

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики

Курсова робота

за спеціальністю 113 Прикладна математика

освітня програма «Прикладна математика»

**Перевірка ефективності локальних асимптотичних наближень розв'язків систем
різницевих рівнянь**

Керівник курсової роботи:

канд. фіз.-мат. наук,
доцент

Кашпіровський О.І.

(підпис)

“ ____ ” _____ 2021 р.

Виконала студентка

3-го року навчання спеціальності

113 “Прикладна математика”

Скаженик Тетяна Андріївна

(ПІБ)

Київ 2021

Тема: Перевірка ефективності локальних асимптотичних наближень розв'язків систем різницевих рівнянь

Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	11.09.2020	
2.	Ознайомлення з темою курсової.	28.09.2020	
3.	Планування структури роботи. Огляд наукової літератури за темою.	17.11.2020	
4.	Дослідження задачі інтерполяції та опис основних понять.	20.02.2021	
5.	Дослідження застосування асимптотичних формул для визначення параметрів локальних сплайнів.	01.03.2021	
6.	Застосування асимптотичних формул для повільно зростаючих розв'язків різницевих систем.	10.04.2021	
7.	Надання роботи керівнику на перевірку.	26.04.2021	
8.	Корегування роботи.	01.05.2021	
9.	Остаточне оформлення слайдів та роботи.	12.05.2021	
10.	Захист курсової роботи.	20.05.2021	

Анотація

За останні кілька років обробка та аналіз зображень, зокрема стиснення відео та зображень, стали дуже важливими через швидкий розвиток нових мультимедійних продуктів, систем спостереження та автомобільної промисловості.

Різні представлення зображень та відео займають вагомую частину ємності систем зберігання. Сьогодні методи інтелектуального аналізу даних вимагають більшої ємності сховища та мережі. Для задоволення зростаючих вимог необхідно розвивати нові ефективні методи стиснення зображень і відеопотоків.

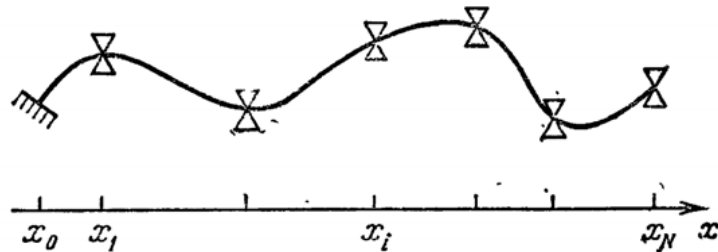
Існує безліч технік обробки зображень завдяки різноманіттю типів зображень. Один з підходів полягає в застосуванні ідеї локалізації та вилучення контурів, який широко використовується для таких задач, як класифікація, сегментація та стиснення зображень в області охорони здоров'я (комп'ютерна томографія, МРТ) та в інженерії. Ми можемо представити зображення у вигляді деякої нескінченної системи різницевих рівнянь. Для розв'язання подібних задач можуть бути використані методи локальної сплайн-апроксимації, основою яких є локальні асимптотичні формули для параметрів сплайнів. Такі формули можуть бути узагальнені для наближення розв'язків трьохдіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності.

Метою данної роботи є перевірка ефективності таких наближень для систем, пов'язаних з узагальненими не поліноміальними сплайнами, які можуть бути використані для згладжування та узагальнення одновимірного часового ряду.

Вступ

Ще задовго до появи комп'ютерного моделювання, креслярі використовували гнучкі рейки в якості лекал для проведення плавної кривої через задану множину точок. Такі довгі сталеві лінійки називали сплайнами. Термін походить від англійського *spline*, що в перекладі означає рейка, стержень. Спочатку такі сплайни були розроблені для суднобудування.

Ідея полягала в тому, щоб мати змогу регулювати форму кривої за допомогою грузил. Для цього рейки закріплювали на місці, а потім підвішували в певних точках гір так, щоб сплайн проходив через задані точки. Щоб мати більше контролю над певною областю сплайна, креслярі просто додавали додаткові грузила.



Точки на площині

Тож необхідно було знайти математичний спосіб описати форму кривої.

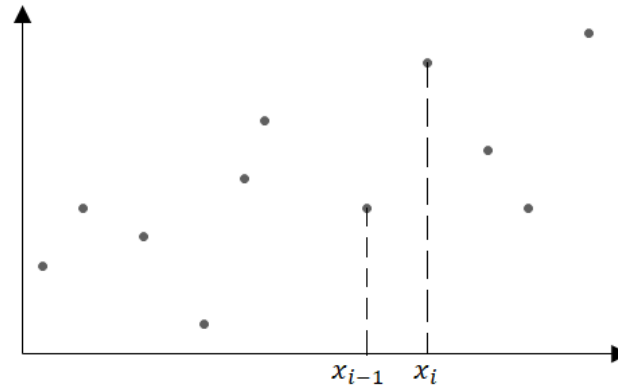
Як згадується в праці, в математиці сплайном називають наближене представлення деформованої осі рейки шматками кубічної параболи. Зазвичай ці шматки різні між кожною парою суміжних точок.

Сплайн найпростішого вигляду є неперервним. Він має неперервну першу та другу похідні, а третя похідна в точках з'єднання має розрив зі стрибком. Сплайни цілком природньо виникають в ряді механічних задач. Хоча функції, подібні тим, що зараз називають сплайнами існували давно, інтенсивне їх вивчення почалося з 1946 року. Розвитку теорії таких сплайнів посприяли праці Ісаака Шенберга.

Основні поняття

Задача інтерполяції

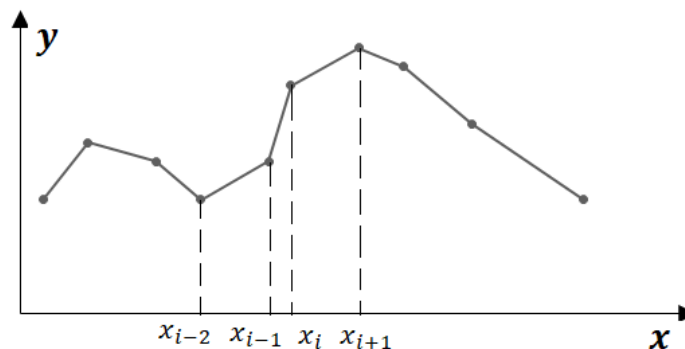
Нехай на площині задані точки $x_i, y_i, i = \overline{0, N}$.



Часто виникає задача провести через ці точки "плавну лінію". Побудова інтерполяційного многочлена при великих N не є прийнятною.

Найпростіший спосіб розв'язання такої задачі - це побудова кусково-ламаної лінії, яка на проміжку між точками з абсцисами x_{i-1} та x_i визначається так:

$$S_1(x)|_{[x_{i-1}, x_i]} = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i$$

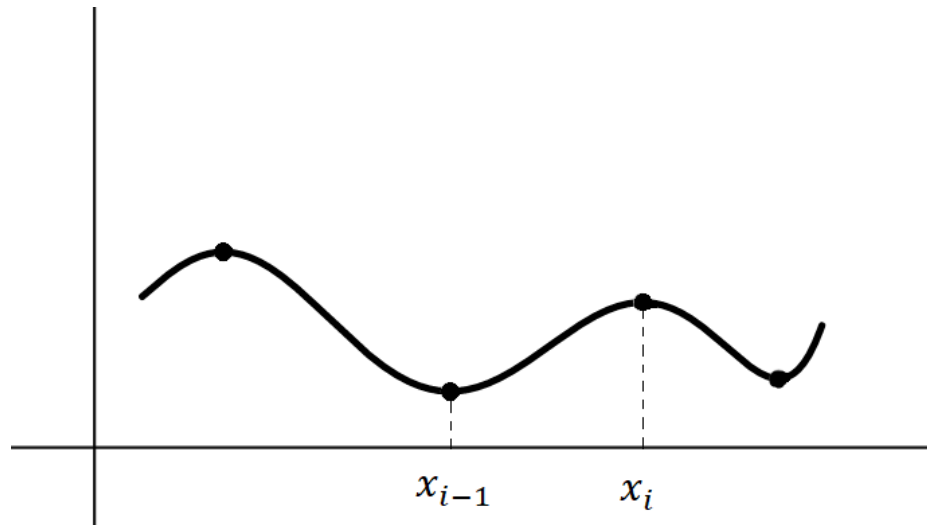


Кусково-ламана лінія

Отриману кусково-ламану функцію називають лінійним сплайном (Рис. 1.1).

Для отримання плавної кривої на дошці, на якій відмічені забитими цвяхами точки (x_i, y_i) , креслярі пропускають між цвяхами гнучку рейку або стальну лінійку.

Прогинаючись між сусідніми цвяхами рейка або лінійка описують плавну лінію, яку називають сплайном (spline - рейка) (Рис. 1.2).



Гнучка рейка

Якщо врахувати закони механіки, то виявиться, що кожна пара точок (x_{i-1}, y_{i-1}) та (x_i, y_i) з'єднується шматком деякої кубічної параболи

$$P_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = \overline{1, N}$$

Отже, кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ відповідає свій кубічний многочлен $P_i(x)$.

Означення 1.1. Сплайн-функцією степеня m з сіткою $\Delta = x_i, i = \overline{0, N}$ називають неперервну функцію, яка на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ збігається з деяким поліномом степеня m .

Сплайни, що мають зображення ([eqn:eq1]) називаються кубічними.

Найчастіше на практиці використовуються саме кубічні сплайни.

Зображення ([eqn:eq1]) має $4N$ числових параметри $a_i, b_i, c_i, d_i, i = \overline{1, N}$.

Насправді значущих параметрів значно менше. Це пояснюється тим, що кубічні многочлени задовольняють стиковочним умовам у вузлах $x_i, i = \overline{1, N-1}$.

Стиковочні умови у вузлах інтерполяції

1) Умова неперервності кубічного сплайна $S_3(x)$ в вузлах x_i виглядає так:

$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= P_{i+1}(x_i) \\ \parallel \quad \parallel \\ S_3(x_i - 0) &= S_3(x_i + 0) \\ i &= \overline{1, N-1} \end{aligned}$$

2) Умова гладкості кубічного сплайна $S_3(x)$ в вузлах x_i , тобто неперервності $S'_3(x)$ в вузлах x_i :

$$\begin{aligned}
P'_i(x_i) &= P'_{i+1}(x_i) \\
\parallel \quad \parallel \\
S'_3(x_i - 0) &= S'_3(x_i + 0) \\
i &= \overline{1, N-1}
\end{aligned}$$

При виконанні цієї умови лівостороння і правостороння дотичні в точці співпадають.) Крім того, вимагаємо неперервність 2-ої похідної $S''_3(x)$ у вузлах x_i :

$$\begin{aligned}
P''_i(x_i) &= P''_{i+1}(x_i) \\
\parallel \quad \parallel \\
S''_3(x_i - 0) &= S''_3(x_i + 0) \\
i &= \overline{1, N-1}
\end{aligned}$$

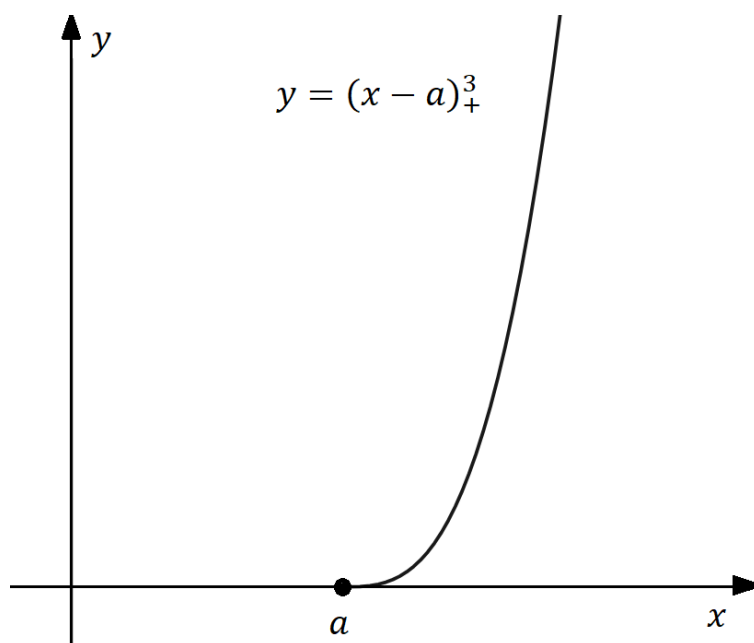
Таким чином в стиковочних вузлах $x_i, i = \overline{1, N-1}$ розривною може бути лише третя похідна $S'''_3(x)$. Внаслідок останнього зауваження для $S_3(x)$ має місце зображення,

$$S_3(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 + \sum_{k=1}^{N-1} \delta_i (x - x_i)_+^3$$

в якому використовуються усічені степеневі функції

$$\begin{aligned}
(x - a)_+^m &= \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ (x - a)^m, & x \geq a. \end{cases} \\
m &\geq 0
\end{aligned}$$

$(x - a)_+^3$ - двічі неперервно диференційована функція (Рис. 1.3).

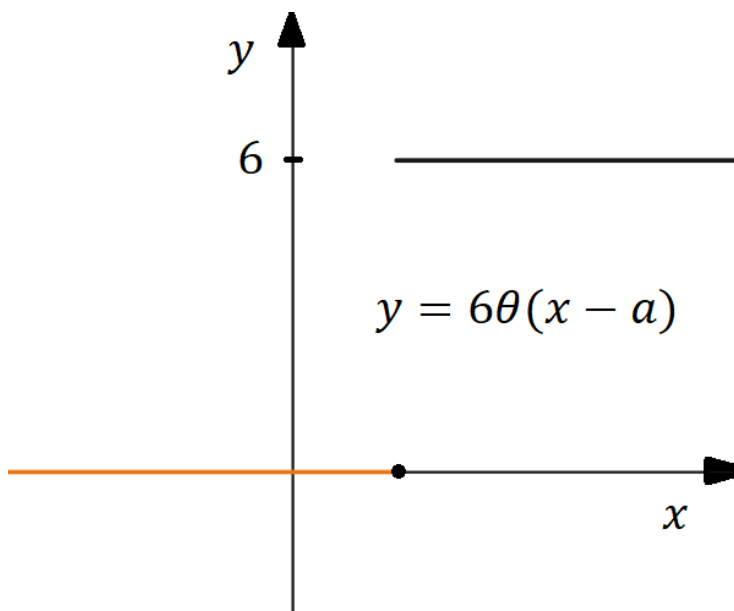


Усічена степенева функція

Її третя похідна

$$\frac{d^3}{dx^3}((x - a)_+^3) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 6, & x > a. \end{cases}$$

має в точці $x = a$ розрив 1-го роду із стрибком рівним 6 (див. Рис. 1.4).



Розрив зі стрибком

$$\theta(x - a) = (x - a)_+^0 = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

функція Хевісайда

Зображення $S'''_3(x)$ має вигляд

$$S'''_3(x) = 6a_1 + 6 \sum_{i=1}^{N-1} \delta_i \theta(x - x_i)$$

Таким чином у вузлах x_i , $S'''_3(x)$ має стрибки величиною $6\delta_i$.

Означення 1.2. Сплайн $S_3(x)$ називають кубічним сплайном мінімального дефекта або дефекта 1, оскільки з трьох похідних $S_3(x)$ розривною є лише третя похідна.

Зображення ([eqn:eq2]) сплайна $S_3(x)$ має $N + 3$ числових параметри $a_1, b_1, c_1, d_1, \delta_i, i = \overline{1, N-1}$.

Зображення кубічних сплайнів за допомогою базисних сплайнів

Кількість параметрів в зображенні ([eqn:eq2]) не може бути зменшена. Всі сплайни $S_3(x)$ з фіксованими вузлами $x_i, i = \overline{0, N}$ утворюють лінійний простір $L(\Delta)$ розмірності $N + 3$.

Насправді при великих N зображення ([eqn:eq2]) не є зручним для практичного використання. При віддаленні від точки $x = x_0$ кількість ненульових доданків зростає, що негативно впливає на стійкість обчислень. Більш зручним є зображення кубічних сплайнів за допомогою базисних В-сплайнів, яке запропоноване Шенбергом.

$$S_3(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \alpha_i B_i(x),$$

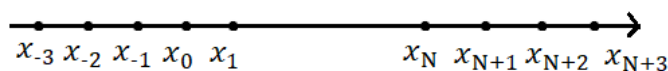
де $\{B_i(x)\}_{i=\overline{-1, N+1}}$ - базисні фінитні сплайни.

Ззовні відрізка $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ $B_i(x)$ обертається в 0.

Означення 1.3. Неперервну на R^1 функцію $\varphi(x)$ називають фінитною, якщо $\varphi(x)$ обертається в 0 ззовні деякого обмеженого відрізка $[a, b]$.

Означення 1.4. Носієм фінитної функції φ називають замикання множини точок $x \in R^1$, для яких $\varphi \neq 0$. Носій φ позначають символом $\text{supp } \varphi$ (support).

Носіями базисних сплайнів $B_i(x)$ служать відрізки $[x_{i-2}, x_{i+2}]$. Для коректності записів сітку $\Delta = \{x_i\}_{i=\overline{0, N}}$ потрібно доповнити ще шістьма додатковими вузлами x_{-3}, x_{-2}, x_{-1} та $x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}$.



Для кожного $x \in [x_0, x_N]$ в зображенні ([eqn:eq3]) фігурує не більше чотирьох ненульових доданків. В вузлах x_i таких доданків рівно 3.

Для зручності в подальшому будемо розглядати лише рівномірні сітки Δ з $x_i = ih, h > 0$.

Для рівномірної сітки базисні В-сплайни одержуються із функції

$$B(x) = \frac{1}{6}(2 - |x|)_+^3 - \frac{2}{3}(1 - |x|)_+^3$$

за допомогою перетворень гомотетії та переносу.

$$B_i(x) = B\left(\frac{x}{h} - i\right)$$

Графік $B(x)$ має форму капелюха, причому $B(-x) = B(x)$

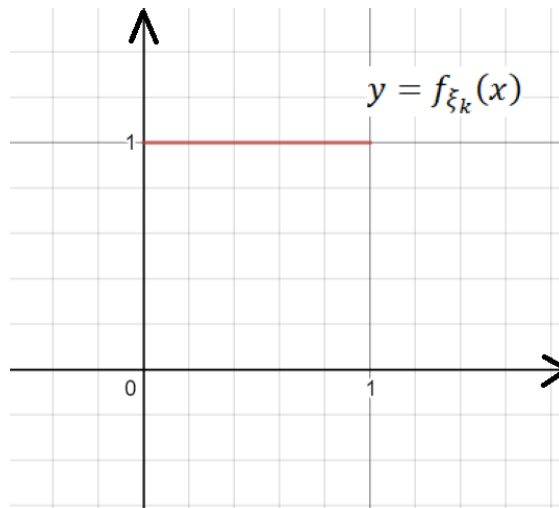
$$B(0) = \frac{2}{3}, B(\pm 1) = \frac{1}{6}, B(\pm i) = 0$$

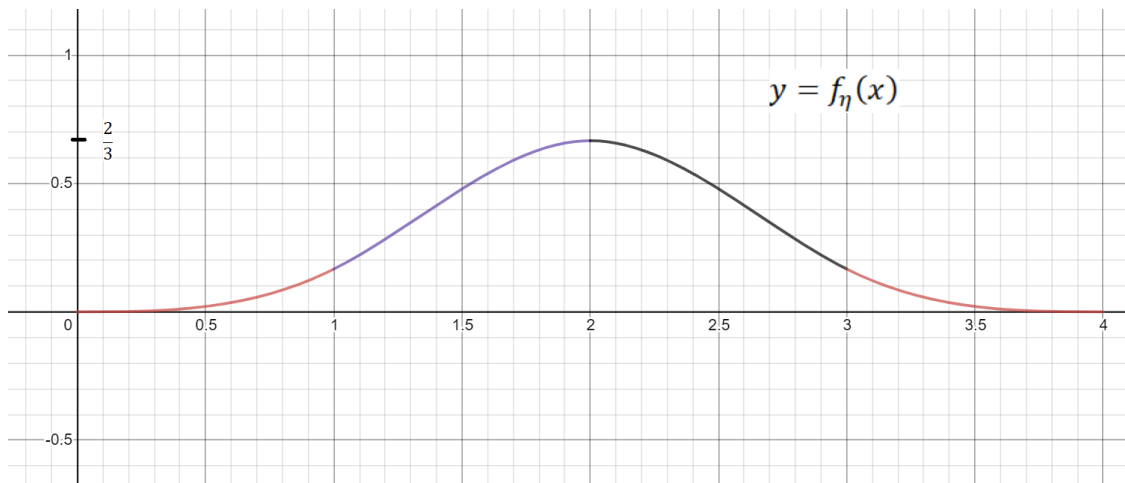
$$\text{при } i \geq 2, i \in \mathbb{N}$$

Функція $B(x - 2)$ має цікаву ймовірнісну інтерпретацію: $B(x - 2)$ є щільністю розподілу випадкової величини η , що є сумою чотирьох незалежних рівномірно розподілених на $[0,1]$ випадкових величин $\xi_k, k = \overline{1,4}$.

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$$

$$f_{\xi_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$





$$f_{\eta}(x) = B(x - 2) = f_{\xi}(x) * f_{\xi}(x) * f_{\xi}(x) * f_{\xi}(x)$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)g(t) dt \quad - \text{ операція згортки}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(x)dx = \int_{-2}^2 B(x)dx = \int_0^4 f_{\eta}(x)dx = 1$$

На рівномірній сітці з кроком $h = 1$ $B(x)$ з точністю до сталого множника і зсуву на цілу кількість кроків є єдиним кубічним сплайном, довжина носія якого дорівнює 4. Звідси слідує, що В-сплайни $B_i(x)$ $i = \overline{-1, N+1}$ утворюють базис в просторі кубічних сплайнів $L(\Delta)$. Кількість В-сплайнів в зображенні ([eqn:eq3]) дорівнює $N + 3$, що дорівнює розмірності $L(\Delta)$.

Для визначення параметрів α_i зображення ([eqn:eq3]) запишемо умови інтерполяції:

$$S_3(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, N}$$

Звідси, враховуючи ([eqn:eq3]) і ([eqn:eq4]), отримаємо

$$\frac{1}{6}\alpha_{i-1} + \frac{2}{3}\alpha_i + \frac{1}{6}\alpha_{i+1} = y_i, \quad i = \overline{0, N}$$

Для визначення $N + 3$ коефіцієнтів ми маємо $N + 1$ рівняння. Потрібно додати ще два рівняння з параметрами α_i . Для отримання таких рівнянь можна взяти похідні $y'(a), y'(b)$ інтерпольованої функції в точках $a = x_0$ і $b = x_N$.

Враховуючи значення похідних $B(x)$ в цілочисельних точках

$$B'(0) = 0, \quad B'(-1) = \frac{1}{2}, \quad B(+1) = -\frac{1}{2}$$

$$B(\pm i) = 0, \quad i \geq 2, \quad i \in N$$

і зв'язок $B_i(x)$ з $B(x)$, отримаємо два додаткових рівняння з параметрами α :

$$\frac{\alpha_{-1} - \alpha_1}{2h} = y'(a),$$

$$\frac{\alpha_{N-1} - \alpha_{N+1}}{2h} = y'(b).$$

З цих рівнянь знайдемо вирази для α_{-1} та α_{N+1}

$$\alpha_{-1} = \alpha_1 + 2hy'(a),$$

$$\alpha_{N+1} = \alpha_{N-1} - 2hy'(b)$$

та підставимо їх в перше та останнє рівняння системи ([eqn:eq5]). Після цього отримаємо тридіагональну систему з діагональною перевагою, що має $N + 1$ рівняння відносно параметрів $\alpha_i, i = \overline{0, N}$

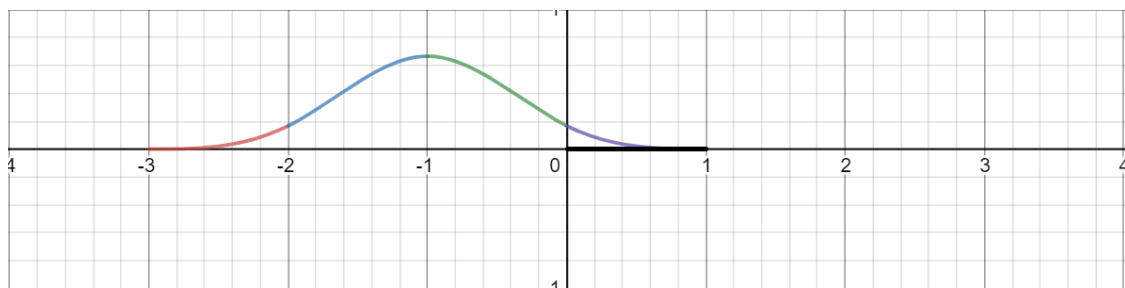
$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_1 &= y_0 + \frac{1}{3}hy'(a) \\ \frac{1}{6}\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{6}\alpha_2 &= y_1 \\ \frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{1}{6}\alpha_3 &= y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{6}\alpha_{N-2} + \frac{2}{3}\alpha_{N-1} + \frac{1}{6}\alpha_N &= y_{N-1} \\ \frac{1}{3}\alpha_{N-1} + \frac{2}{3}\alpha_N &= y_N - 2hy'(b) \end{aligned}$$

Матриця отриманої СЛАР має вигляд:

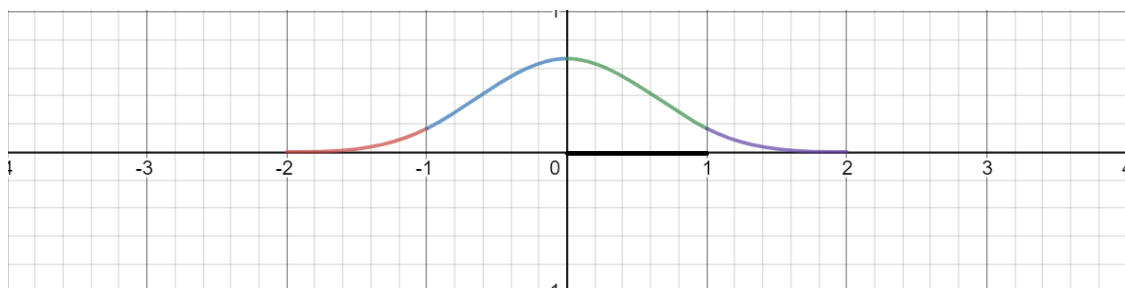
$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ & & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Систему ([eqn:eq6]) можна розв'язати методом прогонки за $8N + 6$ арифметичних операцій.

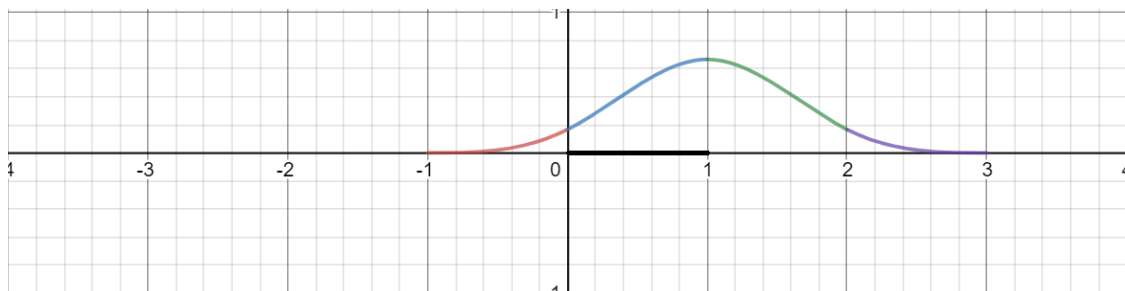
Схематичний вигляд графіків базисних сплайн-функцій $B_{i-1}(x)$, $B_i(x)$, $B_{i+1}(x)$, $B_{i+2}(x)$ які мають ненульові значення на $[x_i, x_{i+1}]$.



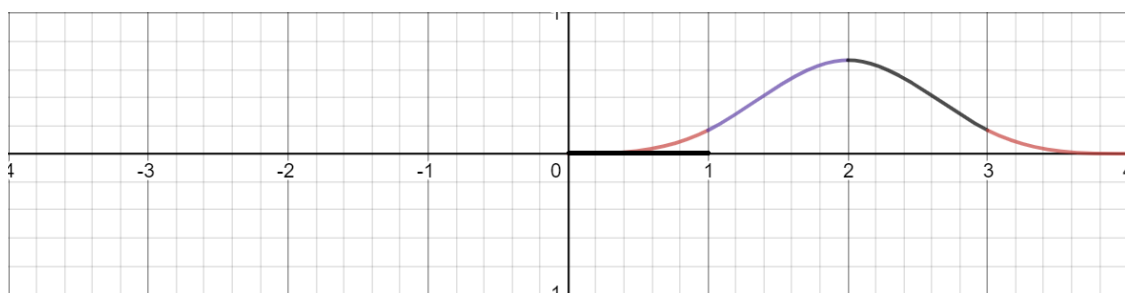
$B_{i-1}(x)$



$B_i(x)$



$B_{i+1}(x)$



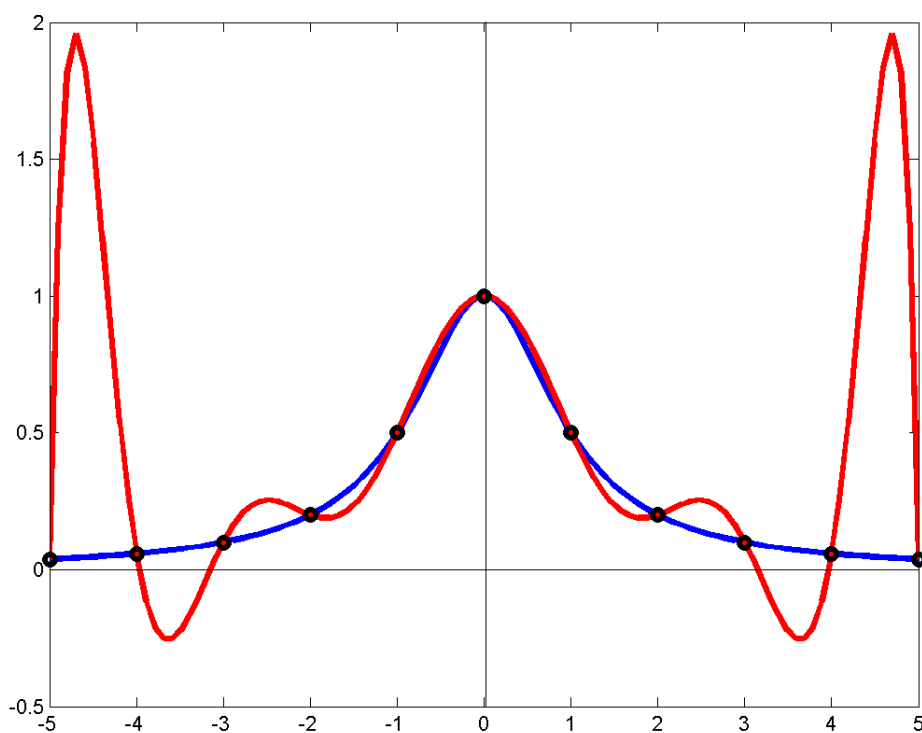
$B_{i+2}(x)$

Властивості інтерполяційних сплайнів $S_3(x)$

Теорема 1.1. (Holyday) Серед всіх функцій $\varphi(x) \in C^2[a, b]$, що в вузлах сітки Δ (необов'язково рівномірної) інтерполює значення y_i $\varphi(x_i) = y_i, i = \overline{0, N}$ і, крім того, $\varphi'(a) = y'(a)$ $\varphi'(b) = y'(b)$

інтерполяцій кубічний сплайн $S_3(x)$ мінімізує квадратний функціонал: $J(\varphi) = \int_a^b |\varphi''(x)|^2 dx$.

Теорема забезпечує середню квадратичну мінімізацію кривизни інтерполуючої функції $\varphi(x)$, тобто відсутність пульсацій при інтерполяції гладких функцій. Таким чином маємо суттєву перевагу сплайн-інтерполяції над поліноміальною інтерполяцією з рівновіддаленими вузлами, про що свідчить приклад функції Рунге (Рис. 1.11).



Рунге

Наступна теорема дає оцінку наближення гладкої функції $f \in C^4[a, b]$, де $C^4[a, b]$ - простір чотири рази неперервно диференційованих функцій на проміжку $[a, b]$. Норма в $C^4[a, b]$ визначається так:

$$\|f\|_{C^4[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} (|f(x)| + |f^{IV}(x)|)$$

Теорема 1.2. Якщо кубічний сплайн $S_3(f, x)$ інтерполює гладку функцію $f(x)$ на рівномірній сітці $\Delta = \{x_i = a + ih, i = \overline{0, N}\} = (b - a) \cdot N^{-1}$ і крім того $S'_3(f, a) = f'(a)$, $S'_3(f, b) = f'(b)$,

то відхилення сплайна $S_3(f, x)$ від функції $f(x)$ допускає оцінку $|f(x) - S_3(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 \cdot \|f^{IV}\|_{C[a,b]}$, де $\|f^{IV}\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}|, \frac{5}{384} = 0,0130208(3)$.

Похідні $S_3^r(f, x)$ сплайна $S_3(f, x)$, ($r = 1; 2; 3$) наближають відповідні похідні функції $f(x)$,

$$|f^r(x) - S_3^r(f, x)| \leq K_r h^{4-r} + \|f^{IV}\|_{C[a,b]},$$

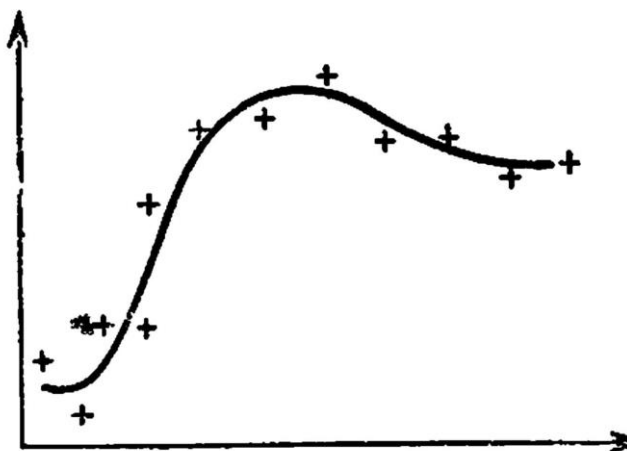
де $r = 1; 2; 3$, K_r — деякі константи.

Згладжування експериментальних даних

Методи сплайн-функцій можуть бути використані для згладжування "зашумлених" значень гладкої функції

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$$

Замість сильно осцилюючої кривої (oscillation - коливання) треба отримати криву з плавною поведінкою, але яка лишається близькою до значень y_i в точках з абсцисами x_i .



Для згладжування даних використовується квадратичний функціонал

$$J_1(\varphi) = \int_a^b |\varphi''(x)|^2 dx + \sum_{i=0}^N \rho_i^{-1} (\varphi_i - y_i)^2,$$

де $\varphi(x_i) = \varphi_i$, $\rho_i > 0$ - параметри регуляризації.

Має місце узагальнення теореми Holyday.

Теорема 1.3. Серед двічі непервно диференційованих на $[a, b]$ функцій $\varphi(x)$, таких, що $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$. Мінімум функціонала $J_1(\varphi)$ досягається на кубічному сплайні.

Визначення згладжуючого сплайна потребує розв'язання СЛАР з п'яти-діагональною матрицею. Такі СЛАР розв'язуються також методом прогонки.

Інтерполяційні кубічні сплайни мають яскраво виражені локальні властивості на відміну від поліноміальної інтерполяції.

Поява в деякому вузлі x_i суттєвого відхилення від точного значення функції, що інтерполюється, породжує збурення у вигляді швидкозатухаючої хвилі. Вплив цієї хвилі є відчутним лише в малому околі точки x_i .

Така властивість інтерполяційних сплайнів обумовлена діагональною перевагою матриці СЛАР ([eqn:eq6]), з якої визначаються параметри сплайна α_i .

На основі локальних властивостей кубічних інтерполяційних сплайнів з'явилася на початку 70 - их років XX століття концепція локальних кубічних сплайнів. Ці сплайни не є інтерполяційними. Від інтерполяційних сплайнів локальні сплайни відрізняються на величину $O(h^4)$, яка є співставна з точністю наближення функції інтерполяційним сплайном.

Локальні кубічні сплайни

Асимптотичні формули

Для визначення параметрів α_i локального сплайна не потрібно розв'язувати СЛАР. Значення α_i визначаються асимптотичною формулою

$$\alpha_i = \frac{4}{3}y_i - \frac{1}{6}(y_{i-1} + y_{i+1})$$

Якщо $y_i, i = 0, N$ є значеннями деякого кубічного многочлена $P_3(x)$ на рівномірній сітці, то кубічний сплайн $S_3(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i B_i(x)$ збігається з $P_3(x)$. Якщо y_i є значеннями функції $f \in C^4[a, b]$, то локальний сплайн буде відхилятися від $f(x)$ на величину $O(h^4)$.

Для обґрунтування асимптотичної формули ([eqn:eq7]) розглянемо задачу сплайн-апроксимації на всій дійсній вісі. Для довільного малого $h > 0$ розглянемо сітку рівновіддалених вузлів на дійсній вісі.

$$\Delta(h) = \{x_k = kh, k \in \mathbb{Z}\}, \text{де } \mathbb{Z} - \text{множина цілих чисел.}$$

Нехай $f(x)$ чотири рази неперервно-диференційовна на $\mathbb{R}^1$ функція.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^1} (|f(x)| + |f^{IV}(x)|) = M < +\infty,$$

Розглянемо задачу сплайн-інтерполяції функції $f(x)$ на сітці $\Delta(h)$, тобто визначення сплайн-функції

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k B_k(x)$$

такої, що

$$S(x_k) = f(x_k) \stackrel{\text{def}}{=} y_k, k \in \mathbb{Z}$$

Для визначення параметрів α_k зображення ([eqn:eq9]) потрібно розв'язати нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{1}{6}\alpha_{k-1} + \frac{2}{3}\alpha_k + \frac{1}{6}\alpha_{k+1} = y_k, k \in \mathbb{Z}$$

Помноживши кожне рівняння цієї системи на 6, отримаємо:

$$\alpha_{k-1} + 4\alpha_k + \alpha_{k+1} = 6y_k$$

Для дослідження розв'язності системи ([eqn:eq10]) розглянемо системи більш загального вигляду

$$\alpha_{k-1} - 2A\alpha_k + \alpha_{k+1} = y_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

де послідовність $\{y_k, k \in \mathbb{Z}\}$ належить $l_\infty(\mathbb{Z})$, тобто

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |y_k| = M < +\infty,$$

A — комплексна константа. Зауважимо, що систему ([eqn:eq11]) можна було б записати у вигляді

$$\alpha_{k-1} + a\alpha_k + \alpha_{k+1} = y_k.$$

Використання замість множника a множника $2A$ дозволяє спростити вирази, які з'являться при дослідженні розв'язності системи ([eqn:eq11]).

Наступна теорема визначає критерій однозначної розв'язності системи ([eqn:eq11]) в просторі $l_\infty(Z)$. Розв'язок $\{\alpha_k, k \in Z\}$ системи ([eqn:eq11]), що належить $l_\infty(Z)$ будемо називати обмеженим.

Теорема 2.1. (Городнього М.Ф.) Для того, щоб система ([eqn:eq11]) мала єдиний обмежений розв'язок, необхідно і достатньо, щоб $A \in C^1 \setminus [-1; 1]$.

Перед доведенням цієї теореми введемо зображення послідовностей із $l_\infty(Z)$ у вигляді формальних рядів Лорана (назвемо його ФРЛ - зображенням Дороговцева А.Я.).

$$\{y_k, k \in Z\} = \sum_{k \in Z} y_k z^k \stackrel{\text{def}}{=} \{y\},$$

де z — комплексна змінна, $k \in Z$.

За допомогою ФРЛ - зображення систему ([eqn:eq11]) можна записати так

$$(z^{-1} - 2A + z)\{\alpha\} = \{y\}$$

Proof. Для доведення теореми спочатку покажемо, що при $A \neq \pm 1$ довільні лінійні комбінації двох нескінченних геометричних прогресій

$$\sum_{k \in Z} (c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k) z^k$$

де λ_1, λ_2 є коренями рівняння

$$\lambda^{-1} - 2A + \lambda = 0,$$

є розв'язком однорідної системи

$$(z^{-1} - 2A + z)\{\alpha\} = \{0\}$$

Корені рівняння ([eqn:eq14]) є оберненими функціями Жуковського

$$\lambda_{1,2}(A) = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$$

При $A \in C^1 \setminus [-1; 1]$ функцію $\sqrt{A^2 - 1}$ визначаємо так, щоб при $A > 1$ вираз $\sqrt{A^2 - 1}$ був додатним. Для всіх $A \in C^1 \setminus [-1; 1]$

$$\lambda_1(A) = A + \sqrt{A^2 - 1}$$

має модуль більший 1, відповідно $\lambda_2(A) = A - \sqrt{A^2 - 1}$ має модуль менший 1. Таким чином при $k \rightarrow +\infty$ геометрична прогресія $\lambda_1^k(A)$ прямує до ∞ , а прогресія $\lambda_2^k(A)$ прямує

до нуля. При $k \rightarrow -\infty$ ці прогресії міняються місцями, а саме $\lambda_1^k(A) \rightarrow_{k \rightarrow -\infty} 0$, а $\lambda_2^k(A) \rightarrow \infty$.

Отже, нетривіальні лінійні комбінації прогресій $\lambda_1^k(A)$ є необмеженими при $A \in C^1 \setminus [-1; 1]$. При $A \in (-1; 1)$ корені рівняння ([eqn:eq14]) є комплексно спряженими

$$\lambda_{1,2}(A) = A \pm i\sqrt{1 - A^2}$$

і мають модулі рівні 1. Отже, при $A \in (-1; 1)$ обидві прогресії $\lambda_1^k(A)$ і $\lambda_2^k(A)$ є обмеженими і таким чином однорідна система ([eqn:eq15]), а отже і неоднорідна система ([eqn:eq12]) при $A \in (-1; 1)$ не мають єдиного обмеженого розв'язку. В особливих випадках рівняння ([eqn:eq14]) має кратні корені $\lambda_1(1) = \lambda_2(1) = 1$ і $\lambda_1(-1) = \lambda_2(-1) = -1$. При $A = 1$ система ([eqn:eq15]) має розв'язок

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_1 + c_2 k) z^k$$

При $c_1 \neq 0$ і $c_2 = 0$ цей розв'язок обмежений. Аналогічно при $A = -1$ система ([eqn:eq15]) має розв'язок

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_1 + k c_2) (-1)^k z^k$$

При $c_1 \neq 0$ і $c_2 = 0$ цей розв'язок обмежений.

Таким чином при $A \in [-1; 1]$ однорідна система ([eqn:eq15]) має нетривіальні обмежені розв'язки.

Доведемо тепер, що при $A \in C^1 \setminus [-1; 1]$ всі розв'язки системи ([eqn:eq15]) мають зображення ([eqn:eq13]). Нехай

$$\{\beta\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k z^k$$

деякий розв'язок однорідної системи (15). Для довільного $m \in \mathbb{N}$ усичення системи ([eqn:eq15]) розмірності $N = 2m + 1$.

$$\begin{pmatrix} -2A & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & -2A & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -2A & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -2A & 1 \\ & & & 0 & 1 & -2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{-m} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_{-m-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -\beta_{m+1} \end{pmatrix}$$

Вектор

$$\vec{\alpha}_N = (\beta_{-m} \quad \beta_{-m+1} \quad \dots \quad \beta_m)^T$$

очевидно є розв'язком системи ([eqn:eq16]).

Враховуючи, що визначник матриці системи ([eqn:eq16]) дорівнює $-U_N(A)$, де $U_N(x)$ - многочлен Чебишова 2-го роду (див. ст. 18) і $U_N(A) \neq 0$, $A \in C^1 \setminus [-1; 1]$, система ([eqn:eq16]) є однозначно розв'язною.

В такому разі розв'язок ([eqn:eq16]) є усіченням послідовності виду ([eqn:eq13])

$$\alpha_k = c_1 \lambda_1(A)^k + c_2 \lambda_2(A)^k, \quad k = \overline{-m, +m}$$

Параметри c_1 і c_2 можна визначити із системи,

$$\begin{cases} c_1 \lambda_1(A)^{-m-1} + c_2 \lambda_2(A)^{-m-1} = \beta_{-m-1} \\ c_1 \lambda_1(A)^{m+1} + c_2 \lambda_2(A)^{m+1} = \beta_{m+1} \end{cases}$$

яка є однозначно розв'язною, оскільки

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(A)^{-m-1} & \lambda_2(A)^{-m-1} \\ \lambda_1(A)^{m+1} & \lambda_2(A)^{m+1} \end{vmatrix} = \lambda_1(A)^{-2(m+1)} - \lambda_1(A)^{2(m+1)} \neq 0$$

$$(\lambda_2(A)^{-1} = \lambda_1(A))$$

Враховуючи, що $m \in N$ довільне, значення констант c_1 і c_2 можна визначити із зображення ([eqn:eq17]) для β_{k_1} і β_{k_2} , де k_1 і k_2 два різних цілих числа. Якщо покласти $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, то константи c_1 , c_2 можна визначити з системи

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \beta_0 \\ c_1 \lambda_1(A) + c_2 \lambda_2(A) = \beta_1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1(A) & \lambda_2(A) \end{vmatrix} = \lambda_2(A) - \lambda_1(A) = -2\sqrt{A^2 - 1} \neq 0$$

Таким чином константи c_1 і c_2 не залежать від вибору $m \in N$. Отже, довільний розв'язок однорідної системи ([eqn:eq15]) має зображення ([eqn:eq13]). В такому разі з припущення обмеженості розв'язку однорідної системи ([eqn:eq15]) слідує його тривіальність. Отже, ми встановили єдиність обмеженого розв'язку однорідної системи ([eqn:eq15]).

Для завершення доведення теореми Городнього достатньо визначити зображення обмеженого розв'язку системи ([eqn:eq12]) для довільної послідовності $\{y\} \in l_\infty(Z)$.

Знайдемо спочатку зображення обмеженого розв'язку системи ([eqn:eq15]), права частина якої послідовність символів Кронекера

$$\delta_{k_0} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } k = 0 \\ 0, \text{ для всіх } k \in Z, k \neq 0. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи виглядають так

$$\alpha_{k-1} - 2A\alpha_k + \alpha_{k+1} = \delta_{k_0}, \quad k \in Z$$

ФРЛ-зображення розв'язку системи виглядає так

$$\{\varepsilon\} = C \cdot \sum_{k \in Z} \lambda_1(A)^{-|k|} z^k,$$

де C - деяка константа. Оскільки $\lambda_2(A) = \lambda_1(A)^{-1}$ є коренем рівняння ([eqn:eq14]), то $\{\varepsilon\}$ задовольняє рівнянням системи ([eqn:eq18]) для всіх $k \neq 0$.

Для $k = 0$ маємо

$$C(\lambda_1(A)^{-1} - 2A + \lambda_1(A)^{-1}) = 1$$

$$C(2\lambda_2(A) - 2A) = 1$$

Звідси знаходимо значення C

$$C = -\frac{1}{2}(A^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

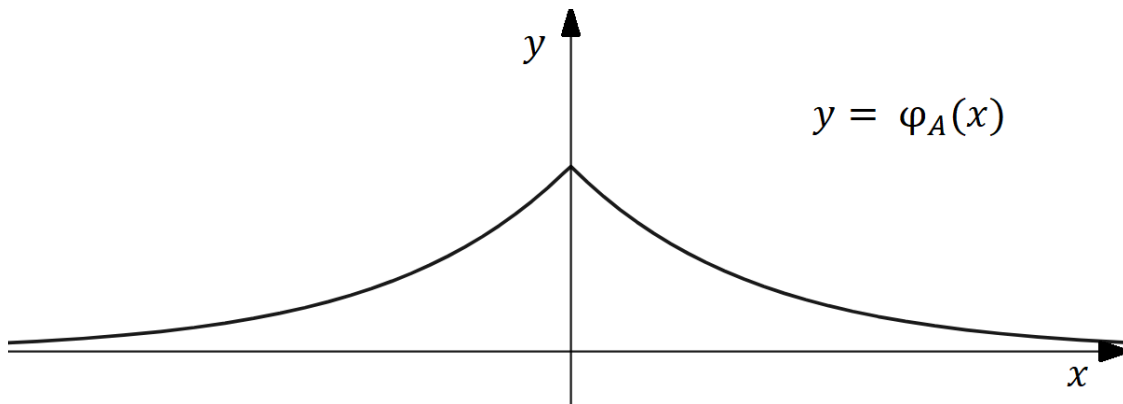
Таким чином ФРЛ-зображення обмеженого розв'язку системи ([eqn:eq18]) має вигляд

$$\{\varepsilon\} = -\frac{1}{2}(A^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} \lambda_1(A)^{-|k|} z^k$$

Якщо ε розглядати як функцію задану на сітці $\Delta(1)$, то її можна продовжити до функції неперервній на всій дійсній вісі (Рис. 2.1). Модуль цієї функції має вигляд

$$\varphi_A(x) = C_1 e^{-\mu|x|},$$

де $C_1 = \frac{1}{2}|A^2 - 1|^{-\frac{1}{2}}$, $\mu = \ln(|\lambda_1(A)|)$.



Обмежені розв'язки систем

$$x_{k-1} - 2Ax_k + x_{k+1} = \delta_{kj}, \quad k, j \in Z$$

можна виразити через $\{\varepsilon\}$ формальним множенням на z^j

$$\{\varepsilon_j\} = \{\varepsilon\}z^j = -\frac{1}{2}(A^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in Z} \lambda_1(A)^{-|k-j|} z^k$$

Маючи зображення $\{\varepsilon_j\}$ можна записати зображення для обмеженого розв'язку системи ([eqn:eq12])

$$\{\alpha\} = \sum_{j \in Z} y_j \{\varepsilon_j\}$$

Для кожного $k \in Z$ значення α_k визначається сумою ряду

$$\{\alpha_k\} = -\frac{1}{2}(A^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j \in Z} y_j \lambda_1(A)^{-|k-j|}$$

Якщо $\{y\} \in l_\infty(Z)$, то $\exists M > 0: |y_k| \leq M$

$$|\alpha_k| \leq C_1 M \sum_{k \in Z} e^{-k\mu} = C_1 M \frac{1 + e^{-\mu}}{1 - e^{-\mu}}$$

Таким чином з умови $\{y\} \in l_\infty(Z)$ слідує $\{\alpha\} \in l_\infty$.

Теорему Городнього доведено. $\square$

Зауваження 2.1. Для дійсних значень A умова $A \in C^1 \setminus [-1; 1]$ еквівалентна діагональній перевазі для матриці системи ([eqn:eq12]).

Нагадаємо, що скінченновимірні матриці з діагональною перевагою за теоремою Адамара є невироджені.

З доведення теореми слідує, що для уявних значень параметра A матриці виду

$$\begin{pmatrix} -2A & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & -2A & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & -2A & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & & & 1 & -2A & 1 \\ & & & 0 & 1 & -2A \end{pmatrix}$$

довільної скінченної розмірності є невироджені.

Умови збіжності рядів ([eqn:eq19]), що визначають обмежений розв'язок системи ([eqn:eq12]) можна суттєво ослабити. Ряди ([eqn:eq19]) збігаються не тільки для $\{y\} \in l_\infty(Z)$, але і для послідовностей $\{y\}$, для яких $|y_k|$ можуть необмежено зростати при $k \rightarrow \pm\infty$. Для збіжності рядів ([eqn:eq19]) допустиме необмежене зростання $|y_k|$ при $k \rightarrow \pm\infty$ при умові

$$\sum_{k \in Z} |y_k| e^{-\mu|k|} < +\infty$$

Для виконання умови ([eqn:eq20]) допустиме зростання з швидкістю геометричної прогресії

$$|y_k| \leq C e^{\tau|k|}, \quad C = \text{const} > 0$$

для всіх τ таких, що $0 < \tau < \mu$.

Зокрема допустиме степеневе зростання

$$|y_k| \leq C(1 + |k|^m), \quad C, m = \text{const} > 0$$

Зауваження 2.2. Для необмежених послідовностей $\{y\}$, для яких збігаються ряди ([eqn:eq19]), необмеженими будуть і відповідні послідовності $\{\alpha\}$. Розв'язки системи ([eqn:eq12]) також будуть необмеженими і задовольнятимуть умові ([eqn:eq20]).

Простір $\zeta(\mu)$ всіх послідовностей $\{y\}$, що задовольняють умові ([eqn:eq20]), є класом єдиності розв'язків системи ([eqn:eq12]), тобто для кожної послідовності $\{y\} \in \zeta(\mu)$ в $\zeta(\mu)$ існує єдина послідовність $\{\alpha\}$, що є розв'язком системи ([eqn:eq12]).

Згідно теореми Городнього простір $l_\infty(Z)$ також утворює клас єдиності розв'язків системи ([eqn:eq12]).

В $\zeta(\mu)$ виділимо простір Π що складається з послідовностей значень алгебраїчних многочленів

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad a_k \in C^1, n \in N$$

на рівномірній сітці $\Delta(1)$ з кроком $h = 1$.

Оскільки многочлени степеня n однозначно визначаються своїми значеннями в $n + 1$ точці, то послідовності з Π можна ототожнювати з відповідними алгебраїчними многочленами.

На алгебраїчних многочленах степеня n систему ([eqn:eq12]) можна записати так

$$P_n(x-1) - 2AP_n(x) + P_n(x+1) = Q_n(x),$$

де $x \in R^1$, $Q_n(x)$ заданий многочлен, $P_n(x)$ невідомий многочлен.

Розв'язання рівняння ([eqn:eq21]) відносно $P_n(x)$ потребує розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з $n + 1$ рівняння, що є суттєво простішою задачею, ніж знаходження сум рядів ([eqn:eq19]).

Матриця такої СЛАР є верхньою трикутною.

Так при $n = 3$ рівняння зв'язку між $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ та $Q_3(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ виглядають так

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 - \\ & - 2A(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + a_3(x+1)^3 = \\ & = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2(1-A)a_0 + 2(1-A)a_2 = b_0, \\ 2(1-A)a_1 + 6a_3 = b_1, \\ 2(1-A)a_2 = b_2, \\ 2(1-A)a_3 = b_3 \end{cases}$$

Асимптотичні формули для повільно зростаючих розв'язків різницевого типу ([eqn:eq12])

Розглянуті властивості повільно зростаючих розв'язків системи ([eqn:eq12]) дозволяють побудувати наближені чисельні методи її розв'язання, які є аналогом асимптотичних формул для параметрів кубічного сплайна.

Перепишемо систему ([eqn:eq12]) у вигляді більш зручному для отримання таких формул

$$a_{k-1} + Pa_k + a_{k+1} = y_k, \quad k \in Z$$

де $P \in C^1$.

Якщо покласти $P = -2A$, то отримаємо систему ([eqn:eq12]).

Внаслідок теореми Городнього при $P \in C^1 \setminus [-2; 2]$ має єдиний повільно зростаючий розв'язок.

Припустимо, що послідовність $\{a_k, k \in Z\}$ розв'язок системи ([eqn:eq22]) є послідовністю значень на сітці $\Delta(h) = \{kh, k \in Z\}$ деякої гладкої функції з $C^{IV}(R^1)$, для якої

$$\sup_{x \in R^1} (|f(x)| + |f^{IV}(x)|) < +\infty$$

В такому разі задана послідовність правих частин $\{y_k, k \in Z\}$ точок буде являти собою значення на сітці $\Delta(h)$ функції

$$g(x) = f(x-h) + Pf(x) + f(x+h) \in C^4(R^1).$$

Розглянемо розклад функції $f(x)$ в околі точки x_k

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_k)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_k)(x - x_k)^3 + \\ & + \frac{1}{24}f^{IV}(x_k)(x - x_k)^4 + o((x - x_k)^4) \end{aligned}$$

В такому разі будемо мати

$$\begin{aligned} y_k = & f(x_k - h) + Pf(x_k) + f(x_k + h) = \\ = & (P + 2)f(x_k) + f''(x_k)h^2 + \frac{1}{12}f^{IV}(\xi_1)h^4 \end{aligned}$$

де $\xi_1 \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$

$$y_{k-1} + y_{k+1} = 2(P+2)f(x_k) + (P+4)f''(x_k)h^2 + \frac{1}{12}(P+16)f^{IV}(\xi_2)h^4,$$

де $\xi_2 \in [x_{k-2}, x_{k+2}]$.

Віднімаючи від рівняння ([eqn:eq24]) рівняння ([eqn:eq23]) помножене на 2, отримаємо

$$y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = (P+2)f''(x_k)h^2 + \frac{1}{12}(P+14)f^{IV}(\xi_3)h^4,$$

де $\xi_3 \in [x_{k-2}, x_{k+2}]$.

Звідси знайдемо вираз $f''(x_k)h^2$

$$f''(x_k)h^2 = \frac{1}{P+2}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) - \frac{P+14}{12(P+2)}f^{IV}(\xi_3)h^4$$

Тоді з ([eqn:eq23]) з урахуванням ([eqn:eq25]) отримаємо

$$\begin{aligned} a_k = f(x_k) &= \frac{1}{P+2} \left(y_k - f''(x_k)h^2 - \frac{1}{12}f^{IV}(\xi_1)h^4 \right) = \\ &= \frac{1}{P+2} \left(y_k - \frac{1}{P+2}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) - \frac{P+14}{12(P+2)}f^{IV}(\xi_3)h^4 - \frac{1}{12}f^{IV}(\xi_1)h^4 \right) \\ &= \frac{1}{(P+2)^2} ((P+4)y_k - (y_{k+1} + y_{k-1})) - \frac{P+8}{6(P+2)^2}f^{IV}(\xi_4)h^4, \quad k \in Z. \end{aligned}$$

Зокрема для $P = 4$ для системи

$$a_{k-1} - 4a_k + a_{k+1} = 6y_k$$

отримаємо асимптотичні формули

$$a_k = \frac{4}{3}y_k - \frac{1}{6}(y_{k+1} + y_{k-1}) - \frac{1}{18}f^{IV}(\xi_4)h^4$$

для параметрів кубічних сплайнів.

Використаємо асимптотичні формули для побудови раціональних сплайнів $S_r(x)$, які подібно кубічним сплайнам породжуються базисними B_r - сплайнами

$$S_r(x) = \sum_{k \in Z} \alpha_k B_{r,k}(x),$$

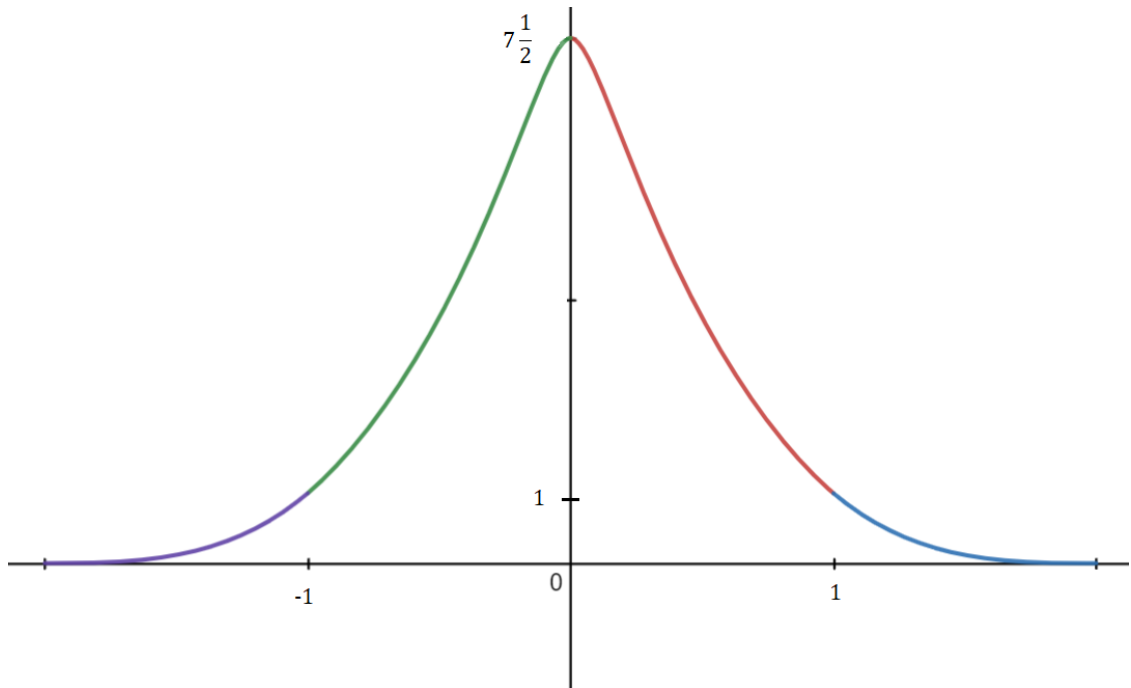
де

$$B_{r,k}(x) = B_r\left(\frac{x}{h} - k\right),$$

$$B_r(x) = \begin{cases} \left(\frac{8}{r} - 1\right) \left((1 - r(1 - |x|)^3)^{-1} - \frac{1}{2} (1 - r(1 - |x|)^3)^{-1} - \frac{1}{2} \right), & |x| \leq 1 \\ \left(\frac{8}{r} - 1\right) \left(\left(1 - r \left(1 - \frac{|x|}{2} \right)^3 \right)^{-1} - 1 \right), & 0, |x| \geq 2 \end{cases}$$

r - додатний параметр, $0 < r < 1$.

Як і $B(x)$ функція $B_r(x)$ також є двічі непервно диференційовною функцією, яка при $|x| \geq 2$ обертається в нуль. Графік $B_r(x)$ є подібним графіку $B(x)$. На рисунку 2.2 зображено графік $B_r(x)$ при $r = \frac{1}{2}$.



Оскільки

$$B_r(0) = \frac{8 - r}{2(1 - r)} \stackrel{\text{def}}{=} p,$$

$$B_r(-1) = B_r(1) = 1,$$

то параметри $a_k, k \in Z$ інтерполяційного сплайна $S_r(x)$ задовольняють нескінченній трьохдіагональній системі

$$a_{k-1} + pa_k + a_{k+1} = f(x_k),$$

де $f(x_k)$ значення інтерпольованої функції $f(x)$ на рівномірній сітці $\Delta(h)$.

Застосувавши асимптотичні формули для визначення параметрів a_k , отримаємо квазіінтерполяційний сплайн $S_3(x)$.

Для перевірки отриманих теоретичних результатів розглянуто тестовий приклад, в якому визначається максимальне відхилення квазіінтерполяційного сплайна $S_r(x)$ від апроксимованої функції $y = \ln(1 + x)$ на відрізку $[0; 1]$. Сплайн $S_r(x)$ будується на сітці $\Delta(h)$ з кроком $h = 0,1$.

Результати наведені в таблиці.

p	r	β
4, 1	0, 028	$1, 76 \cdot 10^{-5}$
4, 5	0, 125	$1, 46 \cdot 10^{-5}$
5, 5	0, 3	$8, 22 \cdot 10^{-6}$
7, 5	0, 5	$3, 28 \cdot 10^{-6}$
10, 5	0, 65	$2, 05 \cdot 10^{-6}$

$$\beta = \beta(r) = \max_{x \in [0; 1]} |\ln(1 + x) - S_r(x)|$$

Висновки

- 1) Отримані результати обчислень для різних значень r ілюструють ефективність розв'язання трьохдіагональних систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою локальних асимптотичних формул.
- 2) При r близьких до 1 точність асимптотичних формул покращується.
- 3) В подальшому отримані результати можуть бути використані в задачах стиску об'єму інформації та обробки зображень.

Література

- [1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. (Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.). Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
- [2] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
- [3] Кашпіровський О. І. Про локальні апроксимації обмежених розв'язків нескінченних систем різницевих рівнянь / О. І. Кашпіровський, О. В. Семенів, В. О. Яценко // Наукові записки Національного університету «Києво-Могилянська академія». — 2007. — Т. 61 : Фізико-математичні науки. — С. 17–22
- [4] Городній М. Ф. Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі. – Автореф, дис. ... докт. фіз. - мат. наук. – К., 2004. – 32 с.
- [5] Andrii Cheredarchuk, Oleksii Kashpirovskiy, Galyna Kriukova, Maksym Sarana. Towards Image Processing Based on System of Difference Equations. 2019 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS).
- [6] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983. – 384 с.