УДК 517.8

М.Т. Таращанський, Н.Ю. Щестюк

СУМІСНЕ ПРОДОВЖЕННЯ МІР

Вступ

Проблемі існування сумісного продовження мір присвячено чимало наукових досліджень (див. [1] та наведений там огляд літератури). Дослідження в цьому напрямку не припиняються і в останньому десятиріччі. Особливо цікавим є питання існування сумісного продовження для узгоджених мір. Відомо [2, теорема 3.6.2], що у випадку узгоджених мір μ і ν завжди існує скінченно-адитивна функція множин на $\langle\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}\rangle$, що є продовженням мір μ і ν. Нагадаємо, що міри μ і ν називаються *узгодженими*, якщо $\mu(D)=\nu(D)$ для будь-якої множини $D\in\mathfrak{B}\cap\mathfrak{C}$, де $\mathfrak{B}$ і $\mathfrak{C}$ – дві алгебри підмножин на множині Ω; μ, ν – міри, тобто скінченні скінченно-адитивні невід'ємні функції множин на алгебрах $\mathfrak{B}$ і $\mathfrak{C}$, відповідно.

Позначимо $\langle\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}\rangle$ алгебру, породжену алгебрами $\mathfrak{B}$ і $\mathfrak{C}$. Міра λ, визначена на алгебрі $\langle\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}\rangle$, називається *сумісним продовженням мір* μ і ν, якщо звуження $\lambda|\mathfrak{B}$ міри λ на алгебру $\mathfrak{B}$ збігається з мірою μ і, аналогічно, звуження на алгебру $\mathfrak{C}$ збігається з мірою ν: $\lambda|\mathfrak{C}=\nu$. Сумісне продовження λ називається *склейкою мір* μ і ν, якщо $\lambda(B\cap C)=\lambda(B)\lambda(C)$ для будь-яких $B\in\mathfrak{B}$, $C\in\mathfrak{C}$ [1]. Проте це продовження не повинно бути мірою. Приклади, коли функція множин, що продовжує міри μ і ν, є необмеженою, наведено в [3]. Там же сформульовано достатню умову, яка забезпечує існування обмеженого сумісного продовження узгоджених мір μ і ν. Деякі результати (у більш загальному контексті) було одержано в [4]. У [5, теорема 1.5] сформульовано необхідну і достатню умову існування обмеженого сумісного продовження мір скінченно-адитивних функцій множин μ і ν. У праці [6] отримано окремі відповіді на питання, які було поставлено в [5].

З інших позицій аналогічні питання розглядались у [7, 8].

Постановка задачі

Природною *необхідною* умовою існування сумісного продовження мір μ і ν на алгебру $\mathfrak{A}=\langle\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}\rangle$ є нерівність $\nu(C)\le\mu(B)$, що справджується для всіх $C\subset B$, $C\in\mathfrak{C}$, $B\in\mathfrak{B}$, та, аналогічно, нерівність $\mu(D)\le\nu(E)$, яка виконується для всіх $D\subset E$, $D\in\mathfrak{B}$, $E\in\mathfrak{C}$. Виявляється, що ця умова є і *достатньою* для існування невід'ємної скінченно-адитивної функції множин, що визначена на $\mathfrak{A}$ і продовжує обидві міри (див. [9, 10, твердження 1 і зауваження 4]. Але ця функція не обов'язково має бути склейкою мір μ і ν. У даній статті дано опис класу таких мір μ, що для довільної міри ν існує склейка мір μ і ν.

Основні означення і позначення

Всюди надалі всі міри вважатимемо скінченно-адитивними та імовірнісними, тобто $\mu(\Omega)=1$. Нехай $\mathfrak{A}$ – деяка алгебра підмножин на множині Ω та μ – міра, визначена на алгебрі $\mathfrak{A}$. Міра μ називається двозначною, якщо $\mu(\mathfrak{A})=\{0,1\}$. Якщо $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{A}$ – деяка підалгебра алгебри $\mathfrak{A}$ і ν – міра, визначена на алгебрі $\mathfrak{C}$, то через $\mathfrak{I}_\nu$ позначимо ідеал в алгебрі $\mathfrak{C}$ множин ν-міри нуль, тобто $\mathfrak{I}_\nu=\nu^{-1}(0)$. Для $A,B\in\mathfrak{A}$ символом $A\Delta B$ позначатимемо симетричну різницю елементів $A,B\in\mathfrak{A}$, тобто $A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$, де $\bar{A},\bar{B}$ – відповідно доповнення елемента A в алгебрі $\mathfrak{A}$ і елемента B в алгебрі $\mathfrak{B}$.

Позначимо $\hat{\nu}$ – фактор-міру, яку визначено на $\mathfrak{C}/\nu$ рівностями

$$\hat{\nu}(q_\nu(C))=\nu(C),\ C\in\mathfrak{C},$$

де q_ν – канонічний гомоморфізм алгебри $\mathfrak{C}$ на алгебру $\mathfrak{C}/\nu$ класів ν-еквівалентності.

Для будь-якої множини $\mathfrak{D}\subset 2^\Omega$ символом $\langle\mathfrak{D}\rangle$ позначатимемо алгебру підмножин на Ω, породжену $\mathfrak{D}$.

Символами μ_* і μ^* позначатимемо відповідно внутрішню і зовнішню міри, які визначено для будь-якого $A\in 2^\Omega$:

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B), B \subset A, B \in \mathfrak{B}\},$$

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B), A \subset B, B \in \mathfrak{B}\}.$$

Існування склейки мір

Почнемо з прикладу, який показує, що не для всіх мір μ і ν існує сумісне продовження.

Приклад **1.** Нехай Ω – зліченна множина, на якій відокремлена деяка алгебра, але не σ-алгебра підмножин $\mathfrak{C}$, що містила б усі одноточкові підмножини Ω (як, наприклад, алгебра, породжена всіма скінченними підмножинами Ω). Покладемо $\nu(\{\omega_n\}) = 2^{-n}$, $n = 1, 2, ...$, для $\omega_n \in \Omega$. Таким чином, визначимо міру на $\mathfrak{C}$, що задовольняє умову $\nu(C) > 0$ для будь-якої непорожньої множини $\varnothing \neq C \in \mathfrak{C}$. Нехай, надалі, $\mathfrak{B}$ – алгебра, породжена множиною $B \subset \Omega$, $B \notin \mathfrak{C}$. Визначимо імовірнісну міру μ на алгебрі $\mathfrak{B}$, поклавши $\mu(B) = 1$. Тоді міри μ і ν узгоджені. Припустимо, що існує міра λ на алгебрі $\langle \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C} \rangle$, яка продовжує міри μ та ν. Тоді для будь-якої множини $\varnothing \neq C \subset \bar{B}$, $C \in \mathfrak{C}$, має виконуватись співвідношення

$$0 < \nu(C) = \lambda(C) \leq \mu^*(C) = \mu(\bar{B}) = 0.$$

Отримане протиріччя показує, що не існує міри на алгебрі $\langle \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C} \rangle$, що є сумісним продовженням мір μ і ν.

Не кожне сумісне продовження мір є їх склейкою. Простий приклад можна отримати, розглянувши міру на алгебрі $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ із заданими маргінальними мірами μ і ν, яка не є їх добутком.

Надалі будуть потрібні такі допоміжні твердження.

Твердження 1. Нехай $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ – підалгебра і $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ – ідеал алгебри $\mathfrak{A}$. Тоді будь-який елемент алгебри $\mathfrak{A}_0 = \langle \mathfrak{B} \cup \mathfrak{I} \rangle$ може бути зображено у вигляді $B \Delta C$ для деяких $B \in \mathfrak{B}$ і $C \in \mathfrak{I}$.

Доведення. Розглянемо множину $\mathfrak{A}_0$ всіх елементів вигляду $B \Delta C$, $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{I}$. Оскільки $\overline{B \Delta C} = \bar{B} \Delta \bar{C}$, то ця множина замкнена відносно операції доповнення. Крім того, для будь-яких $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ і $C_1, C_2 \in \mathfrak{I}$ маємо

$$(B_1 \Delta C_1) \cap (B_2 \Delta C_2) =$$
$$= (B_1 \cap B_2) \Delta (C_1 \cap B_2) \Delta (B_1 \cap C_2) \Delta (C_1 \cap C_2).$$

Через те що

$$C = (C_1 \cap B_2) \Delta (B_1 \cap C_2) \Delta (C_1 \cap C_2) \subset$$
$$\subset C_1 \Delta C_2 \Delta (C_1 \cap C_2) = C_1 \cup C_2 \in \mathfrak{I},$$

то матимемо

$$(B_1 \Delta C_1) \cap (B_2 \Delta C_2) = (B_1 \cap B_2) \Delta C.$$

Таким чином, множина $\mathfrak{A}_0$ замкнена відносно операції перерізу і тому є алгеброю, яка містить алгебру $\mathfrak{B}$ та ідеал $\mathfrak{I}$, тобто $\mathfrak{A}_0 = \langle \mathfrak{B} \cup \mathfrak{I} \rangle$. Твердження доведено.

Твердження 2. Нехай $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ – підалгебра і $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ – ідеал алгебри $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I} \cap \mathfrak{B}$ та q_0 – канонічний гомоморфізм алгебри $\mathfrak{B}$ на фактор-алгебру $\mathfrak{B}/\mathfrak{I}_0$. Тоді зображення h, що визначається для будь-якого $A \in \mathfrak{A}_0 = \langle \mathfrak{B} \cup \mathfrak{I} \rangle$ як $h(A) = q_0(B)$, де B задовольняє відношення $A = B \Delta C$, $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{I}$, є гомоморфізмом алгебри $\mathfrak{A}_0$ на алгебру $\mathfrak{B}/\mathfrak{I}_0$, причому $h(B) = q_0(B)$ для будь-якого $B \in \mathfrak{B}$ і $h^{-1}(\varnothing) = \mathfrak{I}$.

Доведення. Якщо $A = B_i \Delta C_i$, $B_i \in \mathfrak{B}$, $C_i \in \mathfrak{I}$, $i = 1, 2$, то $A \Delta B_i \in \mathfrak{I}$, $i = 1, 2$, та із співвідношень

$$(B_1 \cap \bar{A}) \cup (\bar{B}_1 \cap A) \supseteq (\bar{B}_2 \cap B_1 \cap \bar{A}) \cup (B_2 \cap \bar{B}_1 \cap A),$$

$$(B_2 \cap \bar{A}) \cup (\bar{B}_2 \cap A) \supseteq (B_2 \cap \bar{B}_1 \cap \bar{A}) \cup (\bar{B}_2 \cap B_1 \cap A)$$

отримаємо

$$(A \Delta B_1) \cup (A \Delta B_2) \supseteq (B_1 \Delta B_2),$$

тобто $(B_1 \Delta B_2) \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{I}_0$.

Таким чином, рівність $h(A) = q_0(B)$ коректно визначає відображення алгебри $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{B}/\mathfrak{I}_0$, причому $h(B) = q_0(B)$ для будь-якого $B \in \mathfrak{B}$.

Крім того, маємо

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) = ((A_1 \cup A_2) \cap (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)) \cup$$
$$\cup ((B_1 \cup B_2) \cap (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)).$$

Оскільки

$$(A_1 \cup A_2) \cap (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) \subseteq (A_1 \cap \bar{B}_1) \cup (A_2 \cap \bar{B}_2),$$

$$(B_1 \cup B_2) \cap (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \subseteq (B_1 \cap \bar{A}_1) \cup (B_2 \cap \bar{A}_2),$$

то

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

і, отже, $(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \in \mathfrak{I}$.

Звідси випливає, що

$$h(A_1 \cup A_2) = q_0(B_1 \cup B_2) = $$
$$= q_0(B_1) \cup q_0(B_2) = h(A_1) \cup h(A_2).$$

Нехай $A \in \mathfrak{A}_0$ і $B \in \mathfrak{B}$ є такими, що $A \Delta B \in \mathfrak{I}$. Оскільки $\bar{A} \Delta \bar{B} = A \Delta B$, то $\bar{A} \Delta \bar{B} \in \mathfrak{I}$ і, отже, $h(\bar{A}) = q_0(\bar{B}) = \overline{q_0(B)} = \overline{h(A)}$.

Остаточно, якщо $A \in \mathfrak{I}$, то в зображенні $A = B \Delta C$, $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{I}$, можна взяти $B = \varnothing$ і, отже, $h(A) = q_0(\varnothing) = \varnothing$. Якщо $h(A) = q_0(B) = \varnothing$, то $B \in \mathfrak{I}_0$ і тоді $A = B \Delta C \in \mathfrak{I}$. Твердження доведено.

Теорема 1. Якщо міра μ двозначна та міри μ і ν узгоджені, тоді на алгебрі $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C} \rangle$ існує їх склейка.

Доведення. Визначимо міру $\tilde{\nu}$ на фактор-алгебрі $\mathfrak{C} \in \mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}_\mu \cap \mathfrak{C}$, поклавши $\tilde{\nu}(q_0(C)) = \nu(C)$, де $q_0 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}/\mathfrak{I}_0$ — канонічний гомоморфізм.

Оскільки міра μ є двозначною, то із співвідношення $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C} \rangle$ випливає, що $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{I}_\mu \cup \mathfrak{C} \rangle$. Тоді за твердженням 2 існує такий гомоморфізм $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}_\nu/\mathfrak{I}_0$, що $h^{-1}(\varnothing) = \mathfrak{I}_\mu^+$. Для будь-якого $A \in \mathfrak{A}$ покладемо $\lambda(A) = \tilde{\nu}(h(A))$. Зрозуміло, що λ — імовірнісна міра, яка є продовженням міри ν. Із співвідношення $h^{-1}(\varnothing) = \mathfrak{I}_\mu^+$ випливає, що λ продовжує також і міру μ.

Нехай тепер $B \in \mathfrak{B}$ і $C \in \mathfrak{C}$. Оскільки міра μ є двозначною, то розглянемо два випадки. Якщо $\mu(B) = 0$, то $\lambda(B \cap C) \le \lambda(B) = \mu(B) = 0$ і, отже, $\lambda(B \cap C) = \lambda(B)\lambda(C)$. Якщо $\mu(B) = 1$, то $\lambda(\bar{B} \cap \bar{C}) = 0$ і знову $\lambda(B \cap C) = \lambda(B \cap C) + \lambda(\bar{B} \cap \bar{C}) = \lambda(C) = \lambda(B)\lambda(C)$. Теорему доведено.

Зауваження. Якщо припустити, що міри μ і ν мають сумісне продовження, тобто що виконана умова $\nu(C) \le \mu(B)$ для будь-яких $C \subset B$, $C \in \mathfrak{C}$, $B \in \mathfrak{B}$, то твердження теореми випливає з відомого результату Е. Марчевського (див. [1, твердження 2]). Дійсно, нехай $C \in \mathfrak{C}, B \in \mathfrak{B}$ і $B \cap C = \varnothing$. Оскільки міра μ двозначна, розглянемо два випадки. Якщо $\mu(B) = 0$, тоді $\mu(B)\nu(C) = 0$. Якщо $\mu(B) = 1$, тоді з відношення $C \subset \bar{B}$ випливає, що $\nu(C) \le \mu(\bar{B}) = 0$. Звідси $\mu(B)\nu(C) = 0$.

Аналогічний результат при інших додаткових обмеженнях було отримано в [11, твердження 2].

Нехай тепер $\mathfrak{M}$ — множина всіх таких двозначних мір на $\mathfrak{B}$, які узгоджені з мірою ν. За теоремою 1 для будь-якої міри $\mu \in \mathfrak{M}$ існує склейка λ мір μ і ν. Нехай також Λ — множина всіх склейок для фіксованої міри ν і міри $\mu \in \mathfrak{M}$, що побудовані як у теоремі 1. Тоді між множинами $\mathfrak{M}$ і Λ можна встановити взаємно однозначну відповідність "i". Нехай, надалі, $\mathfrak{D}$ — мінімальна алгебра на $\mathfrak{M}$, відносно якої є вимірними всі функції вигляду $\mu(B)$, $B \in \mathfrak{B}$ і $\mathfrak{D}' = i(\mathfrak{D})$. Тоді рівності

$$\tilde{\gamma}(B) = \int_\Lambda \lambda(B) d\gamma' = \int_{\mathfrak{M}} \mu(B) d\gamma, \quad B \in \mathfrak{B}, \quad \gamma' = i(\gamma),$$

коректно визначають деяку міру на $\mathfrak{B}$ для будь-якої ймовірнісної міри γ на $\mathfrak{D}$. Зрозуміло, що міра

$$\gamma^*(A) = \int_\Lambda \lambda(A) d\gamma', \quad A \in \mathfrak{A},$$

є склейкою мір $\tilde{\gamma}$ і ν.

Таким чином, отримаємо основний результат.

Теорема 2. Якщо $\mathfrak{M}$ — множина всіх таких двозначних мір на $\mathfrak{B}$, які узгоджені з мірою ν, $\mathfrak{D}$ — мінімальна алгебра на $\mathfrak{M}$, відносно якої є вимірними всі функції вигляду $\mu(B)$, $B \in \mathfrak{B}$ та γ — деяка ймовірнісна міра на $\mathfrak{D}$, тоді для мір $\tilde{\gamma}(B) = \int_M \mu(B) d\gamma$ та ν існує склейка.

Висновки

Наведено опис класу таких мір μ, для яких існує склейка з довільною мірою ν. Приклади застосувань отриманого результату до характеризації мінімальних достатніх підалгебр, до дезінтегрування мір або до екстремальних продовжень міри носять самостійний характер, базуються на іншій ідеології і є предметом подальших досліджень авторів. До того ж у подальших дослідженнях доцільним є описання всіх таких мір на $\mathfrak{B}$, для яких існує склейка з мірою ν і які не можуть бути зображені у вигляді, розглянутому в теоремі 2.

М.Т. Таращанский, Н.Ю. Щестюк

СОВМЕСТНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕР

Приводятся условия, обеспечивающие существование склейки λ мер μ и ν – конечных конечно-аддитивных неотрицательных функций множеств, определенных на алгебрах подмножеств $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ некоторого множества Ω и алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной алгебрами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Показано, что мера λ должна быть при этом совместным продолжением мер μ и ν и, к тому же, $\lambda(B \cap C) = \lambda(B)\lambda(C)$ для любых $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{C}$.

M.T. Tarashchanskii, N.J. Shchestjuk

ON THE COMMON EXTENSION OF MEASURES

In this paper, we describe the conditions, providing the existence of splicing of the measures λ, μ and ν – finite, finitely additive and integral functions of sets, defined on the algebras of subsets $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ of some set Ω and the algebra $\mathfrak{A}$, based on the algebras $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$. Moreover, we show that the measure λ should be a common extension of the measures μ and ν, and $\lambda(B \cap C) = \lambda(B)\lambda(C)$ for any $B \in \mathfrak{B}$, $C \in \mathfrak{C}$.

1. *Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M.* Theory of charges. – London and New York: Academic Press, 1983. – 315 p.
2. *Lipecki Z.* On common extensions of two quasi-measures // Czechoslovak Math. J. – 1986. – **36**. – P. 489–494.
3. *Schmidt K.D., Waldschaks G.* Common extensions of order bounded vector measures // Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. – 1992. – **28**. – P. 117–124.
4. *Basile A., Bhaskara Rao K.P.S., Shortt R.M.* Bounded common extensions of charges // Proc. of the American Mathematical Society. – 1994. – **121**, N 1. – P. 137–143.
5. *D'Aniello E., Bhaskara Rao K.P.S., Shortt R.M.* A Stone space approach to the existence of bounded common extensions // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1998. – **219**, N 2. – P. 442–454.
6. *Guy D.L.* Common extensions of finitely additive probability measures // Portugaliae Math. – 1961. – **20**. – P. 1–5.
7. *Yan C.H.* The theory of commuting Boolean sigma-algebras // Adv. Math. – 1999. – **144(1)**. – P. 94–116.
8. *Таращанський М.Т., Щестюк Н.Ю.* Про незалежне доповнення у ймовірнісному просторі // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Математика та інформатика. Ужгород: Вид-во УНУ. – 2008. – № 17. – С. 236–239.
9. *Schmidt K.D., Waldschaks G.* Common extensions of positive vector measures // Manuskript Fakultat fur Mathematik und Informatik der Universits Mannheim. – 1989. – N 93. – P. 1–15.
10. *Kallianpur G., Ramachandran D.* On the splicing of measures // The Annals of Probability. – 1983. – **11**, N 3. – P. 819–822.
11. *Lipecki Z.* Cardinality of the set of extreme extensions of quasi measures // Manuscripta Math. – 2001. – **104**. – P. 333–341.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
18 вересня 2008 року