

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр
на тему: **«ГРАФОВІ АЛГЕБРИ ЛІ»**

Виконав: студент 4-го року
навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Зубко Станіслав Віталійович

Керівник: Тимошкевич Л. М.
кандидат фіз.-мат. наук

Рецензент:

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____
(підпис)

«_____» _____ 20__р.

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,
доцент, кандидат фіз.-мат. наук

_____ Чорней Р.К.
(підпис)

“_____” _____ 2024

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

для кваліфікаційної роботи
студенту 4-го курсу, факультету інформатики
Зубку Станіславу Віталійовичу

Тема: «Графові алгебри L_i »

Зміст кваліфікаційної роботи:

1. Вступ
2. Основні означення, пов'язані з теорією графів та теорією алгебр L_i
3. Основи теорії 2-нільпотентних алгебр L_i
4. Визначення графових алгебр L_i простих, орієнтованих та фарбованих графів
5. Графові алгебр L_i орієнтованих графів, фарбованих одним кольором
6. Зв'язок між властивостями орієнтованих графів та властивостями їх графових алгебр L_i

Висновки

Список літератури

Дата видачі “_____” _____ 2024 Керівник _____
(підпис)

Завдання отримав _____
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «_____» _____ 2024р.

Науковий керівник _____
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи _____
(ПІБ)

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	18.09.2024			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	25.09.2024			
3.	Розробка плану та структури роботи.	3.10.2024			
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень. Написання вступу та анотації.	14.10.2024			
5.	Дослідження задач, пов'язаних з графовими алгебрами Лі.	25.10.2024			
6.	Написання підрозділу, що містить основні поняття.	04.11.2024			
7.	Робота над текстовим оформленням теоретичної частини та одержаних результатів.	18.03.2025			
9.	Попередній аналіз кваліфікаційної роботи. Виправлення помилок.	04.05.2025			
9.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	23.05.2025			
10.	Захист кваліфікаційної роботи.	05.06.2025			

Зміст

1	Вступ	4
1.1	Актуальність	4
1.2	Мета та завдання дослідження	5
2	Основні означення	6
2.1	Основні означення з теорії графів	6
2.2	Основні означення з теорії алгебр Лі	8
3	Графові алгебри Лі	12
3.1	2-нільпотентні алгебри Лі	12
3.2	Конструкції графових алгебр Лі	17
3.3	Властивості графових алгебр Лі	22
4	Графові алгебри Лі графів, фарбованих одним кольором	29
5	Графові алгебри Лі графів на чотирьох вершинах, фарбованих одним кольором	36
6	Висновки	40

1 Вступ

1.1 Актуальність

Нільпотентні алгебри Лі природно виникають у багатьох розділах математики. Зокрема, особливий інтерес викликають 2-нільпотентні алгебри Лі.

Серед 2-нільпотентних алгебр Лі можна виокремити ще вужчий клас графових алгебр Лі — алгебр, асоційованих із різними конструкціями комбінаторних графів. У роботі [1] запропоновано природну конструкцію 2-нільпотентної алгебри Лі, побудованої за простим неорієнтованим графом. Такі алгебри Лі ми називаємо графовими алгебрами неорієнтованих графів. Пізніше в [2] доведено, що за графовою алгеброю Лі неорієнтованого графу можна однозначно відновити граф, за яким вона побудована.

У роботі [3] конструкцію графової алгебри неорієнтованого графу Лі узагальнено до графової алгебри Лі, побудованої за орієнтованим фарбованим графом, дослідження якої проведено в роботах [4] та [5]. Такі алгебри Лі ми називаємо графовими алгебрами Лі орієнтованих фарбованих графів. Хоча ця конструкція описує ширший клас 2-нільпотентних алгебр Лі, ніж графові алгебри неорієнтованих графів, вона «втрачає» чимало інформації про граф, за яким вона була побудована: перший погляд зовсім різні з погляду теорії графів графи можуть мати ізоморфні графові алгебри Лі.

Під час вивчення графових алгебр Лі орієнтованих фарбованих графів з'являються нові задачі, які раніше не виникали при роботі з конструкцією для неорієнтованих графів або були виродженими в цьому частковому випадку. Саме тому для дослідження було обрано графові алгебри Лі орієнтованих фарбованих графів.

Дослідження нільпотентних алгебр Лі є важливим для теорії зображень, теорії керування, геометричного аналізу, диференціальної геометрії та динаміки, тому тема цієї кваліфікаційної роботи має багато застосувань і є актуальною.

1.2 Мета та завдання дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є формалізація зв'язку між конструкцією графової алгебри Лі неорієнтованого графа та графової алгебри Лі орієнтованого фарбованого графа. У роботі буде проведено дослідження зв'язку між комбінаторними властивостями графів та алгебраїчними властивостями їхніх графових алгебр Лі, а також наведено класифікацію графових алгебр Лі орієнтованих розфарбованих графів для часткових випадків розфарбувань та спеціальних класів графів.

Результати про зв'язок властивостей орієнтованих графів, фарбованих одним кольором, описані в четвертому розділі кваліфікаційної роботи, були опубліковані в тезах XIII Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків [6].

2 Основні означення

Перш ніж перейти до основної частини роботи, зафіксуємо означення, з якими будемо працювати.

2.1 Основні означення з теорії графів

Означення 2.1.1. Простим неорієнтованим графом називаємо $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$, де V_Γ — непорожнямножина, E_Γ — підмножина в множині двоелементних підмножин V . V_Γ називаємо множиною вершин графу, E_Γ — множиною ребер графу.

Означення 2.1.2. Гомоморфізмом $f: \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ між простими неорієнтованими графами називаємо відображення множин $f: V_{\Gamma_1} \longrightarrow V_{\Gamma_2}$ таке, що

$$\{v_1, v_2\} \in E_{\Gamma_1} \Rightarrow \{f(v_1), f(v_2)\} \in E_{\Gamma_2}$$

Означення 2.1.3. Орієнтованим графом без петель називаємо $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$, де V_Γ — множина, $E_\Gamma \subset V \times V$ — іррефлексивне відношення.

Гомоморфізмом $f: \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ між орієнтованими графами без петель називаємо відображення множин $f: V_{\Gamma_1} \longrightarrow V_{\Gamma_2}$ таке, що

$$(v_1, v_2) \in E_{\Gamma_1} \Rightarrow (f(v_1), f(v_2)) \in E_{\Gamma_2}$$

Означення 2.1.4. Симетричним замиканням простого графу Γ називаємо орієнтований граф $\hat{\Gamma}$ такий, що $V_{\hat{\Gamma}} = V_\Gamma$, $E_{\hat{\Gamma}} = \{(v, w) \mid \{v, w\} \in E_\Gamma\}$.

Означення 2.1.5. Нехай $f: A \longrightarrow B$ — відображення множин. Перерізом f називаємо відображення $s: B \longrightarrow A$ таке, що композиція є тотожнім відображенням:

$$B \xrightarrow{s} A \xrightarrow{f} B = 1_B$$

Твердження 2.1.6. Якщо $f: A \longrightarrow B$ має переріз $s: B \longrightarrow A$, то f — сюр'єкція, а s — ін'єкція.

Твердження 2.1.7. Кожна сюр'єкція має переріз.

Означення 2.1.8. Нехай $\text{pr}: E_{\hat{\Gamma}} \longrightarrow E_{\Gamma}$, $\text{pr}(v, w) = \{v, w\}$ — канонічна проекція. Орієнтацією Γ називаємо переріз канонічної проекції $\text{or}: E_{\Gamma} \longrightarrow E_{\hat{\Gamma}}$.

Означення 2.1.9. Простим орієнтованим графом називаємо (Γ, or) , де Γ — простий неорієнтований граф, or — орієнтація Γ .

Зауваження. Зазвичай ми будемо ототожнювати орієнтований простий граф (Γ, or) з орієнтованим графом $(V_{\Gamma}, \text{or}(E_{\Gamma}))$, $\text{or}(E_{\Gamma}) \subset \hat{\Gamma}_E$.

Означення 2.1.10. Розфарбуванням ребер простого неорієнтованого графа Γ називаємо сюр'єкцію $\text{col}: E_{\Gamma} \twoheadrightarrow C$, де C називаємо множиною кольорів. $\text{col}\{v, w\}$ називаємо кольором $\{v, w\}$, а пару (Γ, col) — фарбованим графом.

Означення 2.1.11. Нехай $\text{col}_1: E_{\Gamma_1} \longrightarrow C$, $\text{col}_2: E_{\Gamma_2} \longrightarrow C$ — розфарбування простих неорієнтованих графів. Гомоморфізмом $f: (\Gamma_1, \text{col}_1) \longrightarrow (\Gamma_2, \text{col}_2)$ називаємо гомоморфізм простих неорієнтованих графів $f: \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ такий, що існує перестановка σ на множині кольорів C така, що

$$\text{col}_2\{f(v_1), f(v_2)\} = \sigma \circ \text{col}_1\{v_1, v_2\}$$

Означення 2.1.12. Нехай (Γ, or) — простий орієнтований граф, $V_{\Gamma} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Косиметричною матрицею інцидентності Γ називаємо матрицю $M_{(\Gamma, \text{or})} = (m_{ij})_{i,j=1}^n$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (v_i, v_j) \in E_{\Gamma} \\ -1, & \text{якщо } (v_j, v_i) \in E_{\Gamma} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Означення 2.1.13. Нехай C_n — неорієнтований цикл на парній кількості вершин. Тоді кажемо, що C_n — парний цикл.

Означення 2.1.14. Нехай C_n — неорієнтований цикл на непарній кількості вершин. Тоді кажемо, що C_n — непарний цикл.

Означення 2.1.15. Нехай C_n — неорієнтований граф, or — орієнтація C_n . Зафіксуємо порядок на вершинах $V_{C_n} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Знак ребра (v_i, v_j) визначаємо як

$$\text{sgn}(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & i < j \\ -1, & i > j \end{cases}$$

Означення 2.1.16. Орієнтацію от парного циклу C_n називаємо парною, якщо

$$\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sgn}(v_k, v_{k+1}) = 1$$

і непарною, якщо

$$\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sgn}(v_k, v_{k+1}) = -1$$

Означення 2.1.17. Орієнтацію от графу Γ називаємо парною, якщо кожний парний орієнтований цикл в Γ має парну орієнтацію.

Означення 2.1.18. Нехай Γ — простий неорієнтований граф. Вершину $v \in V_\Gamma$ називаємо висячою, якщо існує єдине ребро $\{v, w\} \in E_\Gamma$.

Означення 2.1.19. Нехай Γ — простий граф, $S \subset V_\Gamma$ — підмножина множини вершин Γ . $\Gamma \setminus S$ називаємо простий граф, де

$$V_{\Gamma \setminus S} = V_\Gamma \setminus S$$

$$E_{\Gamma \setminus S} = E_\Gamma \setminus \{\{v, w\} \in E_\Gamma \mid v \in S\}$$

2.2 Основні означення з теорії алгебр Лі

Означення 2.2.1. Алгеброю Лі над полем $\mathbb{k}$ називаємо пару $L = (V, [\cdot, \cdot])$, де V — $\mathbb{k}$ -векторний простір, $[\cdot, \cdot]: V \times V \longrightarrow V$ — білінійне косиметричне відображення, що задовольняє тотожність Якобі:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in V$$

$[\cdot, \cdot]$ називаємо дужкою Лі.

Означення 2.2.2. Алгебру Лі L називається абелевою, якщо дужка Лі

$$[\cdot, \cdot]: L \times L \longrightarrow L$$

є нульовим відображенням.

Зауваження 2.2.3. Іноді зручно ототожнювати векторні простори з абелевими алгебрами Лі.

Означення 2.2.4. Гомоморфізмом алгебр Лі $f: L \longrightarrow K$ називаємо $\mathbb{k}$ -лінійне відображення $L \longrightarrow K$ таке, що

$$f[x, y] = [f(x), f(y)] \quad \forall x, y \in L$$

Означення 2.2.5. Ядром $\ker(f)$ гомоморфізму $f: L \longrightarrow K$ називаємо підалгебру

$$\ker(f) = \{x \in L \mid f(x) = 0\}$$

Означення 2.2.6. Образом $\operatorname{im}(f)$ гомоморфізму $f: L \longrightarrow K$ називаємо підалгебру

$$\operatorname{im}(f) = \{f(x) \in K \mid x \in L\}$$

Означення 2.2.7. Підалгеброю S алгебри Лі L називаємо векторний підпростір, замкнений відносно дужки Лі:

$$\forall x, y \in S \quad [x, y] \in S$$

Означення 2.2.8. Ідеалом I алгебри Лі L називаємо векторний підпростір, що задовольняє властивості:

$$\forall x \in I, y \in L \quad [x, y] \in I$$

Твердження 2.2.9. Ядро $\ker(f)$ гомоморфізму $f: L \longrightarrow K$ є ідеалом L .

Означення 2.2.10. Фактор-алгеброю алгебри Лі L за ідеалом I називаємо алгебру Лі L/I , де дужка Лі $[\cdot, \cdot]$ задається як

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I$$

Теорема 2.2.11. Нехай $f: L \longrightarrow K$ — гомоморфізм алгебр Лі, I — ідеал L такий, що $I \subset \ker(f)$. Тоді $\exists!$ $\bar{f}: L/I \longrightarrow K$ такий, що наступна діаграма комутує:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & K \\ \text{pr} \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ L/I & & \end{array}$$

Наслідок 2.2.12. Нехай $f: L \rightarrow K$ — гомоморфізм алгебр Лі.

$$L / \ker(f) \cong \text{im}(f)$$

Означення 2.2.13. Нехай $(L, [\cdot, \cdot]_L)$, $(K, [\cdot, \cdot]_K)$ — алгебри Лі.

Прямою сумою алгебр Лі називаємо алгебру Лі $(L \oplus K, [\cdot, \cdot])$, де

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2]_L, [y_1, y_2]_K)$$

Зауваження 2.2.14. Пряма сума алгебр Лі є добутком в категорії алгебр Лі над фіксованим полем $\mathbb{k}$, але не є кодобутком.

Означення 2.2.15. Центром $Z(L)$ алгебри Лі L називаємо підалгебру

$$Z(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 \ \forall y \in L\}$$

Твердження 2.2.16. Центр $Z(L)$ алгебри Лі L є ідеалом.

Означення 2.2.17. Похідною алгебри Лі L називаємо підалгебру $[L, L]$, породжену як векторний підпростір множиною

$$\langle [x, y] \mid x, y \in L \rangle$$

Твердження 2.2.18. Похідна $[L, L]$ алгебри Лі L є ідеалом.

Означення 2.2.19. Нижнім центральним рядом алгебри Лі L називаємо послідовність ідеалів, де $L^0 = L$ і $L^n = [L, L^{n-1}]$ для $n \geq 1$:

$$L^0 \supset L^1 \supset \dots \supset L^n \supset \dots$$

Означення 2.2.20. Алгебра Лі L називається нільпотентною, якщо існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $L^n = 0$. Тоді кажемо, що L має степінь нільпотентності n або, що L є n -нільпотентною.

Означення 2.2.21. Розширенням H алгебри Лі L за допомогою M називаємо коротку точну послідовність алгебр Лі.

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} L \longrightarrow 0$$

Означення 2.2.22. Розширення алгебр Лі називаємо абелевим, якщо M — абелева алгебра Лі.

Означення 2.2.23. Розширення алгебр Лі називаємо центральним, якщо $i(M) \subset Z(H)$

Зауваження 2.2.24. Для центрального розширення алгебр Лі

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} L \longrightarrow 0$$

$i(M)$ — ідеал в H .

Означення 2.2.25. Два розширення L за допомогою M

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_1} H_1 \xrightarrow{p_1} L \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_2} H_2 \xrightarrow{p_2} L \longrightarrow 0$$

називаємо еквівалентними, якщо існує ізоморфізм алгебр Лі $\varphi: H_1 \xrightarrow{\sim} H_2$ такий, що наступна діаграма комутує:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_1} & H_1 & \xrightarrow{p_1} & L \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_2} & H_2 & \xrightarrow{p_2} & L \longrightarrow 0 \end{array}$$

Означення 2.2.26. Модулем над алгеброю Лі L називаємо пару (V, ρ) , де V — векторний простір, $\rho: L \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ — гомоморфізм алгебр Лі. Значення лінійного відображення $\rho(x)(v)$ позначаємо як $x \cdot v$ і називаємо дією елементу алгебри Лі x на елемент векторного простору v .

Означення 2.2.27. Векторний простір V називаємо тривіальним модулем над L , якщо $\rho: L \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ — нульове відображення.

3 Графові алгебри Лі

Далі $\mathbb{k}$ — фіксоване поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$.

Під векторними просторами маються на увазі $\mathbb{k}$ -векторні простори, під графами — графи, множини ребер і множини вершин яких є скінченними.

Для простого графу $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ іноді буде зручно зафіксувати лінійний порядок на вершинах: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

3.1 2-нільпотентні алгебри Лі

Твердження 3.1.1. Нехай L — 2-нільпотентна алгебра. З означення (2.2.20) бачимо, що L є 2-нільпотентною тоді і тільки тоді, коли $L^1 = [L, L] \subset Z(L)$.

Як векторний простір L можна представити як пряму суму $V \oplus [L, L]$, де $V = [L, L]^\perp$ — доповнювальний до $[L, L]$ векторний простір. Тоді можна представити дужку Лі $[\cdot, \cdot]$ на L як дужку Лі $[\cdot, \cdot]_\oplus$ на $V \oplus [L, L]$ таку, що

$$[(v_1, w_1), (v_2, w_2)]_\oplus = (0, [v_1, v_2])$$

З іншого боку, нехай маємо сюр'єктивне кососиметричне відображення

$$\omega: \bigwedge^2 V \longrightarrow W$$

Розглянемо векторний простір $V \oplus W$ і продовжимо ω до лінійного відображення

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_\omega: \bigwedge^2 (V \oplus W) &\longrightarrow V \oplus W \\ [(v_1, w_1), (v_2, w_2)]_\omega &= (0, \omega(v_1 \wedge v_2)) \end{aligned}$$

З кососиметричності ω відображення $[\cdot, \cdot]$ продовжується до кососиметричного. З означення маємо, що для довільних $w_1, w_2 \in W$

$$[(0, w_1), (0, w_2)]_\omega = (0, \omega(0 \wedge 0)) = 0$$

і тотожність Якобі для $[\cdot, \cdot]$ виконується тривіально, тому маємо, що $L = (V \oplus W, [\cdot, \cdot]_\omega)$ — алгебра Лі, причому, з побудови $i_2(W) \subset Z(L)$.

Помітимо, що формально наведену вище конструкцію можна описати як конструкцію центрального абелевого розширення абелевої алгебри L до V .

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} V \longrightarrow 0$$

Твердження 3.1.2. Кожне центральне абелеве розширення абелевої алгебри L є 2-нільпотентною алгеброю L .

Доведення. $p: L \longrightarrow V$ — гомоморфізм алгебр L , V — абелева алгебра L . З гомоморфності p маємо, що

$$p[x, y] = [p(x), p(y)] = 0$$

Отже $[L, L] \subset \ker(p)$. З точності і центральності розширення маємо включення

$$Z(L) \supset \text{im}(i) = \ker(p) \supset [L, L]$$

Отже L є 2-нільпотентною. □

Твердження 3.1.3. Кожна 2-нільпотентна алгебра L є центральним абелевим розширенням абелевої алгебри L .

Доведення. Нехай $[L, L] \subset Z(L)$. Тоді для довільних $x, y \in [L, L]$ $[x, y] = 0$ і $[L, L]$ дійсно є абелевою алгеброю L . Абелізація $L/[L, L]$ є абелевою алгеброю L за побудовою, тому маємо послідовність алгебр L

$$0 \longrightarrow [L, L] \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\text{pr}} L/[L, L] \longrightarrow 0$$

де i — включення підалгебри L в L , а pr — канонічна проекція L в фактор-алгебру L . За побудовою $\text{im}(i) = [L, L] = \ker(\text{pr})$, тому маємо, що послідовність алгебр L є точною. □

Нарешті, формалізуємо відповідність з (3.1.1) між кососиметричними відображеннями

$$\omega: \bigwedge^2 V \longrightarrow W$$

і розширеннями V за допомогою W

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{i_2} (V \oplus W, [\cdot, \cdot]_\omega) \xrightarrow{\text{pr}_1} V \longrightarrow 0$$

Теорема 3.1.4.¹ Нехай L — алгебра Лі, W — векторний простір з фіксованою структурою L -модуля. Класи еквівалентності абелевих розширень L за допомогою W знаходяться в бієктивній відповідності з групою других когомологій $H^2(L, W)$ комплексу Шевале-Ейленберга $(C^\bullet(L, W), d)$ з коефіцієнтами в W .

Наслідок 3.1.5. Нехай L — алгебра Лі, W — векторний простір зі структурою тривіального L -модуля. Класи еквівалентності центральних абелевих розширень L за допомогою W знаходяться в бієктивній відповідності з $H^2(L, W)$.

Наслідок 3.1.6. Нехай V — абелева алгебра Лі, W — векторний простір зі структурою тривіального L -модуля. Класи еквівалентності центральних абелевих розширень L за допомогою W знаходяться в бієктивній відповідності з $\text{Hom}(\bigwedge^2 V, W)$.

Доведення. Оскільки V — абелева алгебра Лі, то з означення комплексу $(C^\bullet(L, W), d)$ всі диференціали d_n є нульовими і k -ті когомології $H^k(L, W)$ співпадають з k -м елементом комплексу $C^k(L, W)$. Тоді з означення комплексу маємо, що $H^2(L, W) = \text{Hom}(\bigwedge^2 V, W)$. $\square$

Зауваження 3.1.7. Оскільки ми працюємо з абелевою алгеброю Лі V і тривіальним V -модулем W , то доволі легко явно побудувати взаємно однозначну відповідність між $\text{Hom}(\bigwedge^2 V, W)$ і класами еквівалентності центральних абелевих розширень V за допомогою W .

Для довільної кососиметричної 2-форми $\omega \in \text{Hom}(\bigwedge^2 V, W)$ покладемо дужку Лі на $V \oplus W$, визначену як

$$[(v_1, w_1), (v_2, w_2)] = (0, v_1 \wedge v_2)$$

Довільній дужці Лі $[\cdot, \cdot]$ на $V \oplus W$, що $[i_2(W), V \oplus W] = 0$, співставимо форму $\omega: \bigwedge^2 V \longrightarrow W$, визначену як

$$\omega(v_1 \wedge v_2) = i_2^{-1}([(v_1, 0), (v_2, 0)])$$

де $i_2: W \longrightarrow V \oplus W$ — канонічне вкладення.

¹Weibel (1994), Chapter 7, Section 7.6, Theorem 7.6.3

Іноді для нас буде корисною інша точка зору на 2-нільпотентні алгебри Лі.

Означення 3.1.8. Вільної 2-нільпотентною алгеброю Лі $N_2(S)$ на множині S називаємо центральне абелеве розширення $V = \langle S \rangle$ за допомогою $\bigwedge^2 V$, що відповідає тотожньому косиметричному відображенню $\text{id}: \bigwedge^2 V \longrightarrow \bigwedge^2 V$.

Хоча наведене вище означення не є стандартним означенням² вільної алгебри Лі степеня нільпотентності 2, доволі легко переконатися, що визначена вище 2-нільпотентна алгебра Лі дійсно задовольняє універсальну властивість вільної 2-нільпотентної алгебри Лі.

Твердження 3.1.9. Нехай L — 2-нільпотентна алгебра Лі. Для довільного відображення множин $j: S \longrightarrow L$ і відображення $i: S \longrightarrow N_2(S)$ такого, що $i(s) = (s, 0)$ існує єдиний гомоморфізм алгебр Лі $\varphi: N_2(S) \longrightarrow L$ такий, що наступна діаграма комутує:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{j} & L \\ \downarrow i & \nearrow \varphi & \\ N_2(S) & & \end{array}$$

Доведення. Оскільки кожний векторний простір над полем $\mathbb{k}$ є вільним $\mathbb{k}$ -модулем, то з універсальної властивості вільного модуля над кільцем для довільного відображення множин $j: S \longrightarrow L$ маємо єдине лінійне відображення $\bar{j}: \langle S \rangle = V \longrightarrow L$ таке, що $\varphi \circ i = j$ як відображення множин. Тоді для вкладення $i_1: V \longrightarrow V \oplus \bigwedge^2 V$ існує гомоморфізм алгебр Лі $\varphi: N_2(S) \longrightarrow L$ такий, що діаграма лінійних відображень комутує

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\bar{j}} & L \\ \downarrow i_2 & \nearrow \varphi & \\ N_2(S) & & \end{array}$$

Покажемо

$$\varphi: N_2(S) \longrightarrow L$$

²Jacobson, Chapter 5, Section 4

$$\varphi(v_1, w_1 \wedge u_1) = \bar{j}(v_1) + [\bar{j}(w_1), \bar{j}(u_1)]$$

Оскільки L за припущенням є 2-нільпотентна і $[L, L] \subset Z(L)$, то φ дійсно є гомоморфізмом алгебр Лі:

$$\begin{aligned} \varphi[(v_1, w_1 \wedge u_1), (v_2, w_2 \wedge u_2)] &= \varphi(0, v_1 \wedge v_2) = [\bar{j}(v_1), \bar{j}(v_2)] \\ [\varphi(v_1, w_1 \wedge u_1), \varphi(v_2, w_2 \wedge u_2)] &= [\bar{j}(v_1) + [\bar{j}(w_1), \bar{j}(u_1)], \bar{j}(v_2) + [\bar{j}(w_2), \bar{j}(u_2)]] = \\ [\bar{j}(v_1), \bar{j}(v_2)] + [\bar{j}(v_1), [\bar{j}(w_2), \bar{j}(u_2)]] + [[\bar{j}(w_1), \bar{j}(u_1)], \bar{j}(v_2)] &+ [[\bar{j}(w_1), \bar{j}(u_1)], [\bar{j}(w_2), \bar{j}(u_2)]] = \\ &= [\bar{j}(v_1), \bar{j}(v_2)] \end{aligned}$$

Але будь-який гомоморфізму $\phi: N_2 \longrightarrow L$, що доповнює діаграму вище до комутативної, визначається своїми значеннями на $\bar{j}(V) \subset L$:

$$\phi(0, v \wedge w) = \phi[(v, 0), (w, 0)] = [\phi(v, 0), \phi(w, 0)] = [\bar{j}(v), \bar{j}(w)]$$

Тоді для довільного $(v_1, w_1 \wedge u_1) \in N_2(S)$

$$\begin{aligned} \phi(v_1, w_1 \wedge u_1) &= \phi((v_1, 0) + (0, w_1 \wedge u_1)) = \phi(v_1, 0) + \phi(0, w_1 \wedge u_1) = \\ &= \bar{j}(v_1) + [\bar{j}(w_1), \bar{j}(u_1)] \end{aligned}$$

Отже, отримали, що $\phi = \varphi$, і тому φ дійсно є єдиним гомоморфізмом алгебр Лі, який доповнює вищенаведену діаграму до комутативної. $\square$

Наслідок 3.1.10. Для кожної 2-нільпотентної алгебри Лі L існує така множина S , що $L \cong N_2(S) / I$, де $I \subset \bigwedge^2 V$ — шуканий центральний ідеал.

Доведення. З (3.1.1) знаємо, що довільна 2-нільпотентна алгебра Лі L має розклад $V \oplus [L, L]$. Оберемо базис S векторного простору V і розглянемо вільну 2-нільпотентну алгебру Лі $N_2(S)$. Оскільки L — 2-нільпотентна алгебра Лі, для індукованого універсальною властивістю вільної 2-нільпотентної алгебри Лі сюр'єктивного гомоморфізму алгебр Лі $\varphi: N_2(S) \longrightarrow L$ з першої теореми про ізоморфізм маємо ізоморфізм $L \cong N_2(S) / \ker(\varphi)$. Оскільки, з побудови (3.1.9) φ є тотожнім на прямому доданку $\langle V \rangle$, то $\ker(\varphi) \subset \bigwedge^2 V$. Оскільки $[N_2(S), N_2(S)] = \bigwedge^2 V \subset Z(N_2(S))$, то $\ker(\varphi) \subset Z(N_2(S))$ — центральний ідеал. $\square$

3.2 Конструкції графових алгебр Лі

Визначення 2-нільпотентної графової алгебри Лі неорієнтованого графу та графової алгебри Лі орієнтованого фарбованого графу можна знайти в [1] та [3] відповідно. В цьому ж підрозділі ми побудуємо проміжну конструкцію графової алгебри Лі орієнтованого графу і покажемо, що всі три конструкції графових алгебр Лі, побудованих за графами, мають природній зв'язок з точки зору 2-нільпотентних алгебр Лі як центральних абелевих розширень абелевої алгебри Лі — векторного простору, побудованого на множині вершин графу. Після цього розглянемо 2-нільпотентні графові алгебри Лі з точки зору фактор-алгебр Лі вільних 2-нільпотентних алгебр Лі і сформулюємо універсальні властивості раніше побудованих графових алгебр Лі.

Для фіксованого простого графу побудуємо векторний простір $\langle V_\Gamma \rangle$ на множині вершин V_Γ і розглянемо його зовнішній квадрат $\bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle := \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2} / R$.

Розглянемо підпростір $S_\Gamma = \langle v_i \otimes v_j \mid \{v_i, v_j\} \notin E_\Gamma \rangle \subset \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2}$.

Тоді маємо обмеження канонічної проекції

$$\text{pr} \big|_{S_\Gamma} = S_\Gamma \hookrightarrow \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2} \twoheadrightarrow \bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle$$

і ізоморфізми

$$\text{pr}(S_\Gamma) \cong \frac{S_\Gamma}{\ker(\text{pr}|_{S_\Gamma})} = \frac{S_\Gamma}{S_\Gamma \cap R} \cong \langle v_i \wedge v_j \mid \{v_i, v_j\} \notin E_\Gamma \rangle$$

Зафіксувавши базис зовнішнього квадрату

$$\bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle = \langle v_i \wedge v_j \mid i < j \rangle$$

і підпростору, асоційованим з графом Γ

$$\text{pr}(S_\Gamma) = \langle v_i \wedge v_j \mid \{v_i, v_j\} \in E_\Gamma, i < j \rangle$$

можемо обрати природній базис в фактор-просторі

$$\bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle \big/ \text{pr}(S_\Gamma) = \langle v_i \wedge v_j \mid \{v_i, v_j\} \in E_\Gamma \rangle$$

Оскільки для довільного лінійного відображення $f: V \longrightarrow W$ і підпростору $S \subset V$ маємо індукований гомоморфізм

$$\bar{f}: V/S \longrightarrow W/f(S)$$

то має місце індукована проекція

$$\overline{\text{pr}}: \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2} / S_\Gamma \longrightarrow \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma)$$

Твердження 3.2.1. Орієнтація простого графа $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ індукує переріз канонічної проекції $\text{or}_*: \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \longrightarrow \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2} / S_\Gamma$, визначений на базисі як

$$\text{or}_*([v_i \wedge v_j]) = \begin{cases} [v_i \otimes v_j], & \text{or}\{v_i, v_j\} = (v_i, v_j) \\ -[v_j \otimes v_i], & \text{or}\{v_i, v_j\} = (v_j, v_i) \end{cases}$$

Доведення. Оскільки для довільного $[v_i \wedge v_j]$ прообраз проекції

$$\overline{\text{pr}}^{-1}(v_i \wedge v_j) = \{v_i \otimes v_j, -v_j \otimes v_i\}$$

то за побудовою для довільного $[v_i \wedge v_j] \in \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / S_\Gamma$

$$(\overline{\text{pr}} \circ \text{or}_*)[v_i \wedge v_j] = [v_i \wedge v_j]$$

Продовживши or_* за лінійністю до лінійного відображення дійсно маємо шуканий лінійний переріз:

$$\text{or}_*: \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \longrightarrow \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2} / S_\Gamma$$

□

Твердження 3.2.2. Розфарбування простого графу $\text{col}: \Gamma_E \twoheadrightarrow C$ індукує лінійне відображення

$$\text{col}_*: \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2} / S_\Gamma \longrightarrow \langle C \rangle$$

$$\text{col}_*([v_i \otimes v_j]) = \text{col}\{v_i, v_j\}$$

Наслідок 3.2.3. Орієнтація фарбованого графу індукує косиметричну форму $\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \langle C \rangle$, що є композицією

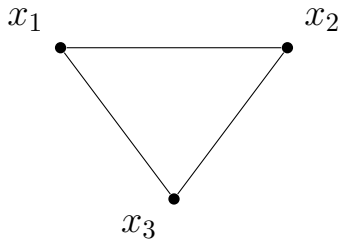
$$\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle \xrightarrow{\text{pr}} \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \xrightarrow{\text{or}_*} \langle V_\Gamma \rangle^{\otimes 2} / S_\Gamma \xrightarrow{\text{col}_*} \langle C \rangle.$$

З відповідності (3.1.6) можемо визначити графові алгебри Лі простих, орієнтованих та фарбованих графів, як 2-нільпотентні алгебри Лі, індуковані відповідними кососиметричними відображеннями.

Означення 3.2.4. Графовою алгеброю Лі $\text{Lie}(\Gamma)$ простого графу Γ називаємо розширення $\langle V_\Gamma \rangle$ за допомогою $\bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle / S_\Gamma$, що відповідає кососиметричному відображенню — проекції

$$\text{pr}_\Gamma: \bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma)$$

Приклад 3.2.5. Нехай Γ — неорієнтований граф на трьох вершинах, зображений нижче



Графова алгебра Лі $\text{Lie}(\Gamma)$ є 6-вимірною алгеброю Лі

$$\text{Lie}(\Gamma) = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \oplus \langle x_1 \wedge x_2, x_1 \wedge x_3, x_2 \wedge x_3 \rangle$$

яка має дужку Лі $[\cdot, \cdot]$, що задається на базисних векторах як

$$[x_1, x_2] = x_1 \wedge x_2$$

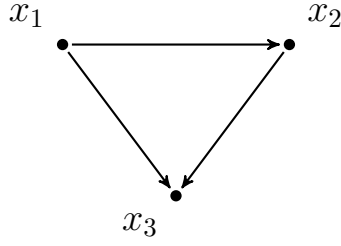
$$[x_1, x_3] = x_1 \wedge x_3$$

$$[x_2, x_3] = x_2 \wedge x_3$$

Означення 3.2.6. Графовою алгеброю Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{or})$ орієнтованого графу (Γ, or) називаємо розширення $\langle V_\Gamma \rangle$ за допомогою $\text{or}_* \left(\bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \right)$, що відповідає композиції

$$\text{or}_* \circ \text{pr}_\Gamma: \bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \text{or}_* \left(\bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \right)$$

Приклад 3.2.7. Нехай (Γ, or) — орієнтований граф на трьох вершинах, зображений нижче



Графова алгебра Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{or})$ є 6-вимірною алгеброю Лі

$$\text{Lie}(\Gamma) = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \oplus \langle x_1 \otimes x_2, x_1 \otimes x_3, x_2 \otimes x_3 \rangle$$

яка має дужку Лі $[\cdot, \cdot]$, що задається на базисних векторах як

$$[x_1, x_2] = x_1 \otimes x_2$$

$$[x_1, x_3] = x_1 \otimes x_3$$

$$[x_2, x_3] = x_2 \otimes x_3$$

Означення 3.2.8. Графовою алгеброю Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{or}, \text{col})$ орієнтованого фарбованого графу $(\Gamma, \text{or}, \text{col})$ називаємо розширення $\langle V_\Gamma \rangle$ за допомогою $\langle C \rangle$, що відповідає композиції

$$\text{col}_* \circ \text{or}_* \circ \text{pr}_\Gamma: \bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \langle C \rangle$$

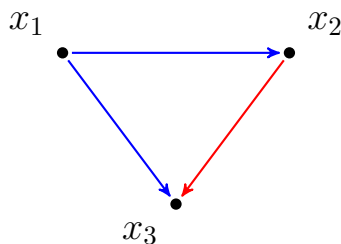
Приклад 3.2.9. Нехай $(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ — орієнтований фарбований граф на трьох вершинах, де

$$\text{col}: E_\Gamma \longrightarrow C = \{b, c\}$$

$$\text{col}\{x_1, x_2\} = \text{col}\{x_1, x_3\} = b$$

$$\text{col}\{x_2, x_3\} = c$$

зображений нижче



Графова алгебра $\mathcal{L}i(\Gamma, \text{or})$ є 5-вимірною алгеброю $\mathcal{L}i$

$$\text{Lie}(\Gamma) = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \oplus \langle b, c \rangle$$

яка має дужку $\mathcal{L}i[\cdot, \cdot]$, що задається на базисних векторах як

$$[x_1, x_2] = [x_1, x_3] = b$$

$$[x_2, x_3] = c$$

Зауваження 3.2.10. З (3.1) знаємо, що графову алгебру $\mathcal{L}i$ неорієнтованого графу $\text{Lie}(\Gamma)$ можна представити як фактор-алгебру $\mathcal{L}i$ вільної графової алгебри $N_2(V_\Gamma)$. Легко бачити, що $\text{Lie}(\Gamma) \cong \langle V_\Gamma \rangle \oplus \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma)$. Об'єднавши універсальну властивість фактор-алгебри $\mathcal{L}i$ (2.2.11) і універсальну властивість вільної 2-нільпотентної алгебри $\mathcal{L}i$ (3.1.9), негайно отримаємо універсальну властивість графової алгебри $\mathcal{L}i(\Gamma)$ неорієнтованого графу Γ .

Твердження 3.2.11. Нехай Γ — неорієнтований граф, $L = N_2(V_\Gamma) / I$ — 2-нільпотентна алгебра $\mathcal{L}i$ така, що $[v_i, v_j] = 0$ для довільних вершин v_i, v_j , що $\{v_i, v_j\} \notin E_\Gamma$. Тоді для відображень множин

$$j: V_\Gamma \longrightarrow L$$

$$j(v_i) = v_i + I$$

$$i: V_\Gamma \longrightarrow \text{Lie}(\Gamma)$$

$$i(v_i) = v_i + \text{pr}(S_\Gamma)$$

існує єдиний гомоморфізм алгебр $\mathcal{L}i$

$$\varphi: \text{Lie}(\Gamma) \longrightarrow L$$

такий, що діаграма комутує

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{j} & L \\ i \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \text{Lie}(\Gamma) & & \end{array}$$

Зокрема, як і для 2-нільпотентних алгебр (3.1), кожному 2-нільпотентному алгебру Лі можна отримати як фактор-алгебру графової алгебри Лі $\text{Lie}(\Gamma)$ неорієнтованого графу Γ . Тому, в сенсі універсальної властивості (3.2.11), графову алгебру Лі $\text{Lie}(\Gamma)$ неорієнтованого графу Γ можна назвати вільною 2-нільпотентною графовою алгеброю Лі, побудованою за неорієнтованим графом Γ .

3.3 Властивості графових алгебр Лі

Теорема 3.3.1.³ Нехай Γ_1 і Γ_2 — прості графи.

$$\text{Lie}(\Gamma_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2) \iff \Gamma_1 \cong \Gamma_2$$

Твердження 3.3.2. Для простого графу Γ і його довільної орієнтації or графова алгебра $\text{Lie}(\Gamma, \text{or}) \cong \text{Lie}(\Gamma)$.

Доведення. Графова алгебра Лі орієнтованого графу визначена як розширення

$$0 \longrightarrow \text{or}_* \left(\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \right) \xrightarrow{i_2} \text{Lie}(\Gamma, \text{or}) \xrightarrow{\text{pr}_1} \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow 0$$

Оскільки or_* є лінійним перерізом, то or_* є мономорфізмом, тому має місце коротка точна послідовність — розширення $\langle V_E \rangle$ за допомогою $\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma)$:

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \xrightarrow{i_2 \circ \text{or}_*} \text{Lie}(\Gamma, \text{or}) \xrightarrow{\text{pr}_1} \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow 0$$

Легко бачити, що це розширення відповідає (3.1.7) косиметричному відображенню $\omega = \text{pr}: \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \omega(v_i \wedge v_j) &= (i_2 \circ \text{or}_*)^{-1}[(v_1, 0), (v_2, 0)] = (i_2 \circ \text{or}_*)^{-1}(0, \text{or}_*(v_i \wedge v_j + \text{pr}(S_\Gamma))) = \\ &= (i_2 \circ \text{or}_*)^{-1}(0, \text{or}_*(v_i \wedge v_j + \text{pr}(S_\Gamma))) = \text{or}_*^{-1}(\text{or}_*(v_i \wedge v_j + \text{pr}(S_\Gamma))) = v_i \wedge v_j + \text{pr}(S_\Gamma). \end{aligned}$$

Отже, розширення (3.3), еквівалентне розширенню, що визначення графову алгебру Лі простого графу, і, зокрема, існує шуканий ізоморфізм алгебр Лі

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{or}) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(\Gamma).$$

³Mainkar (2015)

□

Наслідок 3.3.3. Нехай $(\Gamma_1, \text{or}_1), (\Gamma_2, \text{or}_2)$ — орієнтовані графи.

$$\text{Lie}(\Gamma_1, \text{or}_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2, \text{or}_2) \iff (\Gamma_1, \text{or}_1) \cong (\Gamma_2, \text{or}_2)$$

Твердження 3.3.4. Нехай $\text{col}: E_\Gamma \longrightarrow C$ — бієкція, or — довільна орієнтація графу Γ

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{or}, \text{col}) \cong \text{Lie}(\Gamma)$$

Доведення. Оскільки бієктивне розфарбування $\text{col}: E_\Gamma \longrightarrow C$ індукує ізоморфізм $\text{or}_* \left(\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \right) \xrightarrow{\sim} \langle C \rangle$, то має місце коротка точна послідовність алгебр Лі

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \xrightarrow{i_2 \circ \text{col}_* \circ \text{or}_*} \text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) \xrightarrow{\text{pr}_1} \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow 0$$

Знову легко побачити, що, оскільки $i_2 \circ \text{col}_* \circ \text{or}_*: \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \langle C \rangle$ є ізоморфізмом, це розширення $\langle V_\Gamma \rangle$ за допомогою $\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma)$ відповідає канонічній проєкції $\text{pr}: \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma)$. Отже, зокрема, існує шуканий ізоморфізм $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) \longrightarrow \text{Lie}(\Gamma, \text{or})$. □

Наслідок 3.3.5. Нехай $(\Gamma_1, \text{col}_1, \text{or}_1)$ і $(\Gamma_2, \text{col}_2, \text{or}_2)$ — орієнтовані фарбовані графи, де $\text{col}_1, \text{col}_2$ — бієктивні розфарбування.

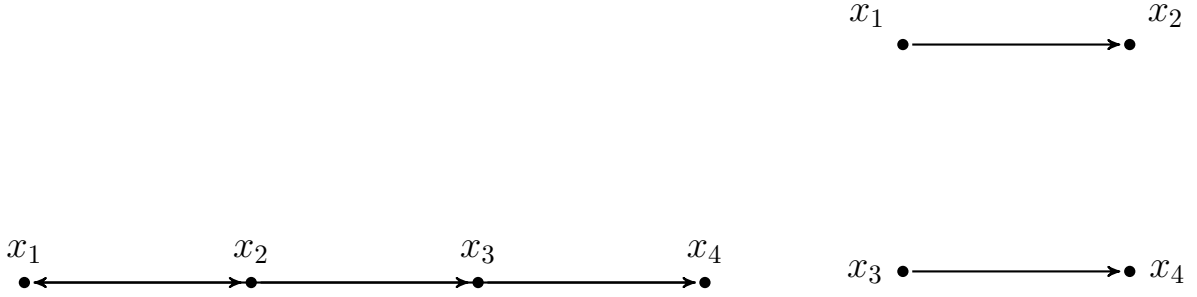
$$\text{Lie}(\Gamma_1, \text{col}_1, \text{or}_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2, \text{col}_2, \text{or}_2) \iff (\Gamma_1, \text{col}_1, \text{or}_1) \cong (\Gamma_2, \text{col}_2, \text{or}_2)$$

Зауваження 3.3.6. В загальному випадку, коли бієктивність розфарбування порушується, для фарбованого орієнтованого графу $(\Gamma_1, \text{col}_1, \text{or}_1)$ може існувати граф $(\Gamma_2, \text{col}_2, \text{or}_2)$, що не є ізоморфним Γ_1 як граф, але має ізоморфну графову алгебру Лі $\text{Lie}(\Gamma_1, \text{col}_1, \text{or}_1)$.

Приклад 3.3.7. Розглянемо розфарбування одним кольором

$$\text{col}_1, \text{col}_2: E_{\Gamma_{1,2}} \longrightarrow \text{pt} = \{c\}$$

та орієнтовані графи (P_4, or_1) та $(K_2 \amalg K_2, \text{or}_2)$, де P_4 — шлях на чотирьох вершинах, K_2 — диз'юнктне об'єднання двох ребер і or_1, or_2 — довільні їх орієнтації.



Далі, в (5.0.10), побачимо, що

$$\text{Lie}(P_4, \text{col}_1, \text{or}_1) \cong \text{Lie}(K_2 \amalg K_2, \text{col}_2, \text{or}_2)$$

незважаючи на те, що $P_4 \not\cong K_2 \amalg K_2$ як графи, оскільки, наприклад, P_4 , на відміну від $K_2 \amalg K_2$ є зв'язним.

Твердження 3.3.8. Графова алгебра Лі, побудована за скінченним орієнтованим фарбованим графом $\text{Lie}(\Gamma, \text{col})$, де $\# V_\Gamma = n$, $\# C = m$, є графовою алгеброю степеня нільпотентності 2 розмірності $n + m$.

Твердження 3.3.9. Якщо граф є диз'юнктивним об'єднанням власних компонент зв'язності

$$\Gamma = \coprod_{i=1}^n \Gamma_i$$

то маємо ізоморфізм алгебр Лі

$$\text{Lie}(\Gamma) \cong \bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k)$$

Лема 3.3.10.

$$\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^n \Lambda^2 \langle V_{\Gamma_i} \rangle / \text{pr}(S_{\Gamma_k})$$

Доведення. Покладемо

$$\hat{\theta}: \bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \Lambda^2 \langle V_{\Gamma_i} \rangle / \text{pr}(S_\Gamma)$$

задане на базисних векторах $v_i, v_j \in \Gamma_k$ як

$$\hat{\theta}(v_i \wedge v_j) = (0, \dots, v_i \wedge v_j + \text{pr}(S_{\Gamma_k}), \dots, 0)$$

Якщо між v_i і v_j немає ребра в Γ , то між v_i і v_j немає ребра в кожній компоненті зв'язності Γ_k , тому $S_\Gamma \subset \ker(\theta)$ і $\hat{\theta}$ індукує лінійне відображення

$$\theta: \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^n \Lambda^2 \langle V_{\Gamma_k} \rangle / \text{pr}(S_{\Gamma_k})$$

$$\theta(v_i \wedge v_j + \text{pr}(S_\Gamma)) = (0, \dots, v_i \wedge v_j + \text{pr}(S_{\Gamma_k}), \dots, 0)$$

Але, якщо ж між v_i та v_j немає ребра в кожній компоненті зв'язності Γ_k , то між v_i та v_j немає ребра і в повному графі Γ , тому $\ker(\theta) = \text{pr}(S_\Gamma)$ і індукований гомоморфізм θ є ізоморфізмом. $\square$

Доведення. З означення графової алгебри Лі маємо ізоморфізм

$$\bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_i) \cong \bigoplus_{k=1}^n \left(\langle V_{\Gamma_k} \rangle \oplus \Lambda^2 \langle V_{\Gamma_k} \rangle / \text{pr}(S_{\Gamma_k}) \right)$$

Тоді маємо ізоморфізм,

$$\left(\bigoplus_{k=1}^n \langle V_{\Gamma_k} \rangle \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^n \Lambda^2 \langle V_{\Gamma_k} \rangle / \text{pr}(S_{\Gamma_k}) \right) \cong \langle V_\Gamma \rangle \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^n \Lambda^2 \langle V_{\Gamma_k} \rangle / \text{pr}(S_{\Gamma_k}) \right)$$

індукований канонічним ізоморфізмом

$$\varphi: \langle V_\Gamma \rangle \xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus_{k=1}^n \langle V_{\Gamma_k} \rangle \right)$$

Покажемо, що θ з (3.3.10) індукує ізоморфізм алгебр Лі. Покладемо

$$(\varphi, \theta): \langle V_\Gamma \rangle \oplus \left(\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \right) \longrightarrow \left(\bigoplus_{k=1}^n \langle V_{\Gamma_k} \rangle \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n \Lambda^2 \langle V_{\Gamma_i} \rangle / \text{pr}(S_{\Gamma_i}) \right)$$

Оскільки φ і θ є лінійними ізоморфізмами, то (φ, θ) — лінійний ізоморфізм.

Але з означення φ та θ легко бачити, що $[\varphi(x_1), \varphi(x_2)] = \theta[x_1, x_2]$ для довільних $x_1, x_2 \in \langle V_\Gamma \rangle$, тому (φ, θ) є ізоморфізмом алгебр Лі:

$$\begin{aligned} (\varphi, \theta)[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] &= (\varphi, \theta)(0, x_1 \wedge x_2 + \text{pr}(S_\Gamma)) \\ &= (0, (x_1 \wedge x_2 + \text{pr}(S_{\Gamma_1}), \dots, x_1 \wedge x_2 + \text{pr}(S_{\Gamma_n}))) = (0, [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]) = \\ &= [(\varphi(x_1), \theta(x_2)), (\varphi(x_1), \theta(x_2))] = [(\varphi, \theta)(x_1, x_2), (\varphi, \theta)(y_1, y_2)] \end{aligned}$$

$\square$

Приклад 3.3.11. Якщо $\Gamma = (V_\Gamma, \emptyset)$ — граф, що складається з ізольованих вершин, то $\text{Lie}(\Gamma)$ — абелева алгебра Лі розмірності $\#V_\Gamma$.

Наслідок 3.3.12. Нехай or_k — обмеження орієнтації Γ до орієнтації його компоненти зв'язності Γ_k . Якщо орієнтований граф є диз'юнктним об'єднанням власних компонент зв'язності

$$(\Gamma, \text{or}) = \prod_{k=1}^n (\Gamma_k, \text{or}_k)$$

то маємо ізоморфізм алгебр Лі

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{or}) \cong \bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k, \text{or}_k)$$

Доведення. $\text{Lie}(\Gamma, \text{or}) \cong \text{Lie}(\Gamma) \cong \bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k) \cong \bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k, \text{or}_k)$ □

Твердження 3.3.13. Нехай $C_k = \text{col}(E_{\Gamma_k})$, $\text{col}_k: E_{\Gamma_k} \rightarrow C_k$ — обмеження розфарбування ребер Γ до розфарбувань ребер компонент зв'язності Γ_k . Якщо орієнтований фарбований граф є диз'юнктним об'єднанням власних компонент зв'язності

$$(\Gamma, \text{or}, \text{col}) = \prod_{k=1}^n (\Gamma_k, \text{or}_k, \text{col}_k)$$

то маємо ізоморфізм алгебр Лі

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{or}, \text{col}) \cong \bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k, \text{or}_k, \text{col}_k) / R$$

$$R = \langle (c, i) - (c, j) \mid c \in C_i \cap C_j \rangle$$

Доведення. Для родини підмножин $\{C_k \subset C\}_{k=1}^n$ розглянемо природню проєкцію

$$\begin{aligned} p: \prod_{k=1}^n C_k &\rightarrow \bigcup_{k=1}^n C_k \\ p(c, k) &= c \end{aligned}$$

Тоді p індукує сюр'єктивне лінійне відображення

$$p_*: \langle \prod_{k=1}^n C_k \rangle \cong \bigoplus_{k=1}^n \langle C_k \rangle \rightarrow \langle C \rangle = \langle \bigcup_{k=1}^n C_k \rangle$$

$$p_*(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k$$

Отже маємо канонічний ізоморфізм $\varphi: \langle C \rangle \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k=1}^n \langle C_k \rangle / \ker(p_*)$.

Оскільки $\langle C_k \rangle$ є центральним ідеалом $\text{Lie}(\Gamma_k, \text{col}_k, \text{or}_k)$, то $\bigoplus_{k=1}^n \langle C_k \rangle$ є центральним ідеалом $\bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k, \text{col}_k, \text{or}_k)$ і вкладення підпростору $\ker(p_*) \subset \bigoplus_{k=1}^n \langle C_k \rangle$ в $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ є ідеалом алгебри Лі.

Тоді φ індукує ізоморфізм алгебр Лі

$$(\text{id}, \varphi): \text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k, \text{col}_k, \text{or}_k) / i_2(\ker(p_*))$$

і $i_2(\ker(p_*))$ є шуканим ідеалом R . □

Наслідок 3.3.14. Якщо множини кольорів C_i, C_j для кожної компоненти Γ_i, Γ_j не перетинаються, то епіморфізм $\bigoplus_{k=1}^n \langle C_k \rangle \twoheadrightarrow \langle C \rangle$ є лінійним ізоморфізмом, що індукує ізоморфізм алгебр Лі

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) \cong \bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k, \text{col}_k, \text{or}_k)$$

Крім того, з (3.3.9) та (3.3.2) маємо, що і $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$, і $\bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k, \text{col}_k, \text{or}_k)$ можна представити як фактор-алгебру графової алгебри неорієнтованого графу $\text{Lie}(\Gamma)$.

Твердження 3.3.15.

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) \cong \text{Lie}(\Gamma) / i_2(\text{or}_*^{-1} \ker(\text{col}_*))$$

$$\bigoplus_{k=1}^n \text{Lie}(\Gamma_k, \text{col}_k, \text{or}_k) \cong \text{Lie}(\Gamma) / i_2(\text{or}_*^{-1}(\bigoplus_{k=1}^n \ker(\text{col}_k *)))$$

Доведення. Помітимо, що для кососиметричного відображення, що визначає графову алгебру Лі орієнтованого фарбованого графу

$$\text{col}_* \circ \text{or}_* \circ \text{pr}_\Gamma: \bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \langle C \rangle$$

обмеження $\text{col}_* : \text{or}_* \left(\Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma) \right) \longrightarrow \langle C \rangle$ є сюр'єктивним □

Отже, в певному сенсі, для дослідження графових алгебр достатньо обмежитися дослідженням графових алгебр Лі зв'язних графів.

Означення 3.3.16. Нехай or_1, or_2 — орієнтації Γ . Кажемо, що орієнтація $\text{or}_2\{v_i, v_j\}$ ребра $\{v_i, v_j\} \in E_\Gamma$ є протилежною до орієнтації $\text{or}_1\{v_i, v_j\}$, якщо

$$\text{or}_2\{v_i, v_j\} = \begin{cases} (v_j, v_i), \text{or}_1\{v_i, v_j\} = (v_i, v_j) \\ (v_i, v_j), \text{or}_1\{v_i, v_j\} = (v_j, v_i) \end{cases}$$

Наслідок 3.3.17. Нехай or — орієнтація Γ . Розглянемо орієнтацію or' таку, що для кожного кольору $c \in C$ or' або зберігає орієнтацію or для всіх ребер кольору c , або змінює її на протилежну.

Тоді має місце наступний ізоморфізм

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) \cong \text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}')$$

Доведення. Помітимо, що для зміни орієнтації or на орієнтацію or' таку, що для кожного кольору $c \in C$ or' або зберігає орієнтацію or для всіх ребер кольору c , або змінює її на протилежну, підпростір $\text{or}_*^{-1}(\ker(\text{col}_*)) \subset \Lambda^2 \langle V_\Gamma \rangle / \text{pr}(S_\Gamma)$ співпадає з підпростором $\text{or}'_*^{-1}(\ker(\text{col}_*))$. □

Отже, в сенсі (3.3.17) маємо, узагальнення твердження (3.3.3) про незалежність конструкції графової алгебри Лі орієнтованого графу від орієнтації.

4 Графові алгебри Лі графів, фарбованих одним кольором

Зауваження 4.0.1. Розглянемо орієнтовані фарбовані графи $(\Gamma, \text{col}, \text{or})$, де множина кольорів C є порожньою. Оскільки з означення (2.1.10) розфарбування $\text{col}: E_\Gamma \longrightarrow \emptyset$ є сюр'єктивним, то E_Γ має бути порожньою множиною, тобто Γ має бути графом, що є диз'юнктним об'єднанням ізольованих вершин.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & x_2 & \dots & x_n \\ \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

Тоді з означення графової алгебри Лі орієнтованого фарбованого графу (3.2.8) негайно маємо, що графові алгебри Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ графів, фарбованих порожньою множиною кольорів, є абелевими алгебрами Лі відповідної розмірності.

Більш цікавим є випадок однокольорових розфарбувань. Далі під розфарбуваннями графів завжди матимемо на увазі саме розфарбування одним кольором.

З (3.2.8) $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ має вигляд $(\langle V_\Gamma \rangle \oplus \mathbb{k}, [\cdot, \cdot]_\omega)$, де дужка Лі $[\cdot, \cdot]_\omega$ визначається кососиметричною формою $\omega: \bigwedge^2 \langle V_\Gamma \rangle \longrightarrow \mathbb{k}$.

Зауваження 4.0.2. Кожна неабелева 2-нільпотентна алгебра L з одновимірною похідною ізоморфна графовій алгебрі Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$.

Доведення. З зауваження (3.1.1) довільна 2-нільпотентна алгебра з одновимірною похідною має вигляд $(V \oplus \mathbb{k}, [\cdot, \cdot]_\omega)$ для $V = [L, L]^\perp$ і кососиметричної форми $\omega: \bigwedge^2 V \longrightarrow \mathbb{k}$. З одновимірності похідної алгебри $[L, L]$ форма має вигляд

$$\omega: V \longrightarrow \mathbb{k}$$

$$\omega(v \wedge w) = k \cdot \delta_{ij}, \quad k \in \mathbb{k}$$

Отже, негайно бачимо, що існує базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ векторного простору V в якому ω має вигляд

$$\omega(v_i \wedge v_j) = \pm \delta_{ij}$$

Але тоді легко бачити, що заміна базису індукує ізоморфізм алгебр Лі

$$L \xrightarrow{\sim} \text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$$

де (Γ, or) — орієнтований простий граф з кососиметричною матрицею інцидентності $M_{(\Gamma, \text{or})} = (\omega(v_i \wedge v_j))_{ij}$. $\square$

Отже, класифікація графових алгебр Лі графів, фарбованих одним кольором, співпадає з задачею класифікації 2-нільпотентних алгебр Лі з одновимірною похідною.

Добре відомі наступні результати.

Теорема 4.0.3.⁴ Нехай M_ω — матриця кососиметричної форми $\omega: V \longrightarrow \mathbb{k}$. Існує базис $\{v_1, \dots, v_n\}$, в якому M_ω має блоковий вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

де матриця має $\left\lfloor \frac{\dim(V)}{2} \right\rfloor$ ненульових блоків.

Наслідок 4.0.4. Кожна кососиметрична матриця має парний ранг.

Наслідок 4.0.5. Клас еквівалентності кососиметричної форми $\omega: V \longrightarrow \mathbb{k}$ визначається її рангом.

Твердження 4.0.6. Нехай L, K — 2-нільпотентні алгебри Лі з одновимірною похідною, де $L = (V \oplus \mathbb{k}, [\cdot, \cdot])$, $K = (W \oplus \mathbb{k}, [\cdot, \cdot]_\theta)$ для кососиметричних форм

$$\omega: V \longrightarrow \mathbb{k}, \quad \theta: W \longrightarrow \mathbb{k}$$

Якщо ω і θ мають однаковий ранг, то $L \cong K$ — ізоморфні алгебри Лі.

⁴Lang (2002), Chapter XV, Section 8, Theorem 8.1

Доведення. Нехай $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ — векторний простір з фіксованим базисом $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\omega: V \longrightarrow \mathbb{k}$ — кососиметрична форма рангу m , яка задає дужку Лі на 2-нільпотентній алгебрі Лі $L = (V, [\cdot, \cdot]_\omega)$. Тоді заміна базису на $\{w_1, \dots, w_n\}$, в якій ω набуває канонічну форму, природнім чином індукує ізоморфізм векторних просторів

$$f_\omega: V \longrightarrow \tilde{V}$$

$$f_\omega(v_i) = w_j$$

що задає структуру алгебри Лі $\tilde{L} = (\tilde{V}, [\cdot, \cdot]_{\tilde{\omega}})$

$$[\cdot, \cdot]_{\tilde{\omega}}: \bigwedge^2 \tilde{V} \xrightarrow{\bar{f}_\omega^{-1}} \bigwedge^2 V \longrightarrow V \xrightarrow{f_\omega} \tilde{V}$$

де $\bar{f}_\omega$ — індукований ізоморфізм

$$\bar{f}_\omega: \bigwedge^2 V \longrightarrow \bigwedge^2 \tilde{V}$$

$$\bar{f}_\omega(v_1 \wedge v_1) = w_1 \wedge w_2$$

З побудови. маємо ізоморфізм алгебр Лі

$$\tilde{f}_\omega: L \longrightarrow \tilde{L}$$

Аналогічно, для алгебри Лі K можемо побудувати $\tilde{K}$ такий, що $K \cong \tilde{K}$. Оскільки ранг θ співпадає з рангом ω , то з побудови $\tilde{L} = \tilde{K}$. $\square$

Зауваження 4.0.7. Дужка Лі $[\cdot, \cdot]_{\tilde{\omega}}$ задається на базисних векторах $\tilde{L}$ як

$$[w_1 \wedge w_2] = [w_3 \wedge w_4] = \dots = [w_{2k+1} \wedge w_{2k}] = \dots = c, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{k} = \langle c \rangle$$

Приклад 4.0.8. Розглянемо графову алгебру Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ графу Γ на малюнку (1).

Дужка Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ задається на базисних векторах співвідношеннями

$$[v_1, v_2] = [v_1, v_3] = [v_2, v_4] = [v_3, v_2] = [v_4, v_3] = [v_4, v_1] = [v_4, v_5] = [v_5, v_1] = c$$

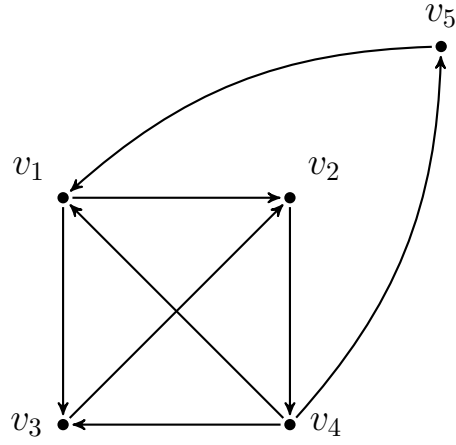


Рис. 1

Записавши матрицю кососиметричної форми ω , що її визначає,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

можемо знайти базис $\{w_1, \dots, w_n\}$, в якому M набуває канонічну форму, що задається матрицею P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^T M P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайшовши обернену матрицю,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

можемо явно задати ізоморфізм алгебр Лі

$$\tilde{f}_M: \text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) \xrightarrow{\sim} \overline{\text{Lie}}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$$

на базисних векторах як

$$\tilde{f}_M(v_1) = w_1$$

$$\tilde{f}_M(v_2) = w_2$$

$$\tilde{f}_M(v_3) = w_1 + w_2 + w_3$$

$$\tilde{f}_M(v_4) = -w_1 - w_2 - w_4$$

$$\tilde{f}_M(v_5) = w_1 - w_2 - w_3 + 2w_4 + w_5$$

Зауваження 4.0.9. Більше того, відомо, що для ізоморфних 2-нільпотентних алгебр Лі L, K з одновимірною похідною, де $L = (V \oplus \mathbb{k}, [\cdot, \cdot]_\omega)$, $K = (W \oplus \mathbb{k}, [\cdot, \cdot]_\theta)$, існує ізоморфізм алгебр Лі $L \xrightarrow{\sim} K$, індукований лінійним ізоморфізмом $V \cong W$. Отже, ранг ω і θ має співпадати.

Теорема 4.0.10. ⁵ Нехай $L = (V \oplus \mathbb{k}, [\cdot, \cdot]_\omega)$ — 2-нільпотентна алгебра Лі з одновимірною похідною. Клас ізоморфізму L визначається рангом ω .

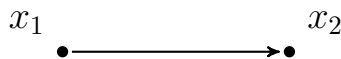
Отже, з зауваження (4.0.2) негайно отримуємо критерій ізоморфності графових алгебр Лі графів, фарбованих одним кольором.

Наслідок 4.0.11. Нехай Γ_1, Γ_2 — фарбовані орієнтовані прості графи, $\text{col}_1, \text{col}_2$ — однокольорові розфарбування Γ_1 і Γ_2 відповідно. Нехай M_1, M_2 — кососиметричні матриці інцидентності Γ_1 і Γ_2 .

$$\text{Lie}(\Gamma_1, \text{col}_1, \text{or}_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2, \text{col}_2, \text{or}_2) \iff \text{rk}(M_1) = \text{rk}(M_2).$$

⁵Gauger (1973), Theorem 5.2

Приклад 4.0.12. Для випадку орієнтованих графів на двох вершинах маємо, що для графу $\Gamma = K_2$ і його довільної орієнтації графова алгебра Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ є тривимірною алгеброю Гейзенберга.

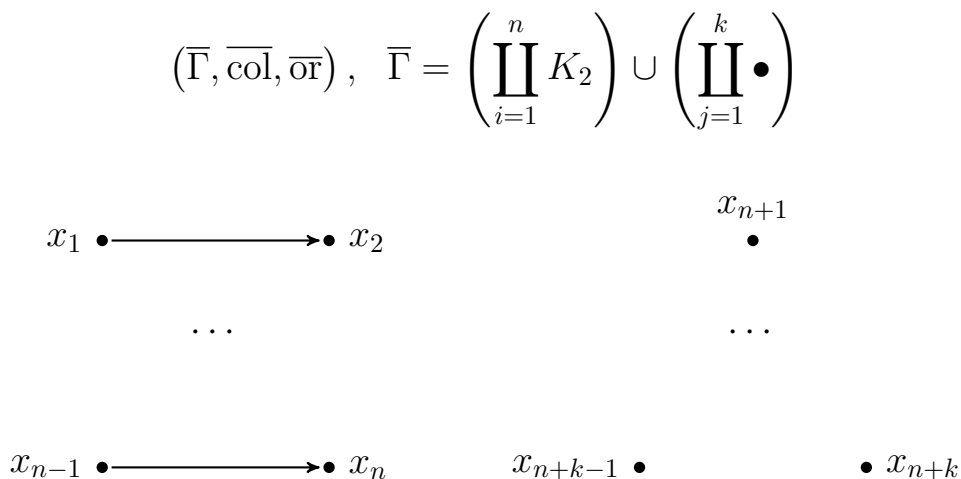


Нарешті, алгебра Лі вигляду (4.0.7) реалізується як графова алгебра Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ фарбованого графу Γ , що має кососиметричну матрицю інцидентності $M_{(\Gamma, \text{or})}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Оскільки граф Γ є диз'юнктним об'єднанням орієнтованих повних графів K_2 і ізольованих вершин, де ізольовані вершини відповідають нульовим клітинам в канонічній формі кососиметричної форми (3.2.8) $\text{col}_* \circ \text{or}_* \circ \text{pr}: \langle V_\Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{k}$, то, як наслідок теореми (4.0.10), отримуємо класифікацію графових алгебр Лі орієнтованих графів, фарбованих одним кольором.

Теорема 4.0.13. Нехай $(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ — орієнтований граф, фарбований одним кольором. Тоді існує граф фарбований одним кольором, що є диз'юнктним об'єднанням повних графів K_2 і ізольованих вершин



такий, що

$$\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) \cong \text{Lie}(\overline{\Gamma}, \overline{\text{col}}, \overline{\text{or}})$$

Зауваження 4.0.14. Оскільки з (4.0.13) знаємо, що для довільного орієнтованого графу (Γ, or) існує значно простіший граф $(\overline{\Gamma}, \overline{\text{or}})$, що має ізоморфну графову алгебру Лі, то це мотивує наступне означення.

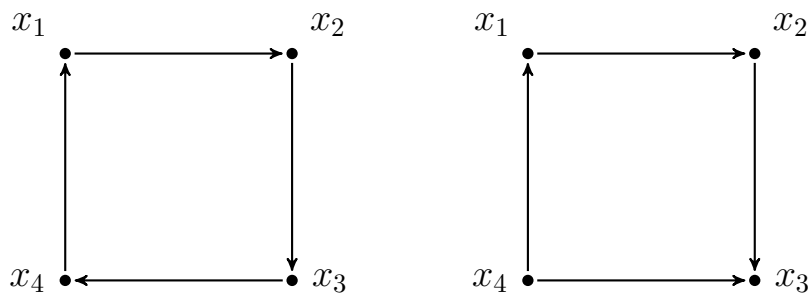
Означення 4.0.15. Нехай $(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ — орієнтований граф, фарбований одним кольором. Орієнтований фарбований граф $\overline{\Gamma} = (\coprod_{i=1}^n K_2) \cup \left(\coprod_{j=1}^k \bullet\right)$ такий, що $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) \cong \text{Lie}(\overline{\Gamma}, \overline{\text{col}}, \overline{\text{or}})$, називаємо нормальною формою $(\Gamma, \text{col}, \text{or})$.

Твердження 4.0.16. Нехай Γ — довільний неорієнтований граф на трьох вершинах, що не є об'єднанням ізольованих вершин. Для довільної орієнтації графова алгебра Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ ізоморфна графовій алгебрі $\text{Lie}(\overline{\Gamma}, \overline{\text{col}}, \overline{\text{or}})$, де $\overline{\Gamma} = K_2 \cup \bullet$.

Доведення. Ранг кососиметричної матриці є парним, тому ранг кососиметричної форми $\omega: \langle V_\Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{k}$, що відповідає дужці Лі графової алгебри Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$, може бути або нульовим, або дорівнювати 2. Легко побачити, що $\text{rk}(\omega) = 0$ тоді і тільки тоді, коли Γ є графом, що складається з трьох ізольованих вершин. Отже, для будь-якого графу, множина ребер якого не є порожньою, і будь-якої його орієнтації, кососиметрична форма ω має ранг 2. Тоді, з (4.0.13), маємо, що $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or}) = \text{Lie}(\overline{\Gamma}, \overline{\text{col}}, \overline{\text{or}})$ $\square$

Зауваження 4.0.17. Незважаючи на те, що у випадку графів на двох або трьох вершинах графова алгебра Лі не залежить від вибору орієнтації, в загальному випадку, навіть для розфарбування одним кольором, для різних орієнтацій, кососиметрична форма, що індукує дужку Лі, може мати різний ранг.

Приклад 4.0.18. Нехай C_4 — неорієнтований цикл на чотирьох вершинах, or_1, or_2 — довільні орієнтації C_4 , як на малюнку нижче. Нехай ω_1, ω_2 — кососиметричні форми, що визначають $\text{Lie}(C_4, \text{col}, \text{or}_1)$ та $\text{Lie}(C_4, \text{col}, \text{or}_2)$ відповідно. Далі, в (5.0.6), побачимо, що $\text{rk}(\omega_1) = 4$, а $\text{rk}(\omega_2) = 2$. Отже, з (4.0.11) маємо, що $\text{Lie}(C_4, \text{col}, \text{or}_1) \not\cong \text{Lie}(C_4, \text{col}, \text{or}_2)$.



5 Графові алгебри Лі графів на чотирьох вершинах, фарбованих одним кольором

Далі під фарбованими графами знову маємо на увазі графи, фарбовані одним кольором. Незважаючи на те, що класифікація 2-нільпотентних графових алгебр Лі, фарбованих одним кольором, дозволяє для довільного графу $(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ легко знайти його нормальну форму $(\overline{\Gamma}, \overline{\text{col}}, \overline{\text{or}})$ його та ізоморфізм між графовими алгебрами Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ та $\text{Lie}(\overline{\Gamma}, \overline{\text{col}}, \overline{\text{or}})$, менш тривіальними залишається питання про вплив зміни орієнтації (Γ, or) на клас ізоморфізму його графової алгебри $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$. Дослідження рангу кососиметричних матриць орієнтованих графів проводилося, наприклад, в роботі ([7]), тому в цьому розділі ми скористаємося класифікацією рангів кососиметричних матриць інцидентності орієнтованих графів на чотирьох вершинах звідти для того, щоб спростити класифікацію графових алгебр Лі орієнтованих графів на чотирьох вершинах.

Твердження 5.0.1. Відомо ([8, A001174]), що на чотирьох вершинах з точністю до ізоморфізму існує 42 орієнтованих графів, причому 34 з них є зв'язними ([8, A086345]).

Зауваження 5.0.2. З (4.0.16) знаємо класи ізоморфізму графових алгебр Лі для графів на трьох вершинах, тому, оскільки ранг кососиметричної матриці інцидентності незв'язного орієнтованого графу можна обчислити як суму рангів матриць інцидентностей його компонент зв'язності, достатньо класифікувати графові алгебри Лі зв'язних орієнтованих графів на чотирьох вершинах.

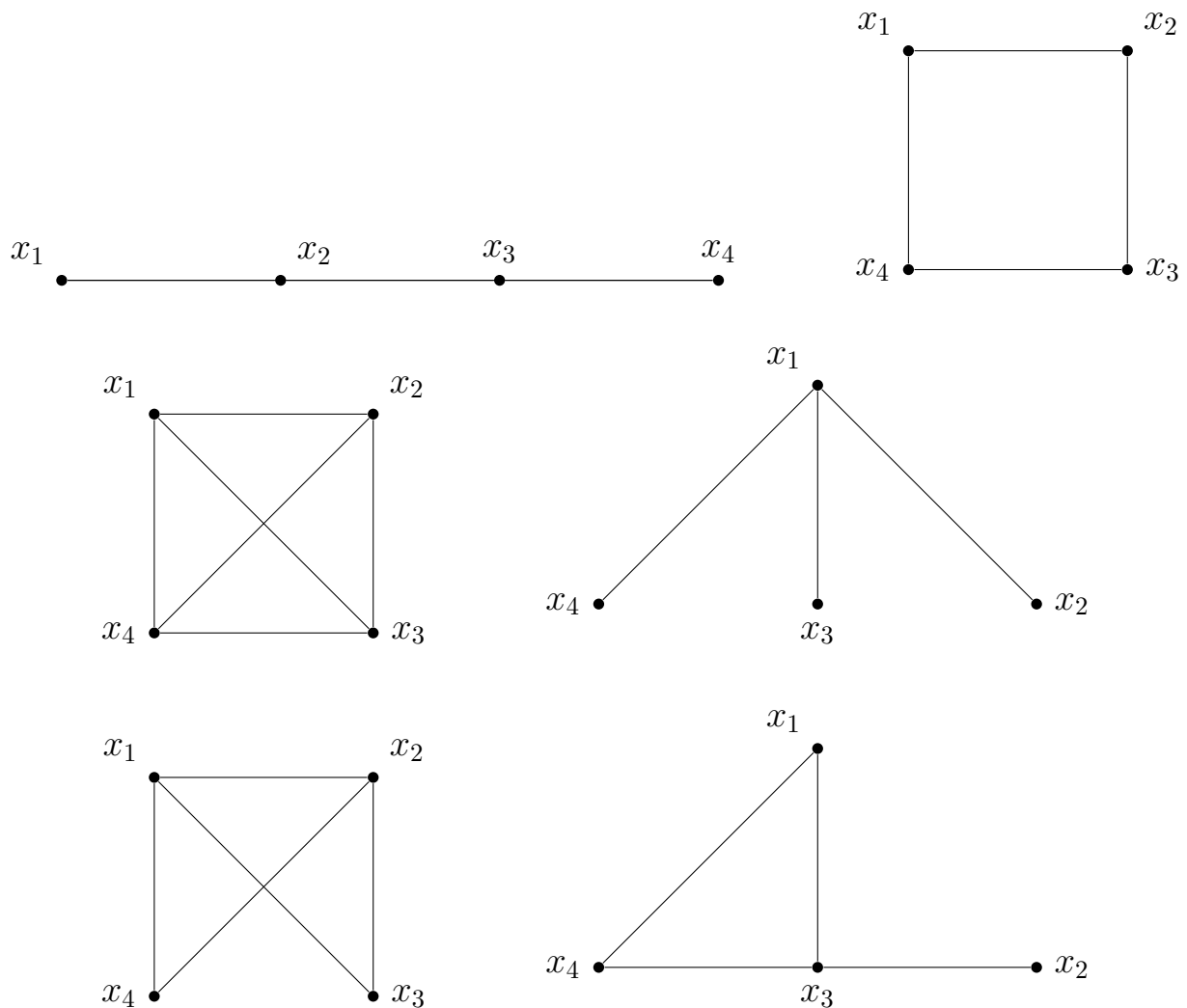


Рис. 2: $P_4, C_4, K_4, K_{1,3}, K_{1,1,2}, G_1$

Зауваження 5.0.3. Відомо, що неорієнтовані графи на чотирьох вершинах вичерпуються випадками $P_4, C_4, K_4, K_{1,3}, K_{1,1,2}, G_1$.

Наведемо відомі результати про ранг кососиметричної матриці інцидентності певних класів графів.

Лема 5.0.4. ⁶ Нехай Γ — неорієнтоване дерево. Для його довільної орієнтації or і кососиметричної матриці інцидентності $M_{(\Gamma, or)} = 2\beta(\Gamma)$, де $\beta(\Gamma)$ — число парування Γ .

Наслідок 5.0.5. ⁷ Нехай $\Gamma = P_n$ — шлях на n вершинах. Для його довільної

⁶Xueliang Lie, Guihai Yu, (2021), Lemma 2.2

⁷Xueliang Lie, Guihai Yu, (2021), Lemma 2.3

орієнтації or і кососиметричної матриці інцидентності $M_{(\Gamma, \text{or})}$

$$\text{rk}(M_{(\Gamma, \text{or})}) = \begin{cases} n, & n \text{ парне} \\ n - 1, & \text{інакше} \end{cases}$$

Лема 5.0.6. ⁸ Нехай $\Gamma = C_n$ — орієнтований цикл на n вершинах. Для його довільної орієнтації or і кососиметричної матриці інцидентності $M_{(\Gamma, \text{or})}$

$$\text{rk}(M_{(\Gamma, \text{or})}) = \begin{cases} n, & (C_n, \text{or}) \text{ — парний цикл з парною орієнтацією} \\ n - 2, & (C_n, \text{or}) \text{ — парний цикл з непарною орієнтацією} \\ n - 1, & (C_n, \text{or}) \text{ — непарний цикл} \end{cases}$$

Лема 5.0.7. ⁹ Нехай Γ — простий граф, $v \in V_\Gamma$ — висяча вершина, $\{v, w\} \in E_\Gamma$ — єдине ребро, що містить v . Для його довільної орієнтації or і кососиметричної матриці інцидентності $M_{(\Gamma, \text{or})}$

$$\text{rk}(M_{(\Gamma, \text{or})}) = \text{rk}(M_{(\Gamma \setminus \{v, w\}, \text{or})}) + 2$$

Незважаючи на те, що вищенаведені результати цікаві самі собою, оскільки з них або випливає незалежність класу ізоморфізму графової алгебри Лі $\text{Lie}(\Gamma, \text{col}, \text{or})$ від орієнтації графу Γ (5.0.4 та 5.0.5), оскільки число парування та кількість вершин графу, очевидно, не залежать від орієнтації простого графу, або значно спрощують обчислення (5.0.6 і 5.0.7) рангу $\text{rk}(M_\Gamma)$, за допомогою них значно простіше визначити ранг M_Γ довільного графу орієнтованого Γ на чотирьох вершинах, ніж за допомогою прямих обрахунків.

Лема 5.0.8. $\text{rk}(M_{K_{1,3}}) = 2$

Доведення. Оскільки кососиметрична матриця інцидентності має вигляд

$$M_{K_{1,3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m_{14} \\ 0 & 0 & 0 & m_{24} \\ 0 & 0 & 0 & m_{34} \\ -m_{14} & -m_{24} & -m_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

то легко бачити, що $\text{rk}(M_{K_{1,3}, \text{or}}) = 2$ для будь-якого вибору орієнтації $K_{1,3}$. $\square$

⁸Xueliang Lie, Guihai Yu, (2021), Lemma 2.4

⁹Xueliang Lie, Guihai Yu, (2021), Lemma 2.5

Зауваження 5.0.9. За допомогою аналогічних обчислень можна показати, що $\text{rk}(M_{K_{1,1,2}}) = \begin{cases} 2, & \text{якщо підграф } (C_4, \text{or}) \text{ має парну орієнтацію} \\ 4, & \text{інакше} \end{cases}$ і $\text{rk}(M_{K_4}) = 4$

Наслідок 5.0.10. ¹⁰ З (5.0.5), (5.0.6), (5.0.7) і (5.0.8) знаємо, що

- $\text{rk}(M_{P_4}) = 4.$
- $\text{rk}(M_{C_4}) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } (C_4, \text{or}) \text{ має парну орієнтацію} \\ 4, & \text{якщо } (C_4, \text{or}) \text{ має непарну орієнтацію} \end{cases}$
- $\text{rk}(M_{K_{1,3}}) = 2.$
- $\text{rk}(M_{K_{1,1,2}}) = \begin{cases} 2, & \text{якщо підграф } (C_4, \text{or}) \text{ має парну орієнтацію} \\ 4, & \text{інакше} \end{cases}$
- $\text{rk}(M_{K_4}) = 4.$
- $\text{rk}(M_{G_1}) = 2 + 2 = 4.$

Отже з (4.0.16) і зауваження (5.0.2), маємо повну класифікацію графових алгебр Лі орієнтованих графів на чотирьох вершинах, фарбованих одним кольором.

¹⁰Xueliang Lie, Guihai Yu, (2021), Theorem 3.1

6 Висновки

У підрозділах (2.1) і (2.2) наведено основні означення з теорії графів та теорії алгебр Лі.

У підрозділі (3.1) викладені основи теорії 2-нільпотентних алгебр Лі. У підрозділі (3.2) визначено 2-нільпотентні графові алгебри Лі неорієнтованих, орієнтованих та орієнтованих фарбованих графів. У підрозділі (3.3) розглянуто певні властивості раніше визначених графових алгебр Лі.

У розділі (4) сформульовано критерій ізоморфності графових алгебр Лі орієнтованих графів, фарбованих одним кольором.

У розділі (5) використано результати про зв'язок між властивостями графів та рангом їхньої косиметричної матриці інцидентності та спрощено класифікацію графових алгебр Лі орієнтованих графів на чотирьох вершинах фарбованих одним кольором.

Література

- [1] S. G. Dani та M. G. Mainkar. “Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs”. В: *Transactions of the American Mathematical Society* 357 (2005), с. 2235—2251.
- [2] M. G. Mainkar. “Graphs and Two-Step Nilpotent Lie Algebras”. В: *Groups, Geometry, and Dynamics* 9.1 (2015), с. 55—65.
- [3] Debraj Chakrabarti, Meera Mainkar та Savannah Swiatlowski. *Automorphism Groups of nilpotent Lie algebras associated to certain graphs*. Preprint. 2018. arXiv: 1812.09439.
- [4] Mauricio Godoy Molina та Diego Lagos. *Lie algebras associated with labeled directed graphs*. Preprint. 2023. arXiv: 2308.00272.
- [5] Mauricio Godoy Molina. *Tanaka rigidity of graph Lie algebras*. Preprint. 2024. arXiv: 2402.07873.
- [6] С.В. Зубко. “Графові алгебри Лі фарбованих графів і графові властивості”. В: *XIII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Збірник тез конференції*. Київ, трав. 2025, с. 127—128.
- [7] Xueliang Li та Guihai Yu. “The skew-rank of oriented graphs”. В: (2014). arXiv: 1404.7230 [math.CO].
- [8] OEIS Foundation Inc. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Published electronically at <http://oeis.org>. 2025.
- [9] Nathan Jacobson. *Lie Algebras*. Т. 10. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. Original from University of Minnesota; digitized October 8, 2009. Interscience Publishers, 1962, с. 331. ISBN: 0470435933, 9780470435939.
- [10] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press, 1994.
- [11] Serge Lang. *Algebra*. New York, NY: Springer, 2002. ISBN: 9781461300410, 146130041X.
- [12] Michael A. Gauger. “On the Classification of Metabelian Lie Algebras”. В: *Transactions of the American Mathematical Society* 179 (1973), с. 293—329. DOI: 10.2307/1996506.