

ВИПАДКОВІ ГРАФИ ТА ЙМОВІРНІСНИЙ МЕТОД

ВИКОНАВ:

ГУРСЬКИЙ Б.Р.

ПІД КЕРІВНИЦТВОМ:

ТИМОШКЕВИЧ Л.М.

ТРАВЕНЬ 2024

Мета

1. Дослідити означення, твердження і теореми з теорії випадкових графів та чисел Рамсея.
2. З застосуванням ймовірнісного методу визначити статистичні характеристики випадкових графів та перевірити їх емпіричним шляхом.
3. Перевірити альтернативне застосування ймовірнісного методу у теорії графів на прикладі чисел Рамсея.

Випадкові графи

- о Ймовірнісний простір $G(n, p)$, визначений відповідно до розподілу $P [(u, v) \in E(G)] = p$, де всі події попарно незалежні, називається *стандартною моделлю випадкового графа*, або просто *випадковим графом*.
- о Найвідомішою моделлю випадкових графів є модель Ердеша-Реньї $G(n, p)$, 1959 р.
- о В цій моделі задається кількість n вершин, а потім для кожної можливої пари вершин незалежно з ймовірністю p проводиться ребро між цими вершинами.

Якщо $p \in [0, 1]$ ймовірність графа з n вершинами і k ребрами $G(n, p)$ введемо поняття оберненої ймовірності $q = 1 - p$, що позначає ймовірність того, що ребро між вершинами проведено не буде. Тоді:

$$P(G) = p^k q^{\binom{n}{2} - k}$$

Тоді якщо Ω — множина усіх графів на n вершинах, то $P(\Omega) = 1$

Доведення.

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} p^k q^{\binom{n}{2} - k} = (p + q)^{\binom{n}{2}} = (p + 1 - p)^{\binom{n}{2}} = 1$$

Математичне сподівання кількості ребер графу $G(n, p)$

$$E(a) = \binom{n}{2} \cdot p$$

n	p	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
10	0.5	22.5	22.478
100	0.1	495	495.124
10	0.8	980	980.076

```
def get_edge_count(self):  
    return len(self.graph.edges())
```

Математичне сподівання степеня вершини графу $G(n, p)$

$$E(a) = (n - 1) \cdot p$$

n	p	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
10	0.5	4.5	4.519
100	0.1	9.9	9.913
10	0.8	7.2	7.203

```
def get_random_vertex_degree(self):  
    random_vertex = random.choice(list(self.graph.nodes()))  
    return self.graph.degree(random_vertex)
```

Математичне сподівання кількості трикутників в $G(n, p)$

$$E(a) = \binom{n}{3} \cdot p^3$$

n	p	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
10	0.5	15	14.807
3	0.65	0.275	0.279
10	0.8	61.44	61.428

```
def num_triangles(self):  
    nodes = list(self.graph.nodes())  
    count = 0  
    for nodes_in_clique in combinations(nodes, 3):  
        if self.graph.subgraph(nodes_in_clique)  
            .number_of_edges() == 3 * (3 - 1) // 2:  
            count += 1  
    return count
```

Математичне
сподівання
кількості
клік розмірності
 k в $G(n, p)$

$$E(a) = \binom{n}{k} \cdot p^{\binom{k}{2}}$$

n	p	k	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
10	0.5	5	0.246	0.238
100	0.9	5	87.867	86.987
15	0.2	4	0.087	0.082

```
def num_k_cliques(self, k):  
    nodes = list(self.graph.nodes())  
    count = 0  
    for nodes_in_clique in combinations(nodes, k):  
        if self.graph.subgraph(nodes_in_clique)  
            .number_of_edges() == k * (k - 1) // 2:  
            count += 1  
    return count
```

Математичне сподівання кількості Гамільтонових шляхів в $G(n, p)$

$$E(a) = \frac{n!}{2} \cdot p^{n-1}$$

n	p	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
6	0.5	11.25	10.833
8	0.1	0.002	0.002
5	1	60	60

```
def num_hamiltonian_paths(self):
    count = 0
    nodes = list(self.graph.nodes())
    for perm in permutations(nodes):
        path = []
        for i in range(len(perm)):
            u = perm[i]
            if i == len(perm) - 1:
                break
            v = perm[i + 1]
            if self.graph.has_edge(u, v):
                path.append(u)
            else:
                break
        if len(path) == len(perm) - 1:
            count += 1
    return count/2
```

Математичне сподівання кількості Гамільтонових циклів в $G(n, p)$

$$E(a) = \frac{(n-1)!}{2} \cdot p^n$$

n	p	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
6	0.5	0.938	0.921
8	0.25	0.038	0.048
5	1	12	12

```
def num_hamiltonian_cycles(self):
    count = 0
    nodes = list(self.graph.nodes())
    for perm in permutations(nodes):
        path = []
        for i in range(len(perm)):
            u = perm[i]
            if i == len(perm) - 1:
                v = perm[0]
            else:
                v = perm[i + 1]
            if self.graph.has_edge(u, v):
                path.append(u)
            else:
                break
        if len(path) == len(perm):
            count += 1
    return count/(2*self.n)
```

Математичне сподівання кількості дерев розмірності k в G (n, p)

$$E(a) = \binom{n}{k} \cdot k^{k-2} \cdot p^{k-1}$$

n	p	k	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
4	0.6	3	4.32	4.218
4	0.6	4	3.456	3.492
6	0.2	3	2.4	2.407

```
def num_k_trees(self, k):  
    count = 0  
    edges = list(self.graph.edges())  
    for edge_subset in combinations(edges, k-1):  
        subgraph = nx.Graph(edge_subset)  
        if nx.is_tree(subgraph) and len(subgraph.nodes()) == k:  
            count += 1  
    return count
```

Математичне
сподівання
кількості
ізолюваних
дерев-компонент
розмірності k в $G(n, p)$

$$E(a) = \binom{n}{k} \cdot k^{k-2} \cdot p^{k-1} \cdot q^{\binom{k}{2} - (k-1) + k(n-k)}$$

n	p	k	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
4	0.6	3	0.110	0.096
4	0.6	4	0.221	0.217
6	0.2	3	0.257	0.246

```
def num_k_isolated_trees(self, k):  
    count = 0  
    components = [c for c in  
        nx.connected_components(self.graph) if len(c) == k]  
    for component in components:  
        if self.graph.subgraph(component)  
            .number_of_edges() == k - 1:  
            count += 1  
    return count
```

Математичне сподівання кількості вершин довільних ізолюваних дерев-компонент в $G(n, p)$

$$E(a_v) = \sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot k^{k-2} \cdot p^{k-1} \cdot q^{\binom{k}{2} - (k-1) + k(n-k)}$$

n	p	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
6	0.5	0.7	0.764
8	0.25	3.542	3.624
5	1	0	0

```
def get_isolated_tree_vertex_counts(self):  
    total_vertices = 0  
    components = [c for c in nx.connected_components(self.graph)]  
    for component in components:  
        if self.graph.subgraph(component)  
            .number_of_edges() == len(component) - 1:  
            total_vertices += len(component)  
    return total_vertices
```

Математичне сподівання кількості вершин довільних ізольованих циклів-компонент в $G(n, p)$

$$E(a_v) = \sum_{k=3}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(k-1)!}{2} \cdot p^k \cdot q^{\binom{k}{2} - k + k(n-k)}$$

n	p	Мат. Сподівання	Обчислене знач.
6	0.6	0.013	0.008
5	0.35	0.201	0.188
3	0.99	2.91	2.892

```
def get_isolated_cycle_vertex_counts(self):
    total_vertices = 0
    for component in nx.connected_components(self.graph):
        subgraph = self.graph.subgraph(component)
        if len(component) >= 3 and nx.is_connected(subgraph) and
            len(subgraph.edges()) == len(component):
            all_degree_two = True
            for node in subgraph.nodes():
                if subgraph.degree(node) != 2:
                    all_degree_two = False
                    break
            if all_degree_two:
                total_vertices += len(component)
    return total_vertices
```

Дисперсія

степеня вершини
графа $G(n, p)$

$$D(a) = (n - 1)(p - p^2)$$

n	p	Дисперсія	Обчислене знач.
10	0.5	2.25	2.308
100	0.1	8.91	8.987
10	0.8	1.44	1.429

кількості трикутників в
графі $G(n, p)$

$$D(a) = \binom{n}{3} \cdot (p^3 - p^6) + 12 \binom{n}{4} \cdot (p^5 - p^6)$$

n	p	Дисперсія	Обчислене знач.
10	0.5	52.5	51.725
3	0.65	0.199	0.209
10	0.8	195.133	196.795

Діаметр випадкових графів

$$P(d(G) = 2) = 1 - p^{\binom{n}{2}} - \binom{n}{2} \cdot q \cdot (1 - p^2)^{n-2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - p^{\binom{n}{2}} - \binom{n}{2} \cdot q \cdot (1 - p^2)^{n-2} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p^{\frac{n(n-1)}{2}} \right) - q \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n-1)}{2 \left(\frac{1}{1-p^2} \right)^{n-2}} \right)$$

Нехай $\epsilon > 0$ і $p = p(n) > 0$, і нехай $r \geq (1 + \epsilon)(2 \ln n)/p$ цілочисельна функція від n . Довести що майже жоден граф $G(n, p)$ не містить r незалежних вершин. **Розв'язання.**

$$P(a \geq 1) \leq \binom{n}{r} (1 - p)^{\binom{r}{2}}$$

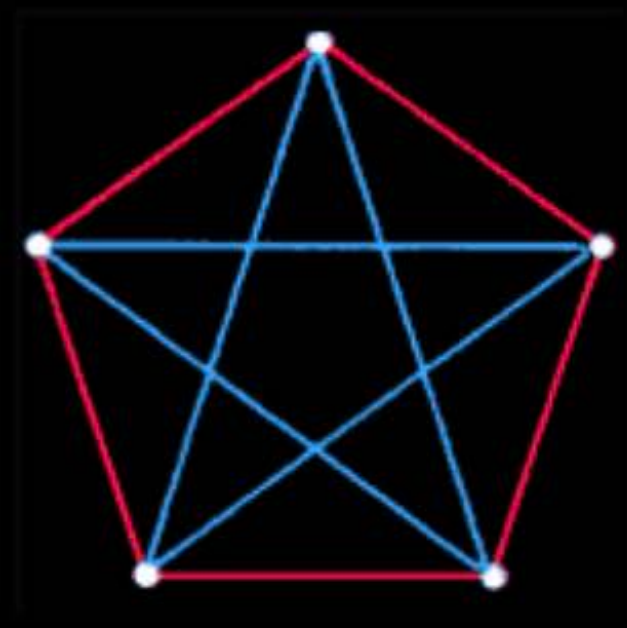
$$\binom{n}{r} (1 - p)^{\binom{r}{2}} \leq n^r (e^{-p})^{\binom{r}{2}} = n^r e^{-p \frac{r(r-1)}{2}} = \left(n e^{-p \frac{r-1}{2}} \right)^r$$

$$n e^{\frac{-pr}{2} + \frac{p}{2}} \leq n e^{\frac{-p(1+\epsilon)(2 \ln n)}{2p} + \frac{p}{2}} = n e^{-(1+\epsilon) \ln n} \cdot e^{\frac{p}{2}} =$$

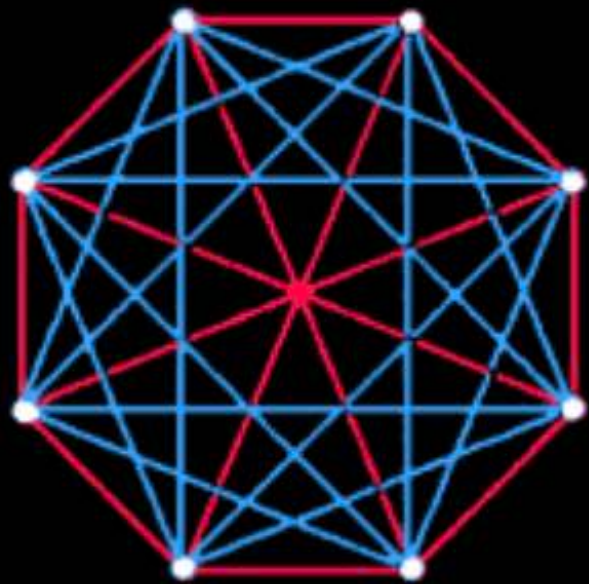
$$= n \cdot n^{1-\epsilon} \cdot e^{\frac{p}{2}} = n^{-\epsilon} \cdot e^{\frac{p}{2}} \leq \frac{\sqrt{e}}{n^\epsilon} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Числа Рамсея

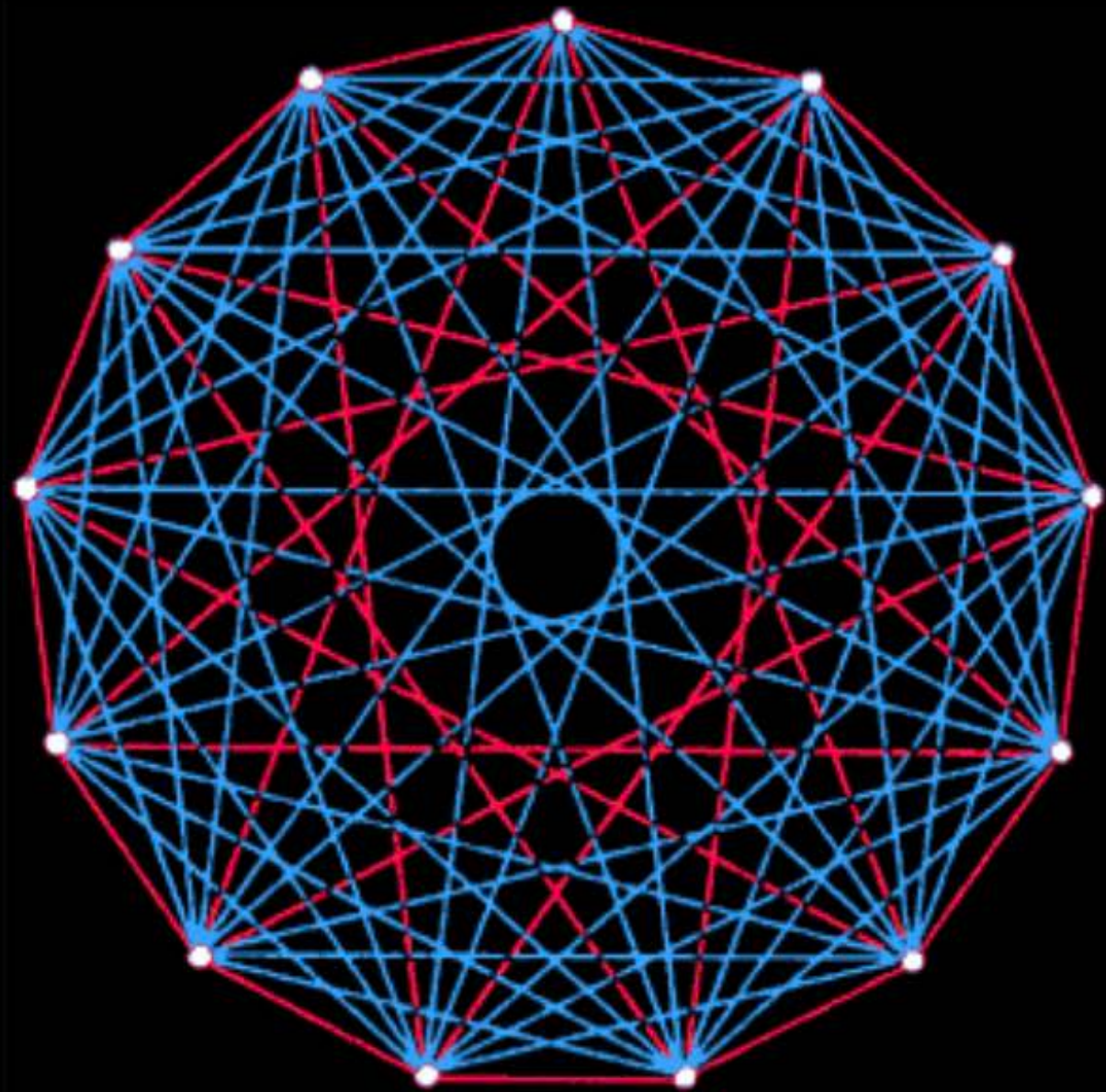
- о Найменше ціле число, для якого будь-який граф на $R(m, n)$ вершинах при будь-якому розфарбуванні його ребер у два кольори обов'язково матиме або кліку на m вершин першого кольору, або кліку на n вершин другого кольору.
- о Наприклад, $R(m, n) = 6$, що означає, що в будь-якому графі на 6 або більше вершинах при будь-якому розфарбуванні обов'язково існує або трикутник (кліка на 3 вершинах) одного кольору, або трикутник іншого кольору.
- о Основні властивості: $R(m, n) = R(n, m)$, $R(1, n) = 1$, $R(1, n) = n$



$$5 < R(3,3) = 6$$



$$8 < R(3,4) = 9$$



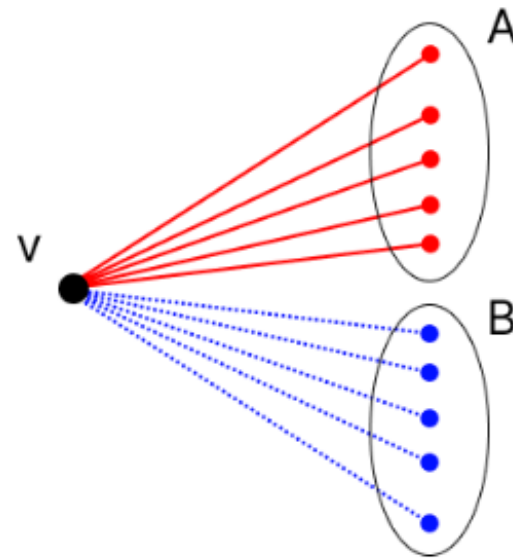
$$13 < R(3,5) = 14$$

m n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			6	9	14	18	23	28	36	40–41
4				18	25	36–40	49–58	59–79	73–106	92–136
5					43–48	59–85	80–133	101–194	133–282	149–381
6						102–161	115–273	134–427	183–656	204–949
7							205–497	219–840	252–1379	292–2134
8								282–1532	329–2683	343–4432
9									565–5366	581–9797
10										798–17730

Теорема Рамсея

Для довільних натуральних m, n існує число Рамсея $R(m, n)$, тоді

$$R(m, n) \leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1)$$



Теорема 2

Для довільних натуральних m, n виконується нерівність:

$$R(m, n) \leq \binom{n + m - 2}{m - 1}$$

Доведення:

$$\begin{aligned} R(m, n) &\leq R(m - 1, n) + R(m, n - 1) \leq \\ &\leq \binom{n + m - 1 - 2}{m - 2} + \binom{n - 1 + m - 2}{m - 1} \end{aligned}$$

Теорема 3. Оцінка знизу

Для будь-якого натурального $k \geq 2$ виконується нерівність:

$$R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$$

розглянемо ймовірність P_{red} того, що існує множина вершин розмірності k , всі ребра якої червоні. Оцінимо цю ймовірність так:

$$P_{red} = P \left(\bigcup_{|A|=k} A_{red} \right) \leq \sum_{|A|=k} P(A_{red}) = \binom{N}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$$

Теорема 3. Оцінка знизу

Отже, з умови доведення маємо $k \geq 4$ і $N < 2^{(k/2)}$:

$$\binom{N}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq \frac{N^k}{2^{k-1}} 2^{-\binom{k}{2}} < 2^{\frac{k^2}{2} - \binom{k}{2} - k + 1} = 2^{-\frac{k}{2} + 1} \leq \frac{1}{2}$$

Список літератури

1. *Reinhard Diestel.*, Graph Theory. 3rd ed., Springer-Verlag, 2005.
2. *Alan Frieze, Michal Karonski.*, Introduction to random graphs, Carnegie Mellon University, 2024.
3. *Kristina Buschur.*, Introduction to Ramsey Theory, 2011.
4. *Eduard Bosch, Jan-Hendrik Evertse.*, Ramsey theory and applications, Universiteit Leiden, Leiden, 2018.
5. *James Odziemiec Dickson.*, An Introduction to Ramsey Theory on Graphs, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2011.
6. *Jiri Matousek, Jan Vondrak.*, The Probabilistic Method, Lecture notes, Department of Applied Mathematics, Charles University Prague, 2008.
7. *N. Alon and J. Spencer.*, The Probabilistic Method, J. Wiley and Sons, New York, NY, 4th edition, 2015.

Дякую за увагу!