції списку міститься список суміжних вершин до вершини v_i .

Перевірка, чи є граф ланцюгом: Перевірка чи є граф ланцюг має $O(V)$ часову складність. Ми виконуємо 2 перевірки. Перша - це перевірка, щоб граф не містив вершин степеня більше 2. Друга - щоб граф не був циклом. Виконуємо обхід графа і слідкуючи, чи не потрапимо ми у раніше відвідану вершину.

Перевірка, чи є граф деревом: Перевірка чи є граф дерево має $O(V)$ часову складність. Виконуємо обхід графа і слідкуючи, чи не потрапимо ми у раніше відвідану вершину тобто, щоб граф не містив циклів.

Обчислення відстані між двома вершинами: Знаходження відстані між парою вершин u та v має $O(V)$ часову складність. Виконуємо обхід графа починаючи з вершини u та рахуємо відстані до кожної вершини. При потраплянні у раніше відвідану вершину, якщо наша відстань менше, ніж була, то оновлюємо її, і також оновлюємо відстані для сусідніх їх вершин рекурсивно. Таким чином, ми перевіримо всі можливі шляхи між вершинами u та v за 1 прохід і знайдемо мінімальну відстань.

Алгоритм обчислення діаметру дерева:

Пошук діаметру дерева $O(V)$ виконується за 2 проходи. Перший раз починаємо з довільної вершини v , та знаходимо ексцентричну їй вершину a , ту, до якої відстань найбільша. Одержана вершина a буде периферійною. Далі другий обхід графа - починаємо із a та знаходимо найвіддаленішу до неї вершину b . Тоді вершини $\text{diam}(G) = d(a, b)$.

Алгоритм знаходження триаметра:

Розглянемо окремо випадки ланцюга, дерева та довільного зв'язного графа.

Пошук триаметра ланцюга має складність $O(1)$, адже обчислюється як $2 * |E(G)|$.

Пошук триаметра дерева $O(V) + O(L * V) = O(L * V)$. Спочатку знаходимо діаметральну пару вершин. Далі користуючись Теоремою 3.1 ми доповнюємо діаметральну пару третьою вершиною. Наївним методом це можна зробити за $O(L * V)$ - просто перебравши всі листки дерева, обчислюючи суму відстаней від листка до кожної із діаметральних. Вершина із максимальною такою сумою доповнить нашу пару до триаметральної трійки.

Втім алгоритм можна покращити до часової складності $O(V)$. Потрібно виконати 3 обходи графа, рахуючи відстані. Перший обід - як в алгоритмі пошуку діаметра дерева - знайти периферійну вершину. За другим обходом будемо обраховувати відстані до нашої периферійної вершини та збережемо їх. І далі потрібно

виконати обхід графа і знайденої другої діаметральної вершини та порахувати відстані до неї. Таким чином за 3 проходи ми знайшли діаметральну пару та знаємо відстані до всіх вершин від кожної з двох діаметральних. Достатньо пройти по листках та вибрати вершину з максимальною сумою відстаней, вона і доповнить нашу пару до триаметральної трійки.

Пошук Триаметра у загальному - для довільного зв'язного графа так само як і пошук діаметра не має швидкого алгоритму. Щоб знайти триаметр довільного графу можна використати той же підхід, як і знаходження діаметру. Знайдемо всі найкоротші відстані. А далі простим перебором знайдемо такі 3, щоб сума була максимальною, отримаємо таку ж складність $O(V^3)$.

5 Триаметр та інші графові параметри

Означення 5.1. Для графа G множина вершин $S \subseteq V(G)$ називається домінуючою, позначається $N_G[S]$, якщо для будь-якої вершини v графа G існує суміжна вершина, яка належить множині S , або v належить множині S .

Означення 5.2. Нижнє число домінування, позначається γ графа G - це найменший розмір домінуючої множини вершин графа G .

Наслідок 5.3. Нехай G - зв'язний граф на n вершинах зі зв'язним числом домінування γ_c . То $tr(G) \leq 2\gamma_c + 4$.

Доведення. Let T be a spanning tree of G with maximum number of leaves l . Then $l + \gamma_c = n^{[6]}$. Now, if $l \geq 4$, $tr(G) \leq tr(T) \leq 2(n - l) + 4 = 2\gamma_c + 4$. If $l = 2$ or $l = 3$, by Theorem 2.5, $tr(G) = 2n - 2$ and $\gamma_c = n - 2$ or $n - 3$. In this case also, $tr(G) \leq 2c + 4$ holds. $\square$

Теорема 5.4. Для зв'язного графа G , з $n \geq 3$ вершинами та хроматичним числом $\chi(G)$, $tr(G) + \chi(G) \leq 2n$, оцінка є точною.

Доведення. Спочатку покажемо, що результат виконується для непарних циклів $G = C_n$ з непарним n , $n \geq 3$, $tr(G) = n$, $\chi(G) = 3$ та повних графів $G = K_n$. $tr(G) = 3$, $\chi(G) = n$, в обох випадках $tr(G) + \chi(G) = n + 3 - 2n$.

Тепер розглянемо випадок, якщо G не є ні непарним циклом, ні повним графом. Зафіксуємо таке кісякове дерево T графа G з максимальним степенем $\Delta(T) = \Delta(G)$, і також кількість листків $l(T)$ задовільняє нерівність $\Delta(T) \leq l(T)$. Звідси за Теоремою Брукса маємо

$$tr(G) + \chi(G) \leq tr(G) + \Delta(G) \leq tr(T) + \Delta(T) \leq tr(T) + l(T)$$

Якщо $l(T) \leq 4$, то за Теоремою 2.6 $tr(T) + l(T) \leq 2n - l + 4 \leq 2n$. If $l(T) = 2$, тоді за Теоремою 2.5, $tr(T) + l(T) = 2n - 2 + 2 = 2n$.

Таким чином залишається останній випадок $l(T) = 3$. Якщо $G = T$, то $tr(G) + \chi(G) = 2n - 2 + 2 = 2n$. Якщо G має принаймні на одне ребро більше ніж T , то $tr(G) \leq 2n - 3$ і тоді за Теоремою Брукса:

$$tr(G) + \chi(G) \leq tr(G) + \Delta(G) = tr(G) + \Delta(T) \leq tr(G) + l(T) \leq 2n - 3 + 3 = 2n$$

Точність оцінки досягається на ланцюгах P_n та на деревах з $l \geq 3$. $\square$

6 Сімейства графів

Твердження 6.1. Для будь-яких двох зв'язних графів G and H , $tr(G \square H) = tr(G) + tr(H)$.

Наслідок 6.2. Нехай G - $m \times n$ прямокутний граф. Тоді $tr(G) = 2(m + n - 2)$.

Доведення. Оскільки G це $m \times n$ прямокутний граф, $G \cong P_m \square P_n$. Тоді $tr(G) = tr(P_m) + tr(P_n) = (2m - 2) + (2n - 2) = 2(m + n - 2)$. $\square$

Теорема 6.3. Нехай G - зв'язний двочастковий граф, тоді $tr(G)$ парний.

Доведення. Нехай $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ - двочасткове розбиття множини вершин графа, та u, v, w - три вершини графа, такі що $tr(G) = d(u, v, w)$.

Якщо $u, v, w \in V_i$ для якогось i , тоді кожна з відстаней $d(u, v)$, $d(v, w)$, $d(w, u)$ парна, а тоді $tr(G)$ парний, як сума трьох парних.

Тепер розглянемо другий випадок, якщо $u, v \in V_1$, $w \in V_2$. Тоді $d(u, w)$ та $d(v, w)$ - непарні, а $d(u, v)$ - парне, а отже $tr(G)$ парний. $\square$

Твердження 6.4. Нехай $G = (V, E)$ - граф, такий що його доповнення G^c зв'язне. Якщо $tr(G) > 9$, то $tr(G^c) \leq 6$.

Доведення. Від супротивного, нехай $tr(G) > 9$ та $tr(G^c) \geq 7$. Нехай u, v, w - три довільні вершини.

Випадок 1. Якщо принаймні одна з відстаней $d_{G^c}(u, v)$, $d_{G^c}(v, w)$, $d_{G^c}(w, u)$ більше 1. Нехай $d_{G^c}(w, u) > 1$. Тоді $d_G(w, u) = 1$. Якщо $d_G(u, v)$ або $d_G(v, w)$ більше 3. Тоді, якщо $\text{diam}(G) > 3$ то $\text{diam}(G^c) \leq 2$ і $tr(G^c) \leq 6$ - суперечність. Тому $d_G(u, v)$, $d_G(v, w) \leq 3$. Таким чином $d_G(u, v) + d_G(v, w) + d_G(w, u) \leq 7 \leq 9$.

Випадок 2. Якщо $d_{G^c}(u, v) = d_{G^c}(v, w) = d_{G^c}(w, u) = 1$, тоді $2 \leq d_G(u, v), d_G(v, w), d_G(w, u) \leq 3$. А тому $d_G(u, v) + d_G(v, w) + d_G(w, u) \leq 9$.

В обох випадках $tr(G) \leq 9$, що є суперечність, а отже теорема доведена. $\square$

Зв'язний граф G називають *антиподальним*, якщо для будь-якої його вершини $u \in V(G)$ існує вершина $u' \in V(G) : [u, u']_G = V(G)$. Зауважимо, що для будь-якої u відповідна їй вершина u' завжди єдина. Вершина u' називають *антиподальною* для u .

Твердження 6.5. Для будь-якого антиподального графа G виконується $tr(G) = 2 \text{diam}(G)$.

Доведення. Нехай $x, y, z \in V(G)$ - триаметральна трійка вершин у G . Тоді $2 \text{diam}(G) \leq tr(G) = d_G(x, y, z) = d_G(x, y) + d_G(x, z) + d_G(y, z) = d_G(x, x') - d_G(x', y) + d_G(x, x') - d_G(x', z) + d_G(y, z) = 2d_G(x, x') - d_G(x', y) - d_G(x', z) + d_G(y, z) \leq 2d_G(x, x') = 2 \text{diam}(G)$, де x' - антиподальна вершина для x . $\square$

Нехай $n \in \mathbb{N}$. n -cube називають граф Q_n , де $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$ і $E(Q_n) = \{xy : \text{існує єдина } i, 1 \leq i \leq n \text{ with } x_i \neq y_i\}$. Зауважимо, що кожен n -куб є медіанним та антиподальним графом.

Наслідок 6.6. *Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується $\text{tr}(Q_n) = 2n$.*

Доведення. Оскільки $\text{diam}(Q_n) = n$ та Q_n є антиподальним, рівність $\text{tr}(Q_n) = 2n$ на пряму слідує із Твердження 6.5. $\square$

Зауважимо, що наслідок 6.6 також можна отримати із спостереження про триамер де-Картового добутку двох зв'язних графів.

Твердження 6.7. [9] *Для будь-яких двох зв'язних графів G та H , $\text{tr}(G \square H) = \text{tr}(G) + \text{tr}(H)$.*

Оскільки Q_n є де-Картовим добутком n копій K_2 , рівність $\text{tr}(Q_n) = 2n$ легко випливає.

Наслідок 6.8. *Кожна пара вершин антиподального графа може бути розширена до триметральної трійки приєднанням третьої вершини.*

Доведення. Нехай $u, v \in V(G)$ - пара вершин антиподального графа G , тоді Твердження 6.5 виконується $d_G(u, v, v') = d_G(u, v) + d_G(u, v') + d_G(v, v') \geq 2d_G(v, v') = 2 \text{diam}(G) = \text{tr}(G)$, де v' антиподальна для v . $\square$

Питання 4 виконується для антиподальних графів. Але Питання 3 не виконується для антиподальних графів, бо 3-куб Q_3 має триметральну трійку вершин $x, y, z \in V(Q_3) : d_{Q_3}(x, y) = d_{Q_3}(x, z) = d_{Q_3}(y, z) = 2 < 3 = \text{diam}(Q_3)$.

Висновки

В роботі проведено дослідження нового графового параметру - триаметра. Основна мета роботи досягнута. Вона полягала в дослідженні триаметра та отриманні верхніх та нижніх оцінок триаметра в термінах різних графових параметрів. Також було окремо розглядаються оцінки триаметра дерев в термінах кількості вершин та висячих і залежності діаметру та триаметра для дерев та графів блоків. Також на мові *C++* наведені алгоритми перевірки графа на те, чи є він ланцюгом, деревом та знаходження діаметру та триаметра дерев.

Основними висновками по розділах роботи є: - в **Розділі 1** надані базові означення, що використовуються далі в роботі. Зокрема вводиться поняття триаметра.

Розділ 2 – представлено доведення твердження на оцінки триаметра. У **Підрозділі 2.1** наводяться оцінки через радіус та діаметри.

У **Розділі 2.2** представлений перший з основний результат - доведена точна нижня оцінка триаметра для дерев: $tr(T) \geq 6 \lfloor \frac{n-1}{l} \rfloor + 2 \min\{(n-1) \bmod l, 3\}$. Доведення використовує в собі математичну індукцію та раніше доведені леми для оцінки триаметрів ланцюга та гусениці.

У **Розділі 3** представлений другий основний результат - доведено теореми про зв'язки діаметра та триаметра. Теорема 3.1 доводить факт, що у дереві будь-яка діаметральна пара вершин може бути доповнена до триаметральної трійки. У Розділі 4 цей факт використовується для побудови швидкого алгоритму пошуку триаметра для дерев. Теорема 3.3 розширює результат на графи блоків та доводить одночасно і зворотнє твердження, що в будь-якій триаметральній трійці графа блоків можна знайти діаметральну пару.

У **Розділі 4** наводиться опис алгоритмів. Наведені алгоритми перевірки графа на те, чи є він ланцюгом або деревом. Також знаходження діаметру дерева через обхід графа. Особливим є результат знаходження триаметра, в цьому полягає наукова новизна. Запропоновано швидкий алгоритм для дерев. За допомогою нього можна знайти триаметр за три обходу графа. Алгоритм вбудований у звичайний BFS та по-ходу рахує відстані. Потім завдяки доведеній Теоремі 3.1 про, те що діаметральну пару можна доповнити до триаметральної трійки знаходить третя вершина серед листків дерева. Має часову складність $O(V)$.

У **Розділі 4** розглядається зв'язок триаметра з іншими графовими параметрами, зокрема числом домінування γ , хроматичним числом χ та обхватом графа Δ .

У **Розділі 6** розглядаються сімейства графів. Ми доводимо твердження для антиподальних та двочасткових графів. Також розглядаємо зв'язок триаметра з графовим добутком.

Отже, ця тема має не тільки наукову новизну, але і є темою для глибшого вивчення і дослідження.

Література

- [1] A. Hak, S. Kozerenko and B. Oliynyk, *A note on the triameter of graphs*, Discrete Applied Mathematics **309** (2022), 278–284.
- [2] Frank Harary (1969), *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [3] H.-J. Bandelt and H.M. Mulder, *Distance-hereditary graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **41** (1986), 182–208.
- [4] A. Das, *Triameter of graphs*, Discuss. Math. Graph Theory **41** (2021), 601–616.
- [5] F. Harary, *A characterization of block graphs*, Canad. Math. Bull. **6** (1963), 1–6.
- [6] M.A. Henning and A. Yeo, *A new lower bound for the total domination number in graphs proving a Graffiti.pc conjecture*, Discrete Appl. Math. **173** (2014), 45–52.
- [7] E. Howorka, *A characterization of distance-hereditary graphs*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **28** (1977), 417–420.
- [8] E. Howorka, *On metric properties of certain clique graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **27** (1979), 67–74.
- [9] S.R. Kola and P. Panigrahi, *A lower bound for radio k -chromatic number of an arbitrary graph*, Contrib. Discrete Math. **10** (2015), 45–56.
- [10] H.M. Mulder, *The structure of median graphs*, Discrete Math. **24** (1978), 197–204.
- [11] L. Saha and P. Panigrahi, *A lower bound for radio k -chromatic number*, Discrete Appl. Math. **192** (2015), 87–100.
- [12] G. Chartrand, D. Erwin and P. Zhang, *A graph labeling problem suggested by FM channel restrictions*, Bull. Inst. Combin. Appl. **43** (2005) 43–57.
- [13] O. Favaron and D. Kratsch, *Ratios of domination parameters*, Advances in Graph Theory, V.R. Kulli, (Ed(s)), (Vishwa, Gulbarga, 1991) 173–182.
- [14] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater (1998), *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker Inc.
- [15] M.A. Henning and A. Yeo, *A new lower bound for the total domination number in graphs proving a Grati.pc Conjecture*, Discrete Appl. Math. **173** (2014), 45–52.
- [16] S.R. Kola and P. Panigrahi, *A Lower bound for radio k -chromatic number of an arbitrary graph*, Contrib. Discrete Math. **10** (2015), 45–56.

- [17] L. Saha and P. Panigrahi, *Antipodal number of some powers of cycles*, Discrete Math. **312** (2012), 1550–1557.
- [18] L. Saha and P. Panigrahi, *A lower bound for radio k -chromatic number*, Discrete Appl. Math. **192** (2015), 87–100.
- [19] U. Sarkar and A. Adhikari, *On characterizing radio k -coloring problem by path covering problem*, Discrete Math. **338** (2015), 615–620.
- [20] *Finding Diameter of a Tree using DFS*, [Електронний ресурс] <https://iq.opengenus.org/diameter-of-tree-using-dfs/>
- [21] *Minimum number of edges between two vertices of a Graph*, 29 Січ. 2021 [Електронний ресурс] <https://www.geeksforgeeks.org/minimum-number-of-edges-between-two-vertices-of-a-graph/>