

ЦИКЛИЧНОСТЬ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ С МОНОПСОНИЧЕСКИМ РЫНКОМ ТРУДА

Ключевые слова: моделирование бизнес-циклов, система дифференциальных уравнений, бифуркация, устойчивый фокус.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование особенностей переходной экономики в последние годы показало, с одной стороны, распространенность монопсонических механизмов формирования заработной платы [1], с другой — существенное влияние этих механизмов на развитие основных макроэкономических процессов. Анализ моделей экономической динамики позволил сделать вывод, что при постоянных ценах на товары и услуги монопсония (монополизм потребителя) на рынке труда приведет к стабилизации в точке равновесия между оплатой труда и потребительским спросом [2]. Такой стабилизации будет предшествовать экономический спад или рост (в зависимости от начального состояния системы), темпы которого будут замедляться по мере приближения к равновесному состоянию. Для системы с монопсоническим рынком труда характерны небольшая (теоретически — нулевая) безработица в ее классическом понимании (превышение предложения труда над спросом), неравномерное (во времени) сокращение занятости с опережающим (по темпам) уменьшением оплаты труда при спаде и уменьшение доли заработной платы в ВВП в условиях экономического роста. Монополист-работодатель, как следует из проведенного анализа моделей, не заинтересован в повышении производительности труда, особенно если это требует дополнительных затрат.

Следует отметить, что данные выводы были получены при двух существенных предположениях, не вполне свойственных реальной экономике. Это, во-первых, постоянство цен, во-вторых, монопольное положение производителя-работодателя на рынке товаров и услуг. В настоящей статье макроэкономические процессы анализируются уже без таких предположений. Так, в разд. 1 рассмотрена макроэкономическая модель системы с монопсоническим рынком труда, но преимущественно конкурентным рынком товаров и услуг. В разд. 2 проведен анализ указанной модели и дана содержательная экономическая интерпретация полученных результатов. Выводы и направления дальнейших исследований обсуждаются в разд. 3.

1. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С МОНОПСОНИЧЕСКИМ РЫНКОМ ТРУДА

Рассмотрим поведение производителя товаров и услуг, являющегося монополистом-потребителем на некотором изолированном сегменте рынка труда. Обозначим $S(w)$ функцию предложения труда на этом сегменте, где w — величина реальной оплаты труда. Предположим, что $S(w)$ — непрерывна, монотонно возрастает, вогнута и принадлежит пространству C^k , $k \geq 4$, т.е. k раз непрерывно дифференцируема. Пусть l — производительность труда; $H = 1 + h$ (h — дополнительные издержки производителя, связанные с приобретением им единицы труда); β — доля добавленной стоимости в единице произведенной продукции; v — спрос на производимую монополистом-работодателем продукцию. В [2] показано, что с целью получения максимального дохода производитель установит оплату труда в размере

$$w = \min \left(S^{-1}(l^{-1}v), (S')^{-1} \left(\frac{\beta}{l} H \right) \right), \quad (1)$$

где $(S')^{-1}$ — функция, обратная к производной $S(w)$.

Предположим, что спрос и оплата труда зависят от непрерывно изменяющегося времени t , а параметры l, β, h неизменны во времени. Аналогично [2] будем считать, что спрос v в каждый последующий момент $t + \Delta t$ будет линейной комбинацией спроса \bar{v} в момент времени t , скорректированного с учетом действующих цен, и оплаты труда w в тот же момент времени:

$$v(t + \Delta t) = ((1 - \rho)\bar{v}(t) + \rho w(t))\Delta t, \quad (2)$$

где коэффициент $0 < \rho < 1$ не зависит от времени и достаточно мал. С экономической точки зрения первое слагаемое отражает влияние на спрос ранее сделанных накоплений и доходов, зависящих от текущего объема продаж, а второе отражает влияние текущих доходов лиц, занятых по найму. С учетом сказанного можно предположить, что функция $\bar{v}(t)$ состоит из двух частей: величина одной обратно пропорциональна текущим ценам $p(t)$, а другая не зависит от этих цен:

$$\bar{v}(t) = \frac{v(t)}{p(t)} \alpha + (1 - \alpha)v(t), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое отражает накопления, сделанные в национальной валюте, а также фиксированные доходы лиц, не связанных с работой по найму (например, пенсии, социальные пособия). Второе слагаемое отражает доходы от коммерческой деятельности и валютные накопления.

Подставив (3) в (2) и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = \left((1 - \rho)\alpha \left(\frac{1}{p} - 1 \right) - \rho \right) v + \rho w. \quad (4)$$

Заметим, что исследованную в [2] модель динамики спроса можно рассматривать как частный случай уравнения (4), в котором $p = 1$.

В отличие от [2-3] здесь динамика цен описывается уравнением Самуэльсона [4] $\dot{p} = \lambda(D(p) - S(p))$, где $D(p)$ — реальный спрос, $S(p)$ — предложение на товарном рынке, $\lambda > 0$ — некоторый коэффициент. Будем считать что кроме предложения монополиста-работодателя на товарном рынке существует альтернативное предложение за счет других производителей, а также импорта товаров [5]. Пусть функция альтернативного предложения $\psi \in C^k$, $k \geq 4$, неубывающая, ограниченная сверху и вогнутая, т.е. обладает всеми свойствами функции предложения конкурентного рынка. Таким образом, в рассматриваемой модели товарный рынок состоит из двух частей — конкурентной и монопольной. Если монопольная составляющая предложения превышает конкурентную, то именно она будет определять величину совокупного предложения $S(p) = \max(\psi(p), lS(w))$. Отсюда

$$p = \lambda(v - \max(\psi(p), lS(w))). \quad (5)$$

Уравнения (1), (4), (5) образуют рассматриваемую макроэкономическую модель. Заметим, что в реальной экономике цены не могут быть нулевыми и неограниченными, а величина спроса всегда будет неотрицательной и ограниченной. Поэтому к указанным уравнениям следует добавить условия

$$p^* \leq p \leq p^{**}, \quad 0 \leq v \leq v^*, \quad (6)$$

которые должны выполняться для любого момента времени $t \geq 0$. Далее будем считать, что минимально допустимый уровень цен p^* (ему соответствуют цены отказа от производства в модели AS/AD [5]), максимально допустимый уровень цен p^{**} и максимально допустимая величина спроса

v^* постоянны во времени. При сделанных предположениях изучим динамику решений $p(t)$, $\alpha(t)$ полученных уравнений.

2. ДИНАМИКА СПРОСА И ЦЕН

Обозначим $F(v) = \min \left(S^{-1}(l^{-1}v), (S')^{-1} \left(\frac{\beta}{l} H \right) \right)$.

Из (4), (5) получим следующую систему дифференциальных уравнений, которую будем рассматривать в области, определяемой неравенствами (6):

$$\dot{v} = \left((1 - \rho)\alpha \left(\frac{1}{p} - 1 \right) - \rho \right) v + \rho F(v), \quad \dot{p} = \lambda(v - \max(\psi(p), lS(F(v)))) \quad (7)$$

Система (7) является нестандартной математической моделью, так как ее правая часть содержит операции поиска максимума и минимума. Для анализа динамики системы (7) построим векторное поле — поле скоростей изменения $(p(t), \alpha(t))$. С этой целью найдем кривые на плоскости (p, v) , удовлетворяющие неравенствам (6), на которых обращается в нуль правая часть первого или второго уравнения системы (7). Точки, в которых обращаются в нуль правые части обоих уравнений данной системы, являются состояниями ее равновесия. Указанные кривые и состояния равновесия играют ключевую роль при изучении динамики системы (7) в фазовом пространстве — пространстве всех начальных условий, удовлетворяющих неравенствам (6).

Обозначим

$$c = (S')^{-1} \left(\frac{\beta}{l} H \right), \quad \bar{v} = lS(c), \quad g(p) = (1 - \rho)\alpha \left(\frac{1}{p} - 1 \right) - \rho.$$

Функция $g(p)$ имеет единственный нуль в точке \bar{p} , $0 < \bar{p} < 1$. Если $p > \bar{p}$, то функция $g(p) < 0$ и монотонно убывает.

При исследовании динамики системы (7) будем различать случай малого ρ и случай, когда величина ρ не является малой.

Начнем со второго случая. Будем считать, что $\rho^* > \bar{p}$.

Рассмотрим кривую \hat{L} , определяемую условиями $g(p)v + \rho\bar{v} = 0$, $p > \rho^*$, $\bar{v} \leq v \leq v^*$.

Очевидно, что \hat{L} является графиком монотонно убывающей дифференцируемой функции, определенной на промежутке $[\rho^*, \bar{p}]$. При этом предполагается, что $\bar{p} > 1$. Рассмотрим функцию S . Очевидно, что обратная ей функция S^{-1} является выпуклой, дифференцируемой и неограниченной сверху. Дальнейший анализ решений системы (7) осуществляется при следующих предположениях.

1. Множество решений уравнения

$$g(p)v + \rho S^{-1}(l^{-1}v) = 0 \quad (8)$$

не пусто. Тогда, как легко видеть, существует $p_m > 0$ такое, что для каждого $p > p_m$ уравнение (8) имеет два корня: $0 < V_1(p) < V_2(p)$, причем $V_1(p)$ является монотонно убывающей, а $V_2(p)$ — монотонно возрастающей функцией p . Функции $V_1(p)$, $V_2(p)$ принадлежат пространству C^k , $k \geq 4$. В точке p_m эти функции принимают одинаковые значения.

2. Выполняется неравенство $p_m < \bar{p}$.

3. Имеет место неравенство $V_1(p_m) < \bar{v}$.

4. Функция $\psi(p)$ ограничена и существует точка $p_b > \bar{p}$ такая, что выполняется $\psi(p) < \bar{v}$, $\psi(p_b) = \bar{v}$ для всех $\rho^* \leq p < p_b$.

5. Уравнение

$$\psi(p) = v^* \quad (9)$$

имеет решение p_b^* , причем $p_b^* < p^{**}$.

6. Множество $L_S = \{(p, V_1(p)) : p \geq p_m, V_1(p) \geq \psi(p)\}$ не пусто.

Условия 1–5 обеспечивают диссипативность системы (7) на прямоугольнике (6). Следовательно, решения системы (7) с начальными условиями из (6) продолжимы на положительную полуось и не выходят из прямоугольника (6).

Обозначим

$$L_U = \{(p, V_2(p)) : p \geq p_m, V_2(p) \leq \bar{v}\}, \quad \Psi = \{(p, \psi(p)), p > p^*\}.$$

В силу условий 1–5 кривые \hat{L} и L_U имеют общую точку (\bar{p}, \bar{v}) . Так как функция V_1 монотонно убывает, а функция $\psi(p)$ монотонно возрастает и множество L_S не пусто, то уравнение $V_1(p) = \psi(p)$ имеет единственное решение: $p_{\max} > p_m$.

Возвратимся к ранее отмеченной аналогии с рассмотренной в [2] моделью для случая трех точек равновесия. Две из них (верхняя, когда величина w зависит от H , и нижняя, когда эта величина определяется спросом v при постоянных ценах) являются точками устойчивого равновесия, а промежуточная точка неустойчива. В настоящей работе аналогами верхней точки равновесия выступают точки кривой \hat{L} , аналогами промежуточной точки являются точки из L_U , а нижней — точки из L_S .

Кривые L_U, L_S, \hat{L}, Ψ разбивают фазовое пространство системы (7) на области с различным поведением векторного поля. Эти области обозначим $D^{z_1 z_2}$, где z_1 — знак правой части ценового уравнения либо 0; z_2 — знак правой части уравнения спроса либо 0. Структура векторного поля представлена на рис. 1,а. Опишем полученные области.

Множество D^{++} ограничено отрезками $\{(p^*, v), \bar{v} \leq v \leq v^*\}$, $\{(p, \bar{v}), p^* \leq p \leq \bar{p}\}$ и кривой \hat{L} . Границей области D^{+-} являются кривая \hat{L} , дуга кривой $\psi(p)$ и отрезок $\{(p, \bar{v}), \bar{p} \leq p \leq p_b^*\}$. Область D^{0-} ограничена кривой L_S , дугой кривой L_U , дугой кривой Ψ и отрезком $\{(p, \bar{v}), \bar{p} \leq p \leq p_b^*\}$. Область D^{--} примыкает к D^{0-} , D^{+-} , в границу D^{--} входят дуга кривой $\psi(p)$ и график функции $V_1(p)$. Криволинейный сектор D^{-+} ограничен частью графика функции $V_1(p)$ и дуги кривой $\psi(p)$. Область D^{0+} есть множество, в границу которого входят дуга кривой $\psi(p)$, дуга кривой L_U , кривая L_S , отрезок $\{(p, \bar{v}), p^* \leq p \leq \bar{p}\}$.

Обозначим L множество всех стационарных точек системы (7). Очевидно, что $L = L_S \cup L_U$, для точек кривой \hat{L} правая часть уравнения динамики цен остается положительной. Пусть $V_1(p_m) = V_m$. Множество L_S , рассматриваемое без точки (p_m, V_m) , является множеством всех устойчивых состояний равновесия системы (7). Множество L_U состоит из неустойчивых состояний равновесия системы (7).

Обозначим $p(t) = p(t, p, v)$, $v(t) = v(t, p, v)$ решение системы (7), удовлетворяющее условию $p(0) = p$, $v(0) = v$, где точка (p, v) удовлетворяет (6).

Определение 1. Будем называть систему (7) стабилизируемой, если для любой точки (p, v) фазового пространства системы (7) существует точка (p_+, v_+) такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p(t, p, v), v(t, p, v)) = (p_+, v_+). \quad (10)$$

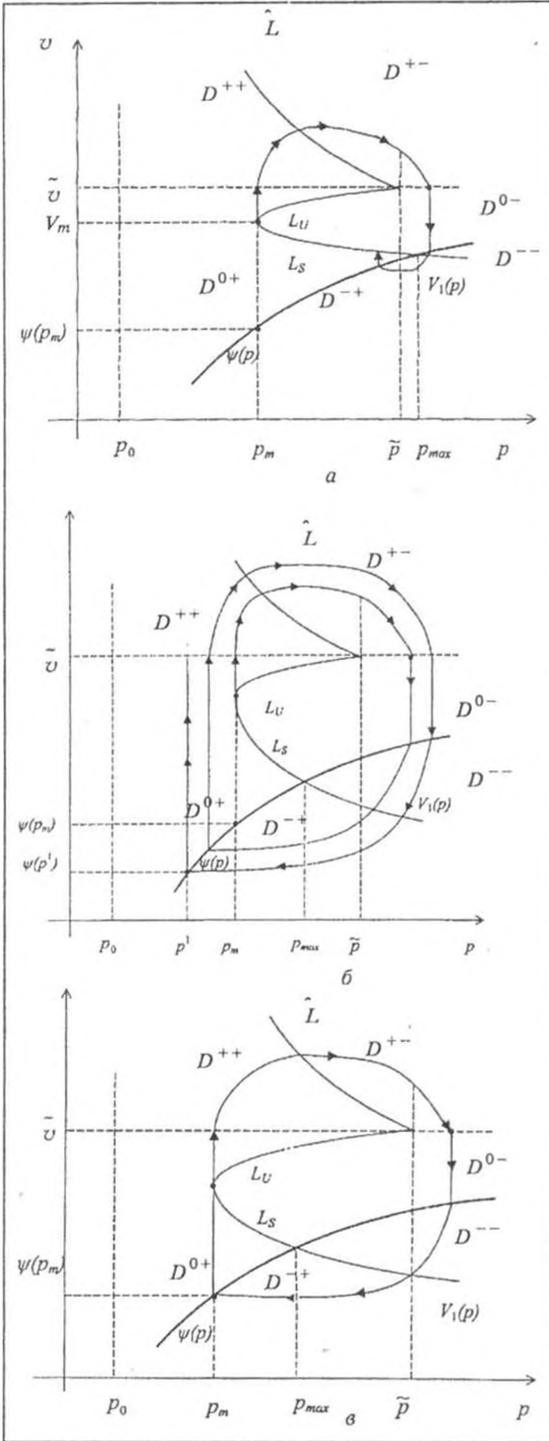


Рис. 1. Прохождение сепаратрисы $\rightarrow\rightarrow$ при $\lambda > 0$ (а), $\lambda < 0$ (б), $\lambda = 0$ (в)

роста классического цикла деловой активности. После пересечения прямой $v = \bar{v}$ оплата труда, определяемая согласно (7), перестает изменяться пропорционально спросу и возникает дисбаланс между спросом и предложением, порождающий инфляцию. В области D^{++} функции $p^s(t)$ и $v^s(t)$ будут

Определение 2. Множество всех точек (p^+, v^+) , для которых имеет место равенство (10), будем называть множеством стабилизации системы (7).

Отметим, что понятие стабилизируемой системы можно рассматривать как аналог используемого в [2] понятия сходимости в системе с дискретным временем, а понятие множества стабилизации — как аналог множества предельных точек.

Найдем условия стабилизации системы (7). Предположим, что $\bar{p} > p_{\max}$. Содержательно это предположение означает, что при разных ценах предложение на рынке товаров может определяться как объемами производства работодателя-монополиста, так и альтернативным, конкурентным предложением. Этот сегмент рынка нельзя рассматривать как полностью закрытый или как полностью открытый для конкуренции.

Очевидно, что система (7) принадлежит классу кусочно-гладких систем. Далее употребляется общепринятая в классическом (гладком) случае терминология из теории динамических систем [6–10]. Выбор соответствующего термина ввиду имеющейся аналогии в каждом случае оговаривать не будем. Рассмотрим выходящую из точки (p_m, V_m) сепаратрису. Обозначим движущуюся по ней фазовую точку $(p^s(t), v^s(t))$. Пусть $(p^s(0), v^s(0)) \in D^{0+}$. Тогда $p^s(t) = p^s(0)$, а $v^s(t)$ будет монотонно возрастать. С экономической точки зрения это означает, что цены остаются неизменными при увеличивающемся

монотонно возрастающими. Рост, сопровождающийся инфляцией, присущ стадии бума классического делового цикла. Рост цен тормозит спрос. После трансверсального пересечения кривой \hat{L} фазовая точка попадает в область D^{+-} , где $p^s(t)$ монотонно возрастает, а $v^s(t)$ монотонно убывает. Теперь бум сменяется спадом, который усиливается инфляционным обесцениванием накоплений. Если фазовая точка пересекает прямую $v = \bar{v}$, оплата труда снова начинает изменяться пропорционально спросу. Как следствие, возникает рассмотренная в [2] обратная связь «уменьшение спроса — снижение оплаты труда — уменьшение спроса», ускоряющая спад. В области D^{0-} функция $p^s(t)$ сохраняет постоянное значение, а $v^s(t)$ монотонно убывает и спад приобретает черты кризиса перепроизводства. В области D^{--} , куда фазовая точка попадает после пересечения линии $\psi(p)$, избыточное предложение начинает влиять на цены, $p^s(t)$ и $v^s(t)$ будут монотонно убывающими функциями. Начинаясь дефляция (снижение цен) тормозит спад, увеличивая ценность сохранившихся активов. Сочетание дефляции и низких темпов спада характерно для стадии депрессии классического цикла деловой активности. После пересечения фазовой точкой графика функции $V_1(p)$ она попадает в область D^{-+} , где $p^s(t)$ монотонно убывает, а $v^s(t)$ возрастает. Процессы, происходящие в этой области, типичны для начала стадии оживления цикла деловой активности. Таким образом, прохождение фазовой точкой указанных областей фазового пространства соответствует всем основным стадиям деловой активности.

При некотором $t = T^s$ фазовая точка $(p^s(t), v^s(t))$ пересекает кривую Ψ . Из условия $\bar{p} > p_{\max}$ следует, что $p^s(T^s) < p_{\max}$. Возможны два случая: $p^s(T^s) \leq p_m$ и $p^s(T^s) > p_m$. Вначале рассмотрим второй случай. В области D^{0+} $p^s(t) = p^s(T^s) = \hat{p}$, а $v^s(t) \rightarrow V_1(\hat{p}) = \hat{V}$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда сепаратриса входит в точку $(\hat{p}, \hat{V}) \in L_S$. Этот случай изображен на рис 1,а. Обозначим $\lambda = \hat{p} - p_m$. Очевидно, что в этом случае $\lambda > 0$. В первом случае система не стабилизируема при $\lambda = p^s(T^s) - p_m < 0$. Этот случай изображен на рис 1,б. Отметим, что для особого случая $\lambda = 0$ система (7) также не стабилизируема, выходящая из точки (p_m, V_m) сепаратриса будет для нее входящей. Такую кривую будем далее называть гомоклинической. Она изображена на рис 1,в. Движению точки по этой кривой будет соответствовать основной цикл деловой активности в его «чистом» виде (без долгосрочного экономического роста).

Очевидно, что величина λ не зависит от выбора начальной точки на сепаратрисе. Предположим, что $\bar{p} > p_{\max}$. Тогда возможен случай, когда $(p^s(t), v^s(t))$ пересекает линию $v = \bar{v}$ в точке $(p^s(T^s), v^s(T^s))$ такой, что $p^s(T^s) < p_{\max}$. При этом сепаратриса также входит в точку $(\hat{p}, \hat{V}) \in L_S$ и величина $\lambda > 0$. Из проведенных выше рассуждений вытекает следующее.

Утверждение 1. Пусть выполнены предположения 1–5. Чтобы система (7) была стабилизируема, необходимо, чтобы выходящая из точки (p_m, V_m) сепаратриса входила в точку, принадлежащую L_S и не совпадающую с точкой (p_m, V_m) .

Найдем критерий стабилизируемости системы (7). С этой целью рассмотрим произвольную точку $(p, \psi(p))$ такую, что $p < p_m$. Обозначим $p(t) = p(t, p)$, $v(t) = v(t, p)$, решение системы (7), удовлетворяющее условию $p(0) = p$, $v(0) = \psi(p)$.

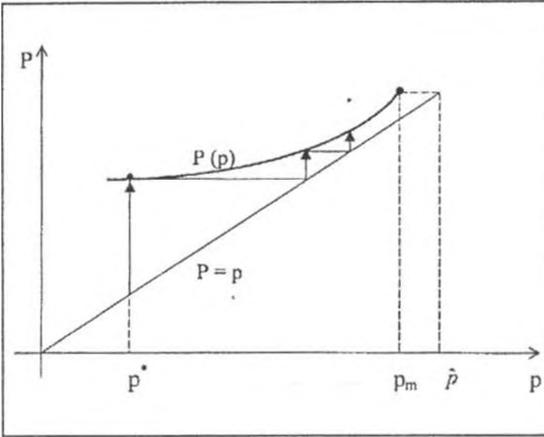


Рис. 2. Функция последования стабилизируемой системы

функции последования вытекает справедливость утверждения.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия утверждения 1. Для того чтобы система (7) была стабилизируема, необходимо и достаточно, чтобы $P(p) > p$ и система (7) не имела гомоклинической кривой.

На рис. 2 дан график функции последования стабилизируемой системы.

Далее предположим, что система (7) зависит от параметра ϵ , и изучим сценарий ее выхода из режима стабилизации. Заметим, что выбор бифуркационного параметра может быть неоднозначным. В частности, от параметра ϵ могут зависеть функции ψ и S . Будем также предполагать, что зависимость правых частей системы (7) от параметра ϵ является гладкой. Полученное однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений (7) запишем в виде

$$\dot{x} = f(x, \epsilon), \quad \epsilon \in R, \quad (11)$$

где $x = (p, v)$. Предположим, что все определенные выше функции дифференцируемы по параметру ϵ ; следовательно, изменение положения кривых будет достаточно «гладким». Рассмотрим функцию последования $P(p, \epsilon)$ и величину $\lambda(\epsilon)$, характеризующие стабилизируемость системы (11). Пусть при $\epsilon < \epsilon_0$ система (11) стабилизируема. Начало выхода из режима стабилизации связано с выполнением одного из следующих условий.

Условие 1. Пусть при $\epsilon = \epsilon_0$

$$\lambda(\epsilon_0) = 0, \quad \lambda'(\epsilon_0) < 0 \quad P(p, \epsilon_0) > p \text{ для } p^*(\epsilon) < p < p_m(\epsilon).$$

Условие 2. Существует единственное p^0 такое, что

$$P(p^0, \epsilon_0) = p^0, \quad \frac{\partial}{\partial p} P(p^0, \epsilon_0) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \epsilon} P(p^0, \epsilon_0) > 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 p} P(p^0, \epsilon_0) < 0, \quad \lambda(\epsilon_0) > 0.$$

Предположим, что выполнено условие 1. Рассмотрим систему (11) при $\epsilon = \epsilon_0$. Обозначим G гомоклиническую кривую, исходящую из точки $(p_m(\epsilon_0), V_m(\epsilon_0))$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1. Тогда существуют такие $\delta > 0$ и окрестность U множества $G \cup (p_m(\epsilon_0), V_m(\epsilon_0))$, что система (11) при $\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0 + \delta$ имеет в U орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл.

Аналогично рассуждениям выше приходим к выводу о существовании такого наименьшего положительного T^1 , при котором точка $(p(t), v(t))$ пересекает кривую Ψ . Обозначим $p(T^1) = P(p)$.

Определение 3. Заданную на промежутке $[p^*, p_m)$ функцию $p \rightarrow P(p)$ назовем функцией последования системы (7).

При сформулированных выше условиях функция последования существует и является дифференцируемой на промежутке $[p^*, p_m)$. Из определения

Доказательство. Рассмотрим последовательность $p_k^s(\varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots$, при $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0 + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Здесь $p_k^s(\varepsilon)$ — первая координата k -го пересечения с кривой $\psi(p, \varepsilon)$ сепаратрисы уравнений (11), исходящей из $(p_m(\varepsilon), V_m(\varepsilon))$. Очевидно, что последовательность p_k^s , $k = 1, 2, \dots$, является монотонно убывающей, ограниченной снизу и, следовательно, имеет предел, который обозначим $p^+(\varepsilon)$. На основании несложного анализа можно заключить, что $p^+(\varepsilon) \rightarrow p_m(\varepsilon_0)$ при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$. Фазовая кривая, выходящая из точки $(p^+(\varepsilon), \psi(p^+(\varepsilon), \varepsilon))$, является замкнутой и орбитально асимптотически устойчивой. Из условия 1 следует, что при $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0 + \delta$ существует $p^-(\varepsilon) \leq p^+(\varepsilon)$ такое, что имеет место неравенство $P(\varepsilon, p) > p$ для всех $p^*(\varepsilon) < p < p^-(\varepsilon)$, причем $P(\varepsilon, p^-(\varepsilon)) = p^-(\varepsilon)$. Фазовая кривая, выходящая из точки $(p^-(\varepsilon), \psi(p^-(\varepsilon), \varepsilon))$, является замкнутой и орбитально асимптотически устойчивой. Таким образом, теорема доказана.

В случае общего положения из гомоклинической кривой, по-видимому, бифурцирует единственный предельный цикл. Тогда очевидно, что число возникающих в окрестности U предельных циклов определяется поведением $P(\varepsilon, p)$ при $p \rightarrow p_m(\varepsilon)$ и $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$. Далее для простоты предположим, что из гомоклинической кривой бифурцирует единственный предельный цикл. Отметим, что при $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0 + \delta$ и малом δ период предельного цикла неограниченно возрастает, когда $\delta \rightarrow 0$, т.е. продолжительность каждой стадии цикла деловой активности возрастает по мере приближения к кризисному значению $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Используя полученные выше результаты, опишем особенности выхода из режима стабилизации при выполнении условия 1. Для системы уравнений (11) при фиксированном $\varepsilon < \varepsilon_0$ множеством стабилизации является $L(\varepsilon) = L_S(\varepsilon) \cup L_U(\varepsilon)$. На «физическом уровне» множеством стабилизации (11) при $\varepsilon < \varepsilon_0$ является $L_S(\varepsilon)$, так как точки множества $L_U(\varepsilon)$ не реализуются ввиду их неустойчивости. При $\varepsilon = \varepsilon_0$ система (11) нестабилизируемая. Вероятностно предельным множеством уравнений (11) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ является $L_S(\varepsilon_0) \cup G$. Отметим [9], что вероятностно предельным множеством динамической системы называется наименьшее замкнутое множество, содержащее ω — предельные множества почти для всех точек фазового пространства. При $\varepsilon < \varepsilon_0$ вероятностно предельным множеством уравнения (11) очевидно является $L_S(\varepsilon)$. Следовательно, значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ будет кризисным бифуркационным значением [9]. Природа кризиса в данном случае понятна — при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ для точек фазового пространства уравнения (11), которые лежат вне замкнутой кривой, состоящей из сепаратрисы, исходящей из точки $(p_m(\varepsilon), V_m(\varepsilon))$, и дуги $L_S(\varepsilon)$, мера множества точек стабилизации стремится к нулю ($\lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$). При $\varepsilon < \varepsilon_0$ для точек, которые лежат внутри указанной замкнутой кривой, вероятностно предельным множеством является $L_S(\varepsilon)$. При $\varepsilon = \varepsilon_0$ для области $Q(\varepsilon_0)$ фазового пространства, лежащей вне замыкания гомоклинической кривой \bar{G} , вероятностно предельным множеством уравнения (11) является \bar{G} . Полутраектории, выходящие из $Q(\varepsilon_0)$, приближаются к замкнутой кривой \bar{G} , наматываясь на нее. Этому соответствует циклическое развитие экономики.

Для исследования динамики системы уравнений (11) при $\varepsilon > \varepsilon_0$ рассмотрим сепаратрису $\Gamma(\varepsilon)$, входящую в точку $(p_m(\varepsilon), V_m(\varepsilon))$. Обозначим $Q(\varepsilon)$ область фазового пространства, лежащую вне замкнутой кривой, состоящей из $\Gamma(\varepsilon)$ и дуги кривой $L_U(\varepsilon)$. В области $Q(\varepsilon)$ вероятностно пре-

дельным множеством уравнения (11) является определенный в теореме 1 предельный цикл. В этой области вероятно предельное множество уравнения (11) и максимальный аттрактор совпадают. При этом максимальный аттрактор определяется следующим образом [9].

Определение 4. Пусть $\{\varphi^t\}$ — поток, порожденный векторным полем f . Область B называется поглощающей, если $\varphi^t B \subset B$, $t > 0$. Максимальным аттрактором в поглощающей области B называется множество $A = \bigcap_{t \rightarrow \infty} \varphi^t B$.

Множество называется аттрактором, если существует поглощающая область, максимальным аттрактором которой оно является. Областью притяжения аттрактора называется множество всех точек, через которые проходят траектории, стремящиеся к A при $t \rightarrow \infty$.

В отличие от ранее рассмотренного случая предположим, что выход из режима стабилизации связан с условием 2. Тогда при $\varepsilon = \varepsilon_0$ в системе (11) возникает полуустойчивый цикл. Вероятно предельное множество системы уравнений (11) состоит из объединения указанного цикла и $L_S(\varepsilon)$. Следовательно, как и для ранее рассмотренного случая, значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ является кризисным бифуркационным значением. Очевидно, что при $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0 + \delta$ из полуустойчивого цикла бифурцируют два предельных цикла, один из которых орбитально асимптотически устойчив, а второй неустойчив. Неустойчивый цикл находится внутри устойчивого цикла. Вероятно предельное множество уравнения (11) состоит из объединения устойчивого цикла и $L_S(\varepsilon)$. Областью притяжения множества стационарных точек в уравнении (11) является внутренность неустойчивого цикла. Все положительные полутраектории, находящиеся во внешности неустойчивого цикла, приближаются к устойчивому циклу, наматываясь на него.

Таким образом, происходит повторение циклов деловой активности с тенденцией к общему экономическому росту, если траектория находится внутри устойчивого цикла, или спаду, если она находится вне его.

После выхода системы (11) из режима стабилизации в результате перехода через кризисное бифуркационное значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ представляют интерес возможные дальнейшие качественные изменения этой системы. Рассмотрим один из возможных вариантов. Пусть при выходе из режима стабилизации реализуется условие 2 и для $\varepsilon > \varepsilon_0$ в системе (11) имеются два цикла, один из которых $\Lambda_S(\varepsilon)$ — орбитально асимптотически устойчив, а другой $\Lambda_U(\varepsilon)$ — неустойчив. Очевидно, что областью притяжения цикла $\Lambda_S(\varepsilon)$ является внешность замкнутой кривой $\Lambda_U(\varepsilon)$. Областью притяжения $L_S(\varepsilon)$ является внутренность цикла $\Lambda_U(\varepsilon)$. Рассмотрим сценарий выхода системы (11) из режима стабилизации в области притяжения множества $L_S(\varepsilon)$. Обозначим $p_S(\varepsilon) < p_m(\varepsilon)$, $p_U(\varepsilon) < p_m(\varepsilon)$ первые координаты точек пересечения множеств соответственно $\Lambda_S(\varepsilon)$ и $\Lambda_U(\varepsilon)$ с кривой $\psi(p, \varepsilon)$. Предположим, что существует $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ такое, что при $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ система (11) не имеет гомоклинической кривой, а при $\varepsilon = \varepsilon_1$ ее гомоклинической кривой будет G_1 . Предположим, что функция последования системы (11) на интервале $(p_S(\varepsilon), p_m(\varepsilon))$ имеет единственную неподвижную точку. Тогда возможны два случая:

- 1) $p_m(\varepsilon) - p_U(\varepsilon) \geq d > 0$, $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1$;
- 2) $p_U(\varepsilon) \rightarrow p_m(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1$.

В первом случае применима теорема 1, согласно которой из гомоклинической кривой бифурцирует орбитально асимптотически устойчивый цикл.

Во втором случае неустойчивый предельный цикл сливается с гомоклинической кривой и они взаимно аннулируются. Предельного цикла в окрестности

стности гомоклинической кривой при этом не возникает. Вероятностно предельным множеством уравнений (11) является множество $\Lambda_S(\epsilon) \cup L_S(\epsilon)$. Областью притяжения $\Lambda_S(\epsilon)$ будет внешность замкнутой инвариантной кривой уравнения (11), составленной из входящей в точку $(p_m(\epsilon), V_m(\epsilon))$ сепаратрисы $\Gamma(\epsilon)$ и дуги кривой $L_U(\epsilon)$. Вероятностно предельным множеством системы (11) внутри указанной замкнутой кривой является множество $L_S(\epsilon)$. Значение $\epsilon = \epsilon_1$ является кризисным бифуркационным значением.

Возможен случай, при котором бифуркации из гомоклинической кривой предшествует несколько бифуркаций рождения полуустойчивых предельных циклов и их ветвления. Описанный выше сценарий бифуркации из гомоклинической кривой остается при этом в силе.

Перейдем к бифуркационному анализу предельного случая, при котором $L_S(\epsilon)$ вырождается в точку (\bar{p}, \bar{v}) , а $L_U(\epsilon)$ является пустым множеством (рис. 3). Этот случай реализуется, если прямая $v = \bar{v}$ в процессе изменения проходит через точку пересечения $\psi(p, \epsilon)$ и $V_1(\epsilon, p)$. Для упрощения будем далее считать, что (\bar{p}, \bar{v}) не зависит от бифуркационного параметра ϵ . Точка (\bar{p}, \bar{v}) является единственным положением равновесия семейства уравнений (11). Структура векторного поля уравнения (11) в целом сохраняется. Новым здесь является исчезновение области D^{0-} . Фазовые точки, двигаясь по фазовым кривым, описывают спирали. В случае общего положения эти спирали либо стягиваются в точку (\bar{p}, \bar{v}) (рис. 3,а), либо, раскручиваясь, удаляются от нее (рис. 3,б). В первом случае (\bar{p}, \bar{v}) — устойчивый фокус, во втором — неустойчивый фокус. Рассмотрим бифуркацию рождения предельного цикла из положения равновесия при переходе от устойчивого колебательного режима к неустойчивому. Известные результаты по указанной бифуркации (например, [7–11]) относятся к случаю гладких систем. В рассматриваемом здесь случае семейство уравнений (11) будет кусочно-гладким в окрестности (\bar{p}, \bar{v}) . Это обстоятельство существенно усложняет бифуркационный анализ уже на первом его этапе — при линеаризации системы (7) в (\bar{p}, \bar{v}) . Линеаризованная в (\bar{p}, \bar{v}) система (11) представляет систему линейных уравнений на плоскости с кусочно-постоянными коэффициентами. Запишем эту систему в виде систем линейных дифференциальных уравнений на плоскости, связанных между собой попарно общими линейными границами. После сдвига (\bar{p}, \bar{v}) в начало координат и

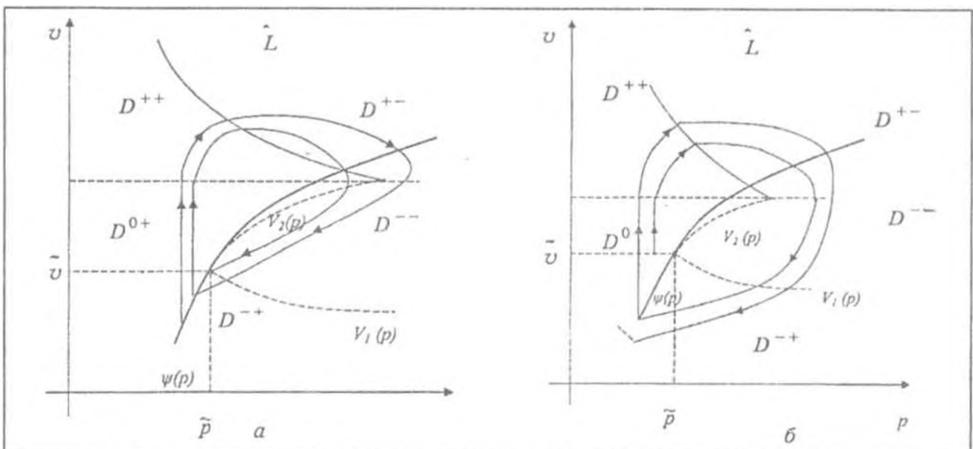


Рис. 3. Случай $L_S(\epsilon) = (\bar{p}, \bar{v})$. Фазовая кривая \rightarrow , сжимающая спираль (а) и раскручивающая спираль (б)

линеаризации получаем следующие уравнения и области, в которых они определены:

уравнения

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left((1-\rho)\alpha\left(\frac{1}{\bar{p}} - 1\right) - \rho \right) v - (1-\rho)\alpha\frac{\bar{v}}{\bar{p}^2} p, \\ \dot{p} &= \lambda v \end{aligned} \tag{12}$$

на области $D_1 = \{(v \geq 0, p \leq 0)\} \cap : \{(v \geq \psi'(\bar{p})p, p \geq 0)\}$;

уравнения

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left((1-\rho)\alpha\left(\frac{1}{\bar{p}} - 1\right) - \rho \right) v - (1-\rho)\alpha\frac{\bar{v}}{\bar{p}^2} p, \\ \dot{p} &= \lambda(v - \psi'(\bar{p})p) \end{aligned} \tag{13}$$

на области $D_2 = \{(0 \leq v \leq \psi'(\bar{p})p, p \geq 0)\}$;

уравнения

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left(\left((1-\rho)\alpha\left(\frac{1}{\bar{p}} - 1\right) - \rho \right) + \rho l^{-1}(S^{-1})'(l^{-1}\bar{v}) \right) v - (1-\rho)\alpha\frac{\bar{v}}{\bar{p}^2} p, \\ \dot{p} &= \lambda(v - \psi'(\bar{p})p) \end{aligned} \tag{14}$$

на области $D_3 = \{(v \leq 0, p \geq 0)\} \cap : \{(v \leq \psi'(\bar{p})p, p \leq 0)\}$;

уравнения

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left(\left((1-\rho)\alpha\left(\frac{1}{\bar{p}} - 1\right) - \rho \right) + \rho l^{-1}(S^{-1})'(l^{-1}\bar{v}) \right) v - (1-\rho)\alpha\frac{\bar{v}}{\bar{p}^2} p, \\ \dot{p} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

на области $D_4 = \{(0 \leq v \leq \psi'(\bar{p})p, p \leq 0)\}$.

Далее для сокращения будем говорить о системах (12)–(15), не указывая области их определения.

Найдем границу области устойчивости нулевого решения систем (12)–(15) (напомним, что нулю в новых координатах будет соответствовать точка (\bar{p}, \bar{v}) первоначальной модели). Обозначим $p(t, p), v(t, p)$ решение системы (12), удовлетворяющее условию $p(0, p) = p, v(0, p) = 0$, где $p < 0$ (в новых координатах). Пусть $T_1(p) > 0$ — время, за которое точка $(p(t, p), v(t, p))$ пересечет луч $v = \psi'(\bar{p})p$. Пусть $p(t, p), v(t, p)$ — решение системы (13), являющееся непрерывным продолжением построенного выше решения и определенное на промежутке $[T_1(p), T_2(p)]$, где $T_2(p)$ — время, за которое точка $(p(t, p), v(t, p))$ пересечет луч $v = 0, p > 0$. Рассуждая далее аналогичным образом, получим время $T(p)$, за которое точка $(p(t, p), v(t, p))$ достигнет полупрямой $v = 0, p < 0$. Очевидно, что имеет место равенство $p(T(p), p) = kp$, где $k > 0$ — постоянная, не зависящая от $p < 0$, но зависящая от параметров систем (12)–(15). Начало координат является устойчивым фокусом систем (12)–(15), если $k < 1$, и неустойчивым фокусом, если $k > 1$. Множество тех значений параметров, при которых $k = 1$, определяет границу области устойчивости нулевого решения систем (12)–(15) в пространстве параметров. Эти значения параметров являются бифуркационными для системы (11) в окрестности точки (\bar{p}, \bar{v}) .

Согласно изложенному выше аналитический бифуркационный анализ системы (11) в окрестности точки (\bar{p}, \bar{v}) является сложной задачей. Проведем бифуркационный анализ системы (11) в окрестности точки (\bar{p}, \bar{v}) , если ρ достаточно мало. Предположим также, что функция ψ зависит от ρ ,

$\psi = \psi(p, \rho)$. Заметим, что система (7) при $\rho = 0$ имеет состояние равновесия: $p = 1, v = \psi(1, 0)$. Несложные рассуждения приводят к заключению, что если $\rho > 0$ и достаточно мало, то существует состояние равновесия системы (7): $(\bar{p}(\rho), \bar{v}(\rho))$, гладко зависящее от $\rho > 0$, такое, что $\bar{p}(0) = 1, \bar{v}(0) = \psi(1, 0)$. Предположим, что $\psi'_p(1, 0) = 0$. Положим для определенности $\lambda = 1$. Введем следующие обозначения:

$$(1 - \rho)\alpha \left(\frac{1}{\bar{p}(\rho)} - 1 \right) - \rho = -\mu_1(\rho), \quad \rho l^{-1} (S^{-1})' (l^{-1} \bar{v}) = \mu_2(\rho),$$

$$(1 - \rho) \alpha \frac{\bar{v}}{\bar{p}^2} = \omega^2(\rho).$$

Здесь $\omega(0) > 0$. Бифуркационный анализ системы (7) в окрестности точки (\bar{p}, \bar{v}) (зависимость (\bar{p}, \bar{v}) от параметра ρ с целью сокращения записи далее выделять не будем) сводится при сформулированных выше условиях к анализу системы вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} &= -\omega^2(\rho)p - \mu_1(\rho)v + (p^2 - p^3)a_1 - (p - p^2)v + \dots, \\ \dot{\bar{p}} &= v \end{aligned} \quad (16)$$

при $v \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} &= -\omega^2(\rho)p + (\mu_2(\rho) - \mu_1(\rho))v + (p^2 - p^3)a_1 - (p - p^2)v + \dots, \\ \dot{\bar{p}} &= v + b_1 p^2 - b_2 p^3 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

при $v \leq 0$, где $a_1 = \psi(1, 0) = \bar{v}(0)$, $b_1 = -\frac{1}{2} \psi''_{pp}(1, 0) > 0$, $b_2 = \frac{1}{6} \psi'''_{ppp}(1, 0)$.

Здесь и далее многоточие означает члены, порядок малости которых выше выделенных слагаемых.

Обозначим $\mu(\rho) = \mu_2(\rho) - 2\mu_1(\rho)$,

$$K = \frac{1}{8} - \frac{3b_2}{16} + \frac{(a_1 - 1)b_1}{8\omega(0)}. \quad (18)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\psi'_p(1, 0) = 0$, $\psi''_{pp}(1, 0) = 0$, $\mu'(\rho) = \kappa \neq 0$, $K < 0$. Тогда существует такое $\delta_0 > 0$, что:

i) если $\kappa > 0$, то в δ_0 -окрестности (\bar{p}, \bar{v}) существует единственное с точностью до сдвигов по t периодическое решение системы (7) с периодом $\frac{2\pi}{\hat{\omega}(\rho)}$, $\hat{\omega}(\rho) = \omega(\rho) + o(\rho)$ вида

$$\begin{aligned} \hat{v}(t) &= \bar{v} - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa\rho}{-K} \right)^{1/2} \hat{\omega}(\rho) \sin \hat{\omega}(\rho)t + \dots, \\ \hat{p}(t) &= \bar{p} + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa\rho}{-K} \right)^{1/2} \cos \hat{\omega}(\rho)t + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Это решение экспоненциально орбитально устойчиво. Состояние равновесия (\bar{p}, \bar{v}) системы (7) неустойчиво;

ii) если $\kappa < 0$, то в δ_0 — окрестности (\bar{p}, \bar{v}) не существует отличных от (\bar{p}, \bar{v}) неблуждающих точек. Состояние равновесия (\bar{p}, \bar{v}) системы (7) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Следуя [11], для доказательства теоремы используем метод усреднения [12]. Введем 2π — периодические функции $\mu(\theta, \rho)$, $\eta(\theta)$:

$$\mu(\theta, \rho) = \begin{cases} -\mu_1(\rho), & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \mu_2(\rho) - \mu_1(\rho), & \pi < \theta < 2\pi, \end{cases} \quad \eta(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 1, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

В системе (16), (17) выполним замену

$$v = -\omega(\rho)r \sin \theta, \quad \rho = r \cos \theta.$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu(\theta, \rho)r \sin^2 \theta + r^2 C_3(\theta) + r^3 C_4(\theta) + \dots, \\ \dot{\theta} &= \omega(\rho) + r D_3(\theta) + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} C_3(\theta) &= -\frac{a_1}{\omega(0)} \cos^2 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^2 \theta + b_1 \eta(\theta) \cos^3 \theta, \\ C_4(\theta) &= -\frac{a_1}{\omega(0)} \cos^3 \theta \sin \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta - b_2 \eta(\theta) \cos^4 \theta, \\ D_3(\theta) &= -\frac{a_1}{\omega(0)} \cos^3 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta - b_1 \eta(\theta) \cos \theta \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (21)$$

Следуя [11], строим гладкую в окрестности нуля замену переменных

$$r_1 = r + r u_1(\theta, \rho) + r^2 u_2(\theta) + r^3 u_3(\theta), \quad (22)$$

($u_1(\theta, \rho)$, $u_2(\theta)$, $u_3(\theta)$ — 2π -периодические, кусочно-дифференцируемые функции, $u_1(\theta, 0) = 0$), приводящую систему (20) к виду

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_1 \left(\frac{1}{4} \mu(\rho) + K r_1^2 \right) + \dots, \\ \dot{\theta} &= \omega(\rho) + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь согласно [11]

$$K = K(a_1, b_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[C_4(\theta) - \frac{1}{\omega(0)} C_3(\theta) D_3(\theta) \right] d\theta.$$

В силу (21) выполняется равенство (18). Справедливость теоремы следует теперь из [11, 12].

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Предположим, что $\psi'_\rho(1, 0) = 0$, $\psi''_{\rho\rho}(1, 0) = 0$, $\mu'(0) = \hat{\kappa} \neq 0$, $K > 0$. Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что:

iii) если $\hat{\kappa} < 0$, то в δ_0 -окрестности $(\bar{\rho}, \bar{v})$ существует единственное с точностью до сдвигов по t периодическое решение системы (7) с периодом $\frac{2\pi}{\hat{\omega}(\rho)}$, $\hat{\omega}(\rho) = \omega(\rho) + o(\rho)$, вида

$$\hat{u}(t) = \bar{v} - \frac{1}{2} \left(\frac{-\hat{\kappa}\rho}{K} \right)^{1/2} \hat{\omega}(\rho) \sin \hat{\omega}(\rho)t + \dots,$$

$$\hat{p}(t) = \bar{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{-\hat{\kappa}\rho}{K} \right)^{1/2} \cos \hat{\omega}(\rho)t + \dots$$

Это решение неустойчиво. Состояние равновесия $(\bar{\rho}, \bar{v})$ системы (7) экспоненциально устойчиво;

iv) если $\hat{\kappa} > 0$, то в δ_0 -окрестности $(\bar{\rho}, \bar{v})$ не существует отличных от $(\bar{\rho}, \bar{v})$ неблуждающих точек. Состояние равновесия $(\bar{\rho}, \bar{v})$ системы (7) неустойчиво.

Согласно теоремам 2, 3 динамика системы (7) в окрестности (\bar{p}, \bar{v}) определяется величинами K, k . Найдем представление для постоянной k . С этой целью продифференцируем по ρ равенство

$$\mu_1(\rho)\bar{v}(\rho) = \rho c,$$

справедливое в силу определения (\bar{p}, \bar{v}) . В результате получим

$$\mu_1'(0)\bar{v}(0) + \mu_1(0)\bar{v}'(0) = c.$$

Так как $\mu_1(0) = 0$, то $\mu_1'(0) = \frac{c}{\bar{v}(0)}$. В силу определения

$$k = l^{-1}(S^{-1})'(l^{-1}\bar{v}(0)) - 2\frac{c}{\bar{v}(0)}. \quad (24)$$

Согласно формуле (24) увеличение \bar{v} уменьшает показатель устойчивости состояния покоя (\bar{p}, \bar{v}) .

Перейдем к анализу первой ляпуновской величины K . Заметим, что для функций предложения товаров, таких как $\psi_1(p) = \gamma_1(1 - e^{-\beta_1 p})$, $\psi_2(p) = \gamma_2(1 - (p + d)^{-\beta_2})$, где $\gamma_k > 0$, $\beta_k > 0$, $k = 1, 2$, $d > 0$, выполняется неравенство $\frac{d^3}{dp^3}\psi_k > 0$, $k = 1, 2$. Следовательно, для указанных функций $b_2 > 0$ и в силу (18) справедливо неравенство $K > 0$, если $\bar{v}(0) > 1 + \frac{2\omega(0)(2 - 3b_2)}{b_1}$.

Остановимся теперь на следствии из теоремы 3, важном для анализа динамики системы (7). Очевидно, что в (7) при сформулированных в теореме 3 условиях и $\hat{k} > 0$ имеет место жесткая потеря устойчивости (кризис) состояния равновесия (\bar{p}, \bar{v}) и, следовательно, существует при малых $\rho > 0$, по меньшей мере, один орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл, амплитуда которого конечна (не является малой величиной).

Несложные рассуждения приводят к заключению, что теоремы 2, 3 допускают обобщения на случай, когда $\psi''_{\rho\rho}(1, 0) \neq 0$.

Проведенный анализ показывает, что определяющим фактором, влияющим на динамику системы (7), будет взаимное расположение кривых L_S и Ψ . При «низком» (относительно L_S) положении Ψ система будет стабилизируемой, а множеством ее стабилизации будут аналоги точек равновесия систем, рассмотренных в [2]. Изменение цен не окажет существенного влияния на выводы, сделанные в указанной работе. При «высоком» положении Ψ ситуация изменится. Система (7) будет иметь решения, сходящиеся к орбитально устойчивым периодическим решениям, которые по своим характеристикам соответствуют основному циклу деловой активности. В зависимости от начального состояния системы сходимости будет сопровождаться общей тенденцией к экономическому росту или спаду. При этом темпы роста (или спада) будут уменьшаться по мере приближения к периодическому режиму.

В случае, когда множество L_S вырождается в точку (\bar{p}, \bar{v}) , траектории системы, начинающиеся вблизи (\bar{p}, \bar{v}) , представляют раскручивающиеся или сжимающиеся спирали. Для экономики с монополистическим рынком труда и полностью конкурентным товарным рынком циклы деловой активности повторяются с нарастающей или уменьшающейся амплитудой и с разной продолжительностью. При некоторых дополнительных предположениях построен аналитический вид периодических решений в малой окрестности точки (\bar{p}, \bar{v}) , которой соответствует состояние простого воспроизводства в экономике, исследована локальная динамика системы, указаны кризисные состояния системы.

3. ВЫВОДЫ И НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На основе проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Согласно рассмотренной модели макроэкономическая система с монополистическим рынком труда и преимущественно монопольным товарным рынком после некоторого переходного процесса попадет в равновесное состояние.

В зависимости от начальных условий таким состоянием может быть одна из точек кривой L_S . Этой точке соответствует нижняя точка равновесия в модели с постоянными ценами в [2], в которой норма монопольной прибыли производителя будет максимальной. Точки кривой L_U , подобно промежуточной точке равновесия модели из [2], будут точками неустойчивого равновесия. В отличие от модели из [2] в рассмотренной модели не будет верхнего равновесного состояния, поскольку приближение системы к нему будет сопровождаться превышением спроса над предложением при постоянной величине реальной оплаты труда. Это порождает инфляцию, обесценивает ранее сделанные накопления, уменьшает спрос и направляет экономику в сторону нижней точки равновесия. Таким образом, в сильно монополизированной экономике при отсутствии внешних шоков и экзогенных технологических изменений, влияющих на значения параметров l и β , по истечении некоторого времени экономический рост прекращается. Развитие останавливается при таких ценах и объемах производства, которые обеспечивают наибольшую сверхприбыль монополистам.

2. В отличие от монополизированной экономики для экономики с монополистическим рынком труда и частично конкурентным (смешанным) товарным рынком характерно циклическое повторение периодов роста и спада. Такая динамика соответствует основному циклу деловой активности, наблюдаемому в XIX — начале XX вв. Согласно результатам моделирования определяющую роль при переходе от роста к спаду играет инфляционное обесценивание сбережений потребителей, а при переходе от спада (депрессии) к росту — дефляционное увеличение ценности активов. Главной причиной цикличности является взаимодействие конкурентного товарного рынка, способного, по мнению большинства экономистов-теоретиков, обеспечить саморегулирование в условиях экономического роста, и монополистического рынка труда, не являющегося саморегулируемым, на котором возможен лишь ограниченный (до определенного уровня производства) рост [2]. В случае, когда кривая Ψ проходит через точку (\bar{p}, \bar{v}) , т.е. когда товарный рынок будет конкурентным при любом уровне цен, циклический характер развития либо ослабевает и экономика переходит к простому воспроизводству, либо усиливается. Особо следует отметить кризисный характер изменения поведения системы при прохождении ее параметров через критические значения.

3. Монополия на рынке труда обеспечивает работодателю наибольший доход на ограниченном временном интервале. Однако экономика с таким рынком труда при различных формах организации товарного рынка (монопольной, смешанной, конкурентной) демонстрирует неспособность к своему развитию, к стабильному росту. В этом случае (в перспективе) проигрывает все общество, включая работодателей. Поскольку статистические данные [13–15] показали распространенность монополистических отношений в странах с переходной экономикой, создание конкурентного рынка труда должно стать одним из ключевых направлений их дальнейшего реформирования.

Последствия несовершенной конкуренции на рынке труда требуют дальнейшего изучения, в том числе с использованием математического моделирования. Такие исследования, в частности, могут осуществляться по следующим направлениям:

1) анализ влияния рынка труда с двухсторонней монопольной конкуренцией (монополисты-работодатели против профсоюзов) на общую экономическую динамику;

2) оценка воздействия внешних шоков спроса (например, случайных изменений объемов экспорта) и субъективных ожиданий работодателя на изменение оплаты труда в условиях монополии;

3) анализ моделей с иными, чем рассмотренная, функциями предложения, отражающими взаимодействие монопольного и конкурентного сегментов товарного рынка;

4) изучение экономики с частично (на отдельных отраслевых сегментах) монополизированным рынком труда;

5) дальнейшая теоретико-экономическая интерпретация полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikhalevich M., Koshlai L., Khml R. Multisectoral models of labour supply for countries in transition. — Research Memorandum. ACE Project № 98/9. University of Leicester, 1998. — 20 p.
2. Кошлай Л. Б., Михалевич М. В., Сергиенко И. В. Моделирование процессов занятости и роста в переходной экономике // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 3. — С. 58–75.
3. Mikhalevich M., Koshlai L. Modeling of multibranch competition in the labour market for countries in transition. — MODEST 2002: Transition and Transformation: Problems and Models. — Warsaw: The Interfaces Institute, 2002. — P. 49–59.
4. Самуэльсон П. Экономика. — М.: Просвещение, 1994. — Т.1. — 360 с; Т.2. — 390 с.
5. Долан Э. Дж., Линдсей Д. Е. Макроэкономика. — С.-Пб.: Литера плюс, 1994. — 360 с.
6. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. — М.: Наука, 1966. — 568 с.
7. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, И.И. Гордон, Е.А. Леонтович, А.Г. Майер. — М.: Наука, 1967. — 487 с.
8. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 368 с.
9. Теория бифуркации / В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников. — М.: ВИНТИ, Сер. Современные проблемы математики, 1986, Т. 5. — С. 5–218.
10. Kuznetsov Y. A. Elements of applied bifurcation theory. — New York. Springer-Verlag, 1998. — 591 p.
11. Chow S., Mallet-Paret J. Integral averaging and bifurcation // J. of Differential Equations. — 1977. — 26. — P. 112–159.
12. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1963. — 412 с.
13. Commander S., Coricelli F. Unemployment, restructuring and the labor market in Eastern Europe and Russia. — Washington D.C.: The World Bank, 1995. — 386 p.
14. Raiser M. Statistical review // Economics of Transition. — 1997. — 5(2). — P. 521–552.
15. Hofman L., Siedenberg A. Aufbruch in die Marktwirtschaft Reformen in der Ukraine von innen betrachtet — Kiev. Phenix, 1997. — 327 p.

Поступила 28.06.2002