Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Курсова робота на тему:

«ВЛАСТИВОСТІ БУЛЕВИХ ОПЕРАЦІЙ НА ДИСТАНЦІЙНО-ТРАНЗИТИВНИХ ГРАФАХ»

Керівник курсової роботи
доктор фіз.-мат наук, професор
Олійник Б. В.
(прізвище та ініціали)

____
(підпис)
“____” ________________ 2020 р.

Виконала студентка 1 курсу
напряму підготовки
113 «Прикладна математика»
Будишевська Марина Олександрівна

“____” __________ 2020 р.

Київ 2020

Тема: Властивості булевих операцій на дистанційно-транзитивних графах.

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	08.10.2019	
2.	Пошук та збір тематичних матеріалів.	25.11.2019	
3.	Ознайомлення з матеріалами та обдумування структури роботи.	30.12.2019	
4.	Написання вступу та плану роботи.	18.01.2020	
5.	Вивчення матеріалів, які необхідні для написання першого розділу роботи, написання першого розділу .	12.02.2020	
5.	Опрацювання матеріалів та написання другого розділу роботи.	21.02.2020	
6.	Вивчення джерел та завершення роботи над другим розділом роботи.	03.03.2020	
7.	Правильне оформлення роботи відповідно до вимог написання курсової роботи.	04.03.2020	
8.	Створення презентації та написання доповіді для захисту роботи.	10.04.2020	
9.	Подання та аналіз попередньої версії роботи з керівником.	11.04.2020	
10.	Коригування роботи згідно із зауваженнями керівника.	11.05.2020	
11.	Захист курсової роботи.	?.05.2020	

Студентка Будишевська М. О.

Керівник Олійник Б. В.

“______” ________________

ЗМІСТ

Анотація

Граф – узагальнено, впорядкована пара, яка складається із вершин та ребер. Дистанційно-транзитивний граф, у свою чергу — такий граф, що для будь-якої пари вершин, які знаходяться на певній відстані та для будь-якої іншої пари вершин, які знаходяться на тій самій відстані існує автоморфізм графа, який переводить одну пару вершин в іншу [11].

У роботі розглянуті основні поняття про дистанційно-транзитивні графи та описані деякі операції над графами, зокрема розглянуто булеві операції на графах.

Розглянуто деякі властивості, які зберігають операції на графах. Операції над графами реалізовано за допомогою Python.

Ключові слова: операції над графами, граф, дистанційно-транзитивні графи.

ВСТУП

В математиці особливу роль грають графи, які володіють симетрією (тобто великою групою автоморфізмів). Серед таких графів виділяють клас дистанційно-транзитивних графів, група автоморфізмів яких діє транзитивно на впорядкованих парах рівновіддалених вершин. Оскільки клас дистанційно-транзитивних графів є досить нетривіальним, то він охоплює значну частину графів, цікавих як із прикладної, так із теоретичної точок зору. Варто підмітити, що широко використовувані у теорії алгебраїчних кодів схеми відношень Хемінга та Джонсона являють собою дистанційно-транзитивний граф [11].

В роботі розглянуто операції на дистанційно-транзитивних графах, зокрема булеві операції. Розглянуто властивості, що зберігаються для дистанційно-транзитивних графів при булевих операціях над цими графами.

Робота складається зі вступу та двох розділів.

Перший розділ складається із загальних відомостей про графи, дистанційно-транзитивні графи та розглянуті операції над графами.

У другому розділі розглянуті деякі запропоновані приклади та візуалізація операцій, реалізована за допомогою Python.

Розділ 1 Основні положення про графи

Неформально граф можна розглядати як геометричну конфігурацію точок та ліній, які з’єднують ці точки із стрілками або ні.

У теорії графів як математичної дисципліни першою роботою вважають статтю Ойлера у 1735-1736 році. У напрацюванні розглядалась задача про «Сім мостів Кеніґсберґа». Відомий вчений довів, що не існує такого маршруту через місто, де потрібно обійти сім мостів і повернутися у початкову точку та при цьому, пройти по кожному мосту тільки один раз.

Графи слугують зручним інструментом для опису зв’язків між об’єктами, методи теорії графів – широко використовуються у дискретній математиці.

Теорія графів містить у собі велику кількість невирішених проблем та задач і поки не доведених гіпотез [2,11].

1.1 Загальні відомості

Розглянемо деякі базові поняття, які стосуються безпосередньо графів.

Загальним орієнтованим графом є сукупність $G = (V, E, L, \partial_E, \partial_L)$, де V− множина вершин (vertexes), E − множина ребер (edges), L − множина петель (loops) та відображень $\partial_E: E \to V \times V$ та $\partial_L: L \to V$. Якщо $\partial_E(e) = (v_1, v_2)$, то вершина v_1 - початок ребра e, а вершина v2 - її кінець .

Загальний неорієнтований − сукупність G, яка складається з трьох множин(вершин, ребер та петель) та відображень $\partial_E : E \to C_V^2$ − множина двохелементних підмножин множини V, $\partial_L : L \to V$.

Граф без кратних ребер та петель є простим, який визначається трійкою (V, E, ∂_E) (наприклад, цілком незв'язний граф - граф із множиною ребер $E = \emptyset$, або повний граф – граф, у якого будь-які дві вершини з'єднані ребром).

Вершини v1, v2 у орієнтованому (неорієнтованому) графі є суміжними, якщо існує ребро $e \in E : \partial_E(e) = (v_1, v_2)$ $(\partial_E(e) = \{v_1, v_2\})$. Ребро e є інцидентним обом вершинам. Ребра e_1, e_2 є суміжними, якщо множини $\partial_E(e_1)$ і $\partial_E(e_2)$ мають спільну вершину. Вершина v та ребро e інцидентні, якщо ребро e інцидентне вершині v. Вершина v та петля l називаються інцидентними, якщо $\partial_L(l) = v$.

Степінь або валентність вершини (deg v) – це кількість ребер, які інцидентні даній вершині плюс подвоєна кількість інцидентних їй петель.

Циклом у графі є шлях, в якому вершини(перша та остання) збігаються [1].

1.2 Дистанційно-транзитивні графи

Нехай існує простий зв'язний граф G із функцією відстані d_G. У такому випадку граф є дистанційно-транзитивним, якщо для довільних вершин графа G, для яких виконується рівність $d_G (u, v) = d_G (x, y)$, існує автоморфізм g в G, такий що $g(u) = x$ і $g(v) = y$. Інакшими словами – граф є дистанційно-транзитивним у тому випадку, якщо його група автоморфізмів Aut(G) діє транзитивно на впорядкованих парах рівновіддалених вершин.

Відстань між двома вершинами графа — це кількість ребер у найкоротшому шляху, що сполучає їх, детальніше ознайомитись можна у наступному розділі.

Дистанційно-транзитивний граф також є вершинно-транзитивним та симетричним (так само як і дистанційно-регулярним).

Також дистанційно-транзитивні графи можуть бути цікаві, загалом, через велику кількість автоморфізмів. Є декілька цікавих прикладів скінченних груп, які є групами автоморфізмів дистанційно-транзитивних графів.

Прикладом може слугувати граф Бігса-Сміта, який є найбільшим дистанційно-транзитивним графом (рис.1.1) [3].

Підсумовуючи [13, 20 розділ], дистанційно-транзитивний граф справедливо можна називати вершинно-транзитивним та симетричним, так само як і дистанційно-регулярним. Варто зауважити, що аналіз вершинно-транзитивних, симетричних і дистанційно-регулярних графів не є предметом даної роботи і у даному розділі розглядатимемо у розумінні дистанційно-транзитивних графів.

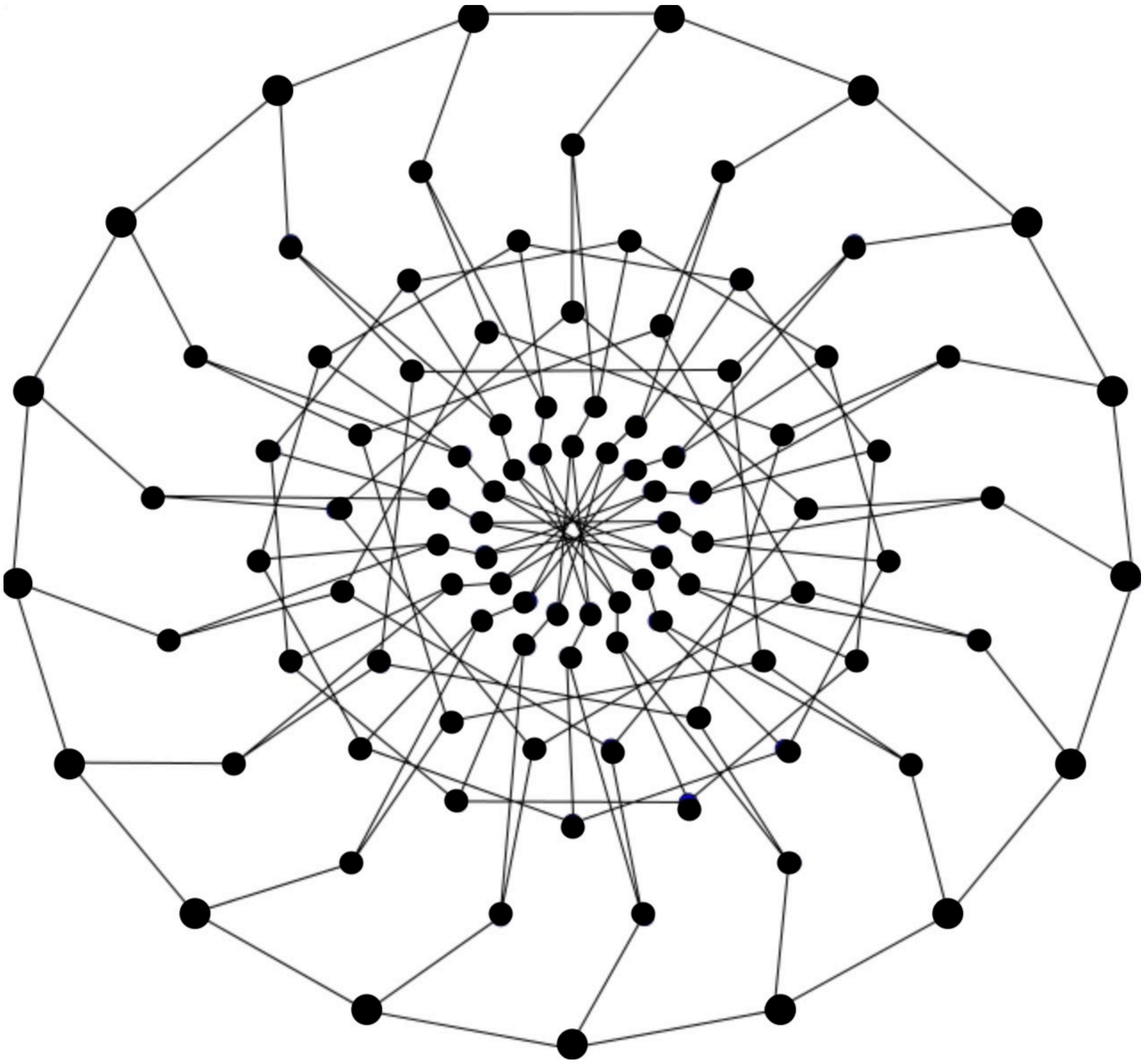


Рисунок 1.1 Граф Бігса-Сміта

1.3 Операції на графах

На двох графах G_1 і G_2 існує декілька операцій, результатом якого є граф, чий набір вершин - декартовий добуток V_1 x V_2, де V_k - набір вершин G_k. Деякі з операцій були незалежно кілька разів винайдені, що призвело до значної неоднозначності через використання різної термінології та позначень. Дані операції важливі для побудови нових класів графів, що, в свою чергу, можуть бути корисними для розпізнавання та декомпозиції графів та для визначення структурних властивостей графів з точки зору їх складових підграфів.[6]

Погляд на булеві вирази, наведених тут, слугував для координації визначень усіх відомих операцій та пропонування нових. Алгебраїчне подання матриці суміжності графа найзручніше у вираженні кожної булевої операції з точки зору її складових графів G_1 та G_2.

Метою є розробка нових булевих операцій на двох графах, пов'язати їх із різними існуючими операціями. Також дослідити деякі інваріантні властивості булевих операцій, продемонструвати спосіб зв'язку булевих операцій один з одним, забезпечити умови для зв'язності графів, отриманих булевими операціями, і поставити деякі невирішені проблеми, що стосуються групи автоморфізму такого складного графа [5].

Граф G складається із скінченної множини вершин V і множини ребер X, остання є підмножиною всіх невпорядкованих пар точок. Назвемо точки G як окремі мітки $\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$ і результат - помаркованим графом. Розглядаються лише помарковані графи. Кажуть, що дві окремі вершини v_1 та v_2 є суміжними (записані як v_i сум. v_j), якщо ребро $\{v_i,v_j\}$є X. Для стислості позначимо ребро $\{v_i,v_j\}$ через v_i,v_j.

Матриця суміжності $A=A(G)=[a_{ij}]$ графа G матриці p x p із входами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо vi сум. vj} \\ 0, \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Зауважимо, що кожен $a_{ij}=0$ і A є симетричним. Нехай $J=J_p$ – матриця p x p із кожним входом 1. Також, нехай $I=I_p=[\delta_{ij}]$ –одинична матриця p x p. Доповнимо, позначивши $\oplus$, беручи по модулю 2. Наприклад, $A(K_p)=J_p \oplus I_p$ позначаємо матрицею суміжності K_p повного графа з p вершинами.

Граф $\bar{G}$ є комплементарним до графа G, якщо він також має множину вершин V і для $i \neq j$, v_i сум. v_j в $\bar{G}$ коли v_i і v_j не є суміжними в G. Таким чином, суміжна матриця $\bar{G}$ є $\bar{A}=A(\bar{G})=A \oplus J \oplus I$. Отже, позначимо $\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]$. Маємо $\bar{a}_{ij} = a_{ij} \oplus I \oplus \delta_{ij}$.

Нехай $A=[a_{ij}]$, p_1 x p_2 та $B=[b_{rs}]$, p_2 x p_2 – бінарні матриці. Їх тензорний добуток A*B визначається, як матриця $[a_{ij}B]$:

$$A*B= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots a_{1p_1}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots a_{2p_1}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p_1 1}B & a_{p_1 2}B & \dots a_{p_1 p_1}B \end{bmatrix}.$$

Тензорний добуток, також відомий як добуток Кронекера, є асоціативним, дистрибутивним над $\oplus$, але не є комутативним [7].

Булева операція на впорядкованій парі незв'язних помаркованих графів G_1 і G_2 результат поміченого графа $G=G_1 \circ G_2$, який має декартовий добуток $V = V_1 \times V_2$ як свій набір вершин. Множина X ребер G виражається у вигляді ребер у X_1 та X_2, по-різному для кожної булевої операції [9].

Мабуть, найпростішою булевою операцією є кон'юнкція $G_1 \wedge G_2$ (введена Вайсхелем, який назвав її «добутком Кронекера»). Кон'юнкція $G_1 \wedge G_2$ визначається шляхом вказівки його набору ребер. Для будь-яких двох точок $u=(u_1,u_2)$ та $v=(v_1,v_2)$ в $V=V_1 \times V_2$, ребро $uv \in X$ якщо $[u_1v_1 \in X_1]$ і $[u_2v_2 \in X_2]$. Наприклад, якщо $G_1=K_2=\overset{u_1}{o}\text{\_\_\_\_}\overset{v_1}{o}$ і $G_2=K_{1,2}=\overset{u_2}{o}\text{\_\_\_\_}\overset{v_2}{o}\text{\_\_\_\_}\overset{w_2}{o}$, тоді $G= G_1 \wedge G_2$ є помаркованим графом на рисунку 1.2.

$G_1 \wedge G_2$:

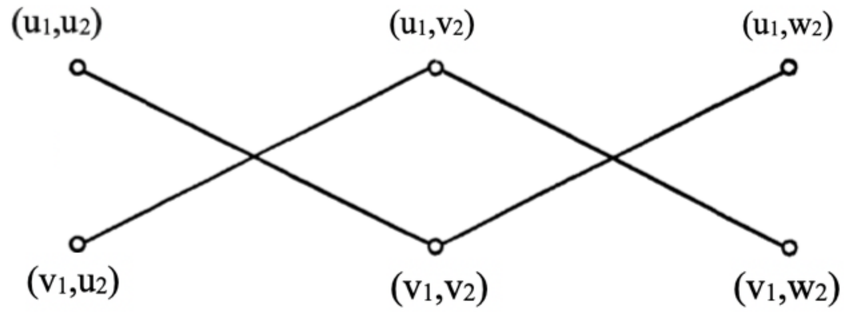


Рисунок 1.2. Кон'юнкція

Враховуючи зауваження П.М.Весхеля [9] матриця суміжності кон'юнкції $G= G_1 \wedge G_2$ є тензорним добутком $A(G_1 \wedge G_2) = A_1 * A_2$ матриць суміжності A_1 та A_2. Проілюструємо за допомогою наведених вище графів $G_1=K_2$ і $G_2=K_1$ комбінуючи,

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad A_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

щоб отримати:

$$A(G_1 \wedge G_2) = A_1 * A_2 = \begin{bmatrix} 0 & A_2 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Декартовий добуток – булева операція $G = G_1 \times G_2$, у якій для будь-яких двох вершин $u=(u_1,u_2)$ та $v=(v_1,v_2)$, ребро uv знаходиться в X якщо $[u_1=v_1$ і $u_2v_2 є X_2]$ або $[u_2=v_2$ і $u_1v_1 \in X_1]$. Наприклад, з $G_1=K_2$ і $G_2=K_{1,2}$, декартовий добуток $G = G_1 \times G_2$, можна побачити на рисунку 1.3. Також, ми можемо виразити $A(G_1 \times G_2)$ як суміжну матрицю декартового добутку з огляду на A_1 та A_2 :

$$A(G_1 x G_2) = (A_1 * I p_2) \oplus (A_2 * I p_1)$$

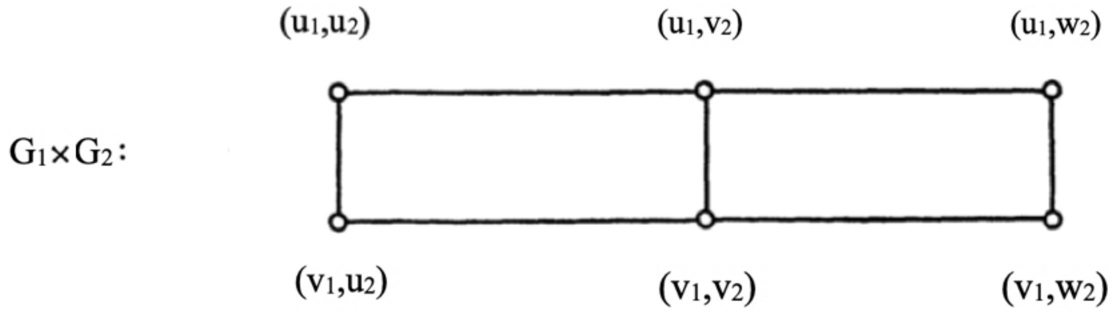


Рисунок 1.3. Декартовий добуток

Композиція $G = G_1[G_2]$ – булева операція, із $u=(u_1,u_2)$ та $v=(v_1,v_2)$, ребро uv належить X, коли $[u_1v_1 \in X_1]$ або $[u_1v_1$ і $u_2v_2 \in X_2]$. Таким чином, з $G_1=K_2$ та $G_2=K_1$ ілюструємо як $G_1[G_2]$ так і $G_2[G_1]$ на рисунку 1.4. Знову матриця суміжності $A(G_1[G_2])$ цих булевих операцій може бути вираженою через матрицю суміжності A_1 та A_2 помаркованих графів G_1 та G_2:

$$A(G_1[G_2]) = (A_1 * Jp_2) \oplus (Ip_1 * A_2),$$

та визначаємо $G_1[G_2]$ через їхню матрицю суміжності:

$$A(G_1[G_2]) = (A_1 * Ip_2) \oplus (Jp_1 * A_2).$$

Остання наведена матриця є зручною репрезентацією $G_2[G_1]$, це пермутаційний еквівалент до $A(G_2[G_1])$ [2].

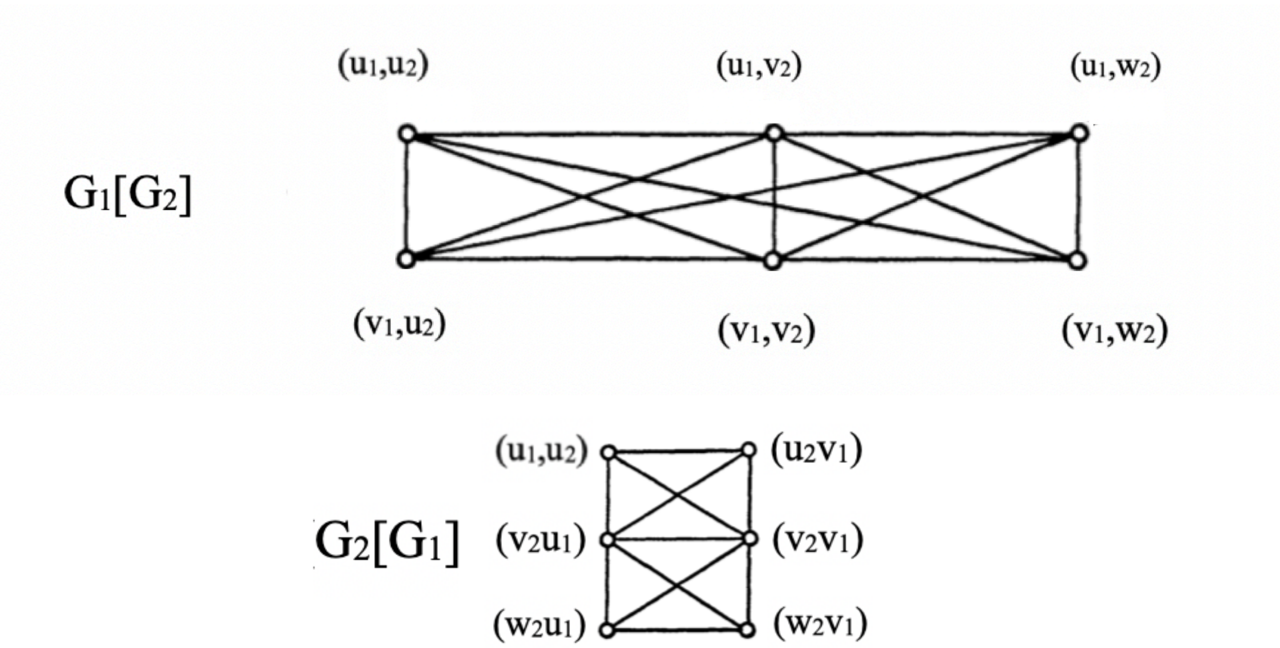


Рисунок 1.4. Композиція

Звичайно, можна розглядати графи, отримані шляхом застосування інших булевих операцій із теорії множин.

Симетрична різниця $G = G_1 \oplus G_2$ - визначається так, що булева операція на G_1 та G_2 і така, що з $u=(u_1,u_2)$ та $v=(v_1,v_2)$, ребро $uv \in X$, коли або $[u_1v_1 \in X_1]$ або $[u_2v_2 \in X_2]$ (але не обидва випадки).
У цьому випадку, матриця суміжності задається

$$A(G_1 \oplus G_2) = (A_1 * Jp_2) \oplus (Jp_1 * A_2).$$

Із $G_1 = K_2$ та $G_2 = K_{1,2}$, граф $G_1 \oplus G_2$ проілюструємо на рисунку 1.5.

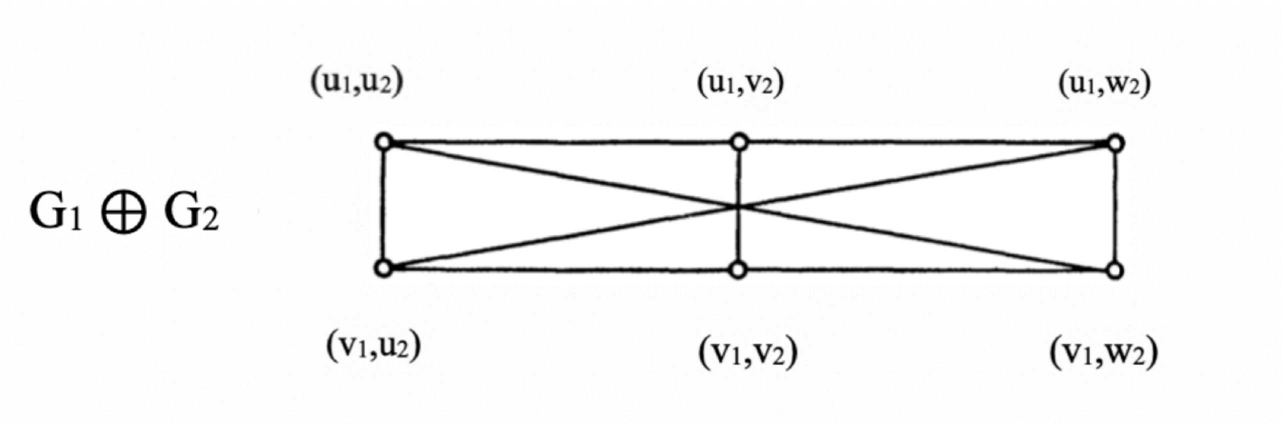


Рисунок 1.5. Симетрична різниця

Диз'юнкція $G=G_1 \vee G_2$ має $uv \in X$, коли $[u_1v_1 \in X_1]$ або $[u_2v_2 \in X_2]$ (або обидва випадки), тому

$$A(G_1 \vee G_2) = (A_1 * Jp_2) \oplus (Jp_1 * A_2) \oplus (A_1 * A_2)$$

Проілюструємо диз'юнкцію $G = K_2 \vee K_{1,2}$ на рисунку 1.6.

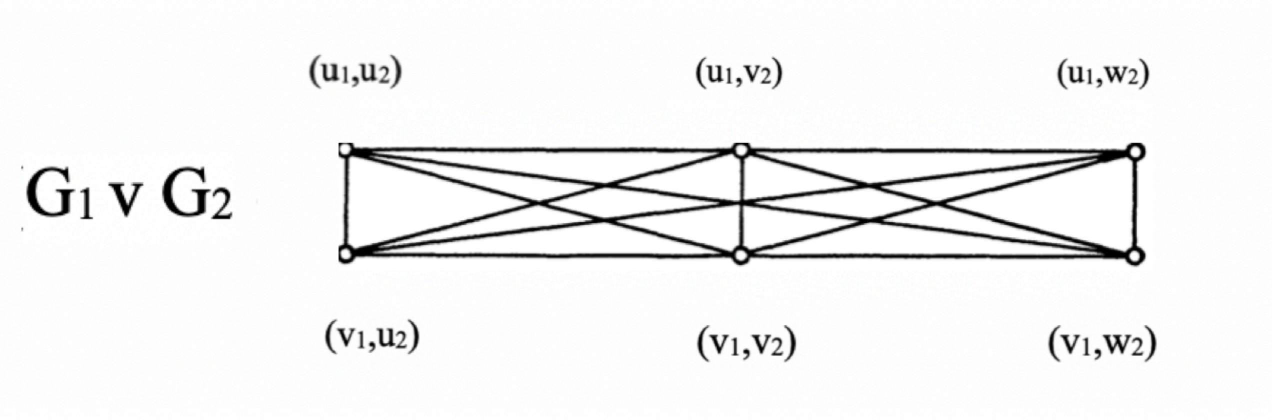


Рисунок 1.6. Диз'юнкція

Простий збіг, що K_2 v $K_{1,2}$ = K_2 [$K_{1,2}$]. Наведемо приклад: $K_{1,2}$ v K_2 та $K_{1,2}$[K_2] не є ізоморфними.

Відторгнення G=G_1 | G_2 є булевою операцією, визначеною uv ∈ X, коли [$u_1v_1 \notin X_1$] і [$u_2v_2 \notin X_2$], тому

$$A(G_1 \mid G_2) = \bar{A}_1 * \bar{A}_2$$

Де перед $\bar{A}_k \oplus Ip_k \oplus Jp_k$ [11].

Доповнення $\bar{G} = \overline{G1{\circ}G2}$ будь-якої булевої операції $G = G_1{\circ}G_2$ має ребро uv тільки якщо uv ∉ X, множини ребер G. Таким чином, матриця суміжності $\bar{G}$ дорівнює наступній рівності

$$A(\overline{G1{\circ}G2}) = A(G_1{\circ}G_2) \oplus (Ip_1 * Ip_2) \oplus (Jp_1 * Jp_2).$$

Тепер, визначаємо степінь кожної вершини $G=G_1{\circ}G_2$ та кількість ребер в G з точки зору на G_1 та G_2. Степінь d_i вершини $u_i \notin V$ - це кількість прямих інцидентних із нею. Степені вершин G задаються у вигляді матриці суміжності A=[a_{ij}] через $d_j=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}$. За Ойлером добре видно, що кількість q ребер G задовольняє рівнянню

$$q = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} d_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} .$$

Позначення тензорного добутку для булевих операцій на графах дозволяє легко рахувати кількість ребер на кожній булевій операції $G=G_1°G_2$. Нехай

$p_k = |V_k|$, $q_k = |X_k|$, $k = 1,2$ та $p = p_1p_2$. Проілюструємо записи у таблиці 1.1 (також, наведено кількість ребер та степенів вершин для булевих операцій, наведених вище) для декартового добутку $G=G_1 \times G_2$. Запишемо для зручності $A_1 = [a_{ij}]$, $A_2 = [b_{rs}]$, d_i – вершини v_i в G_i та e_r – вершина u_r в G_2 [5]. Використавши $A(G_1xG_2) = (A_1{*}Ip_2) \oplus (A_2{*}Ip_1)$, маємо

$$q = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p_1}\sum_{r=1}^{p_2}[\sum_{j=1}^{p_1}\sum_{\delta=1}^{p_2}(a_{ij}\delta_{rs}\oplus\delta_{ij}b_{rs})] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p_1}\sum_{r=1}^{p_2}\sum_{j=1}^{p_1}\sum_{\delta=1}^{p_2}(a_{ij}\delta_{rs} + \delta_{ij}b_{rs} - 2a_{ij}\delta_{rs}\delta_{ij}b_{rs}).$$

Але $a_{ij}\delta_{rs}\delta_{ij}b_{rs}$ для всіх i, j, r, s, звідки

$$q = \sum_{i=1}^{p_1}\sum_{r=1}^{p_2} d_i + e_r = q_1p_2 + q_2p_1,$$

шляхом застосування $q = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} d_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}$.

Якщо позначимо $d_{i,r}$ як степінь вершини $w = (v_i, u_r)$, v_i є V_1 та u_r є V_2 в G, тоді для $G=G_1 \times G_2$, маємо з $q = \sum_{i=1}^{p_1}\sum_{r=1}^{p_2} d_i + e_r = q_1p_2 + q_2p_1$:

$$d_{i,r} = d_i + e_r.$$

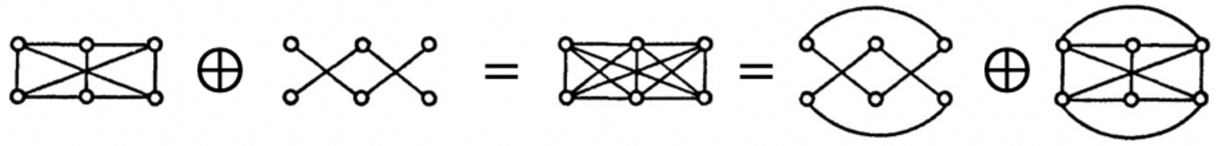
НАЗВА БУЛЕВОЇ ОПЕРАЦІЇ	ЗАПИС	КІЛЬКІСТЬ Q РЕБЕР У ГРАФІ G	СТЕПІНЬ $\boldsymbol{d_{i,r}}$ У ВЕРШИНІ W=$(\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{u_r})$ У ГРАФ**а** $\boldsymbol{G}$
КОН'ЮНКЦІЯ	G1ΛG2	$2q_1g_2$	d_ie_r
ДЕКАРТОВИЙ ДОБУТОК	G1 X G2	q_1p_2+q_2p_1	$d_i + e_r$
КОМПОЗИЦІЯ	G1[G2]	$q_1{p_2}^2$+q_2p_1	$d_ip_2 + e_r$
СИМЕТРИЧНА РІЗНИЦЯ	G1 ⊕ G2	$q_1{p_2}^2$+$q_2{p_1}^2 - 4q_1q_2$	$d_ip_2 + e_rp_1 - 2d_ie_r$
ДИЗ'ЮНКЦІЯ	G1VG2	$q_1{p_2}^2$+$q_2{p_1}^2 - 2q_1q_2$	$d_ip_2 + e_rp_1 - d_ie_r$
ВІДТОРГНЕННЯ	G1 | G2	$\binom{p}{2} - \ q_1{p_2}^2 - q_2{p_1}^2 + 2q_1q_2$	$(p_1 - d_i - 1)(\ p_2 - e_r - 1)$

Таблиця 1.1. Степені вершин і кількість ребер в булевих операціях на графах

Розглянемо далі зв'язки між булевими операціями. Перше спостереження випливає із A($\overline{G1°G2}$) = A(G_1°G_2) ⊕ (Ip_1* Ip_2) ⊕ (Jp_1* Jp_2) : симетрична різниця будь-яких двох булевих операцій двох однакових графів є симетричною різницею їхнього доповнення [6]. Тобто, для будь-яких двох булевих операцій о та о' і будь-яких двох графів G_1 та G_2 :

$$A(G_1 \circ G_2) \oplus A(\ G_1 \circ' G_2) = A(\ \overline{G1 \circ G2}) \oplus (\ \overline{G1 \circ' G2}).$$

Рівняння може бути проілюстроване беручи G_1 = K_2, G_2=$K_{1,2}$, і операції симетричної різниці та кон'юнкції, тому



Видно, що

$$A(G_1 \vee G_2) = A(G_1 \oplus G_2) \oplus A(G_1 \wedge G_2).$$

Розширюємо $A(\overline{\bar{G}_1 \vee \bar{G}_2})$ використовуючи $A(\overline{G1^\circ G2}) =$ $= A(G_1{}^\circ G_2) \oplus (Ip_1 * Ip_2) \oplus (Jp_1 * Jp_2)$ та $A(G_1 \vee G_2) = (A_1 * Jp_2) \oplus (Jp_1 * A_2) \oplus$ $\oplus (A_1 * A_2)$ і порівнюючи результат із $A(G_1 \wedge G_2) = A_1 * A_2$ та $A(G_1 x G_2) =$ $= (A_1 * Ip_2) \oplus (A_2 * Ip_1)$, знаходимо:

$$A(\overline{\bar{G}_1 \vee \bar{G}_2}) = A(G_1 x G_2) \oplus A(G_1 \wedge G_2).$$

Покажемо інші відношення булевих операцій, отриманих аналогічним чином:

$$A(G_1[G_2]) \oplus A(G_1[G_2]) = A(G_1 x G_2) \oplus A(G_1 \oplus G_2)$$

$$A(G_1 x G_2) = A(\bar{G}_1 x G_2) \oplus A(G_1 x \bar{G}_2) \oplus A(\bar{G}_1 x \bar{G}_2)$$

$$A(\overline{\bar{G}_1 \vee \bar{G}_2}) = A(G_1 x G_2) \oplus A(K_{p1} \wedge K_{p2}).$$

Теорема 1.1. $A(G_1[G_2]) = A(G_1[G_2])$, тоді і тільки тоді, коли обидва G_1 та G_2 є повними або обидва незв’язні.

Умова теореми 1.1 не варто тлумачити як відповідь на більш головні питання ізоморфізму. Наприклад, якщо $G_1 = G_2$, тоді $G_1[G_2]$ та $G_2[G_1]$ ізоморфні, але $A(G_1[G_2]) \neq A(G_2[G_2])$ через маркування. Для будь-яких двох графів G_1 та G_2 відомо лише, що $G_1[G_2] \cong G_2[G_1]$ коли G_1 та G_2 обидва повні, обидва незв'язні або ізоморфні.

Наслідок 1.1. Декартовий добуток і симетрична різниця двох графів рівна, тоді і тільки тоді, коли обидва повні або незв'язні. Зрозуміло, що це випливає із теореми 1.1 у застосуванні до рівняння $A(G_1[G_2]) \oplus A(G_1[G_2]) = {}$ $=A(G_1 \times G_2) \oplus A(G_1 \oplus G_2)$ [5-8].

Розглянемо зв'язність булевих операцій. Введемо деякі додаткові визначення. Шлях у G – послідовність відмінних точок, у яких кожна послідовна пара точок є ребром графа G. Цикл – коли кінцеві точки шляху, принаймні три, з'єднуються ребром графа G. Довжина шляху або циклу – це кількість ребер. Непарний шлях або цикл має непарну довжину.

Вершини u та v зв'язні в G, якщо існує шлях, записаний u-v, з'єднуючий ці вершини. Граф зв'язний, якщо існує шлях, котрий з'єднує кожну пару вершин. Якщо граф G не є зв'язним, то G може бути розподіленим на максимально зв'язні підграфи. Дані непересічні підграфи є компонентами графа G. Компонент тривіальний, якщо складається із єдиної ізольованої точки [11].

Теорема 1.2. Кон'юнкція $G = G_1 \Lambda G_2$ є зв'язною тоді і тільки тоді, коли G_1 або G_2 мають один цикл.

Може бути очевидним те, що дана теорема може бути перефразована для трактування зв'язності операції відторгнення (за рівнянням $A(G_1 \mid G_2) = {}$ $=\bar{A}_1 * \bar{A}_2$).

Теорема 1.3. Декартовий добуток $G = G_1 \times G_2$ зв'язний тоді і тільки тоді, коли G_1 та G_2 зв'язні.

Тож, забезпечимо критерій зв'язності для симетричної різниці $G_1 \oplus G_2$ за допомогою наступних лем.

Лема 1.1. Симетрична різниця $G_1 \oplus G_2$ зв'язна, якщо G_1 та G_2 зв'язні.

Лема 1.2. Якщо G_1 та G_2 і кожен містить принаймні одне ребро, тоді симетрична різниця $G_1 \oplus G_2$ має рівно один нетривіальний компонент.

Лема 1.3. Ізоляти $G = G_1 \oplus G_2$ складаються із впорядкованих пар ізолятів G_1 та G_2.

Теорема 1.4. Нехай G_1 та G_2 – нетривіальні графи. Якщо ні G_1 ні G_2 є незв’язними, тоді їхня симетрична різниця зв’язна, якщо і тільки якщо G_1 та G_2 не містять обох ізолятів. Якщо один з G_1 або G_2 незв’язний, тоді $G_1 \oplus G_2$ зв’язний, якщо і тільки якщо інший є зв’язним.

Теорема 1.5. Диз’юнкція двох графів є зв’язною якщо і тільки якщо їхня симетрична різниця є зв’язною.

Теорема 1.6. Композиція $G_1[G_2]$ є зв’язною якщо і тільки якщо граф G_1 є зв’язним [11].

Стає зрозуміло, що наведені теореми легко дають критерії зв’язності складних булевих операцій.

Група графа G – це сукупність усіх автоморфізмів G, тому саме група перестановок дала необхідну і достатню умову, щоб група декартових добутків двох графів була «декартовим добутком» (за Харором) [6,10].

Виходячи із проаналізованої літератури, розглянемо, які операції дозволяють зберегти дистанційну транзитивність графів.

Розділ 2 Розв'язання емпіричних завдань на практиці

2.1 Деякі представлені розв'язки

Нехай G позначає простий зв'язний граф із множиною вершин V = V(G), що має принаймні дві вершини, суміжну матрицю A = A(G) і максимальний степінь вершини Δ_G. Відстань між двома вершинами uv ∈ V представлено як $d_G(u,v)$. Ексцентриситет вершини u дорівнює $ecc_G(u):=max_{v\in V}d_G(u,v)$ та діаметр графа G – D(G) := $max_{u\in V}$ $ecc_G(u)$. Нехай $G^k(u)$, $0 \leq k \leq ecc_G(u)$. Позначимо множину вершин на відстані k від u, при цьому $G^1(u)$ просто записуємо як G(u). Для повноти нехай $G^k(u) := \emptyset$, якщо k < 0 або eccG(u)< < k. Зв'язний граф G є дистанційно-регулярним(або транзитивним), якщо для будь-яких двох вершин u та v ∈ $G^k(u)$, $0 \leq k \leq D(G)$, кількість $a_k^G(u,v) = \left| G^k(u) \cap G(v) \right|, b_k^G(u,v) = |G^{k+1}(u) \cap G(v)|$, і $c_k^G(u,v) = |G^{k-1}(u) \cap\cap G(v)|$ не залежать від u та v, а тільки від k. У такому разі запишемо a_k^G, b_k^G, c_k^G замість $a_k^G(u,v)$, $b_k^G(u,v)$, $c_k^G(u,v)$ та назвемо множину цих змінних як параметри G. Запишемо, що $a_k^G + b_k^G + c_k^G = \Delta_G$ для усіх $0 \leq k \leq D(G)$. Дане визначення також поширюється на незв'язні графи, припускаючи, що кожен із компонентів є дистанційно-транзитивним із тим самим параметром a_k^G, b_k^G, c_k^G для $0 \leq k \leq D(G)$ [2-5,12].

Багато операцій над графами визначено на декартовому добутку множини вершин графів, використовуючи лише рівність та суміжність між відповідними вершинами цього графа. Більш відомим є сума та добуток графа, які є особливим випадком наступної головної композиції [12].

Визначення 2.1. Нехай B – множина бінарних n-кортежів, тобто B ⊆ ⊆ $\{0,n\}^2 \setminus \{(0, \dots , 0)\}$ таких, що для кожного $i = 1, \dots , n$, існує $ß \in B$ з $ß_i = 1$. Неповна розширена p-сума (НРПС) графів $G_1, \dots , G_n$ з базисом B, записаний як НРПС ($G_1, \dots , G_n$; B), це граф із множиною вершин $V(G_1) \times \dots \times V(G_n)$, у якій дві вершини $(u_1, \dots , u_n)$ і $(v_1, \dots , v_n)$ суміжні якщо і тільки якщо наявний $(ß_1, \dots , ß_n) \in B$ такий, що u_i суміжний до v_i в G_i коли $ß_i = 1$, і $u_i = v_i$, коли $ß_i = 0$. В такому випадку, суміжність $(u_1, \dots , u_n)$ і $(v_1, \dots , v_n)$ визначається $(ß_1, \dots , ß_n)$.

Зокрема, для n = 2, ми маємо наступні приклади НРПС: добуток $G_1 \times G_2$, коли $B = \{(1,1)\}$; сума $G_1 + G_2$, коли $B = \{(0,1),(1,0)\}$; строга сума $G_1 \oplus G_2$, коли $B = \{(1,1),(1,0)\}$; і строгий добуток $G_1 \oplus G_2$, коли $B = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Власні значення $G_1 + G_2$ мають вигляд $\lambda_1 + \lambda_2$, власні числа $G_1 \times G_2$ мають вигляд $\lambda_1 \cdot \lambda_2$, де λ_1 - власне значення G_1, λ_2 - власне значення G_2. Далі розглянемо у розділі збереження дистанційної транзитивності, там де містяться випадки строгої суми та добутку. Варто зазначити, що питання зв'язності НРПС доводиться, якщо $G_1, \dots , G_k$ є зв'язним двочастковим графом, і $G_{k+1}, \dots , G_n$ є зв'язним недвочастковим графом, то кількість компонентів НРПС($G_1, \dots , G_n$;B) рівне $2^{k\text{-rank}(B`)}$, де B' складається з перших k стовпців B і rank(B`) позначає ранк матриці 0-1 взятої над бінарним полем. Таким чином, можна побачити з визначень суми, строгої суми і строгого добутку, що отриманий результат зв'язних графів завжди зв'язний. Окрім того, добуток зв'язних графів є зв'язним, якщо принаймні один граф є недвочастковим, коли він має рівно дві компоненти якщо обидва графи є двочастковими [6,12].

2. Для графа G і двох вершин $u,v \in V(G)$, ми визначаємо непарну відстань $od_G(u,v)$ як відстань найкоротшого непарного шляху, що приєднується u і v в G, і для кожного шляху $ed_G(u,v)$ як довжини найкоротшого шляху , що приєднується u і v в G. Якщо між u та v немає жодного шляху, то встановлюємо сет

$od_G(u,v) = \infty$($ed_G(u,v) = \infty$). Розпочнемо з леми про відстань в композиціях графів.

Лема 2.1. Нехай G і H – два зв'язних графи, і нехай $u = (u_1,v_2)$, $v = (v_1,v_2) \in$ $\in V(G) \times V(H)$. Тоді

$$d_{G+H}(u,v) = d_G(u_1,v_1) + d_H(u_2,v_2),$$

$$d_{G\otimes H}(u,v) = \max\{d_G(u_1,v_1), d_H(u_2,v_2)\},$$

$$d_{G\otimes H}(u,v) = \begin{cases} d_G(u_1,v_1), \text{якщо } d_G(u_1,v_1) \geq d_H(u_2,v_2) \\ d_H(u_2,v_2),\ \text{якщо } d_G(u_1,v_1) < d_H(u_2,v_2)\ і\ d_G(u_1,v_1) \equiv d_H(u_2,v_2) (mod\ 2) \\ d_H(u_2,v_2), \text{якщо } d_G(u_1,v_1) < d_H(u_2,v_2), d_G(u_1,v_1) \not\equiv d_H(u_2,v_2) (mod\ 2)\,, \\ \max\{od_G(u_1,v_1), ed_G(u_1,v_1)\} \leq d_H(u_2,v_2) \\ d_H(u_2,v_2) + 1, \text{якщо } d_G(u_1,v_1) < d_H(u_2,v_2), d_G(u_1,v_1) \not\equiv d_H(u_2,v_2) (mod\ 2)\,, \\ \max\{od_G(u_1,v_1), ed_G(u_1,v_1)\} > d_H(u_2,v_2) \end{cases}$$

і якщо u та v є тими ж компонентами G x H, тоді

$$d_{G \times H}(u,v) = \min\{\max\{ od_G(u_1,v_1), od_H(u_2,v_2)\}, \max\{ed_G(u_2,v_2), ed_H(u_2,v_2)\}\}.$$

Доведення 2.1. Нехай $d_1 = d_G (u_1,v_1)$ і $d_2 = d_H (u_2,v_2)$, і нехай $u_1 = s_0, s_1, \ldots, s_{d_1-1}, s_{d_1} = v_1$ і $v_2 = t_0, t_1, \ldots, t_{d_2-1}, t_{d_2} = v_2$ буде найкоротшим шляхом між u_1 та v_1 в G та відповідно між u_2 та v_2 у H. Перша координата потребує принаймні d_1 кроків, друга – d_2 та крок між u та v може не бути коротшим, аніж $\max\{d_1,d_2\}$ в будь-якій композиції [7,12].

Наступний крок між u та v в G + H має довжину $d_1 + d_2$:

$$W_1 : u = (s_0, t_0), (s_1, t_0), (s_2, t_0), \ldots , (s_{d_1}, t_0), (s_{d_1}, t_1), (s_{d_1}, t_2), \ldots , (s_{d_1}, t_{d_2}) = v.$$

Оскільки кожен крок між u та v у G + H змінює одну координату на будь-якому кроці, можна побачити, що кількість кроків потребує йти з u до v принаймні $d_1 + d_2$. Таким чином, $d_{G+H}(u,v) = d_1 + d_2$. Припустимо, що $d_1 > d_2$. Наступний крок між u та v має довжину d_1 , і належить до обох $G \otimes H$ та $G \oplus H$:

$W_2 : u = (s_0, t_0), (s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots , (s_{d2}, t_{d2}), (s_{d2+1}, t_{d2}), (s_{d2+2}, t_{d2}),\dots , (s_{d1}, t_{d2}) = v.$

Припустимо, що $d_1 < d_2$. Наступний крок між u та v в $G \otimes H$ має довжину d_2 :

$W_3 : u = (s_0, t_0), (s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots , (s_{d1}, t_{d1}), (s_{d1}, t_{d1+1}), (s_{d1}, t_{d1+2}),\dots , (s_{d1}, t_{d2}) = v.$

Оскільки $\max\{d_1,d_2\}$ це найменша можлива довжина шляху між u та v в $G \otimes H$, ми робимо висновок, що $d_{G\otimes H}(u,v) = \max\{d_1,d_2\}$. Якщо $d_1 < d_2$ і $d_1 \equiv d_2$ (mod 2), то наступним кроком між u та v в $G \oplus H$, яка перша досягає вершини (s_{d1}, t_{d1}) і тоді перша координата коливається , поки друга не сягне t_{d2} має довжину d_2:

$W_4 : u = (s_0, t_0), (s_1, t_1), \dots , (s_{d1}, t_{d1}), (s_{d1-1}, t_{d1+1}), (s_{d1}, t_{d1+2}), (s_{d1-1}, t_{d1+3}), \dots , (s_{d1}, t_{d2}) = v.$

Якщо $d_1 < d_2$ і $d_1 \not\equiv d_2$ (mod 2), то наступним кроком між u та v в $G \oplus H$, яка перша досягає вершини (s_{d1}, t_{d1}) і тоді перша координата коливається , поки друга не сягне t_{d2} має довжину d_2+1:

$W_5 : u = (s_0, t_0), (s_1, t_1), \dots , (s_{d1}, t_{d1}), (s_{d1-1}, t_{d1+1}), (s_{d1}, t_{d1+2}), \dots , (s_{d1-1}, t_{d2}), (s_{d1}, t_{d2}) = v.$

Найкоротший шлях між u та v в $G \oplus H$ існує, якщо і тільки якщо наявне проходження між u_1 та v_1 в G, що має довжину не більше d_2 і має таке ж саме співвідношення як d_2. Тому робимо висновок, що наведена вище система справедлива [12].

Будь-який шлях між u та v в G x H мусить змінювати обидві координати за той самий час, тому вона повинна викликати кроки між u_1 та v_1 в G і u_2 та v_2 в H маючи однакову рівність. Це також показує, що G x H має дві компоненти, де обидва G та H нерівні, оскільки у такому випадку. Один із $od_G(u_1,v_1)$ і $ed_G(u_1,v_1)$ існує. Всякий раз, коли граф зв'язний і не рівних, коли не двочастковий, тоді обидва непарні та існує відстань для всіх пар його вершин. Таким чином, якщо u і v знаходяться в одному компоненті, $d_{G\times H}(u,v) \leq \max\{od_G(u_1,v_1), od_H(u_2,v_2))\}$ і $d_{G\times H}(u,v) \leq \max\{ed_G(u_1,v_1), od_H(u_2,v_2))\}$. Оскільки за допомогою коливання однієї з координат, можна побудувати шлях між u_1 та v_1 в G x H довжин $\max\{od_G(u_1,v_1), od_H(u_2,v_2))\}$ та $\max\{ed_G(u_1,v_1), od_H(u_2,v_2))\}$, для цих значень, що не дорівнюють ∞, має місце також $d_{G\times H}(u,v) = \min\{\max\{ od_G(u_1,v_1), od_H(u_2,v_2)\}, \max\{ed_G(u_2,v_2), ed_H(u_2,v_2)\}\}$[12].

Далі вважатимемо, що G та H - зв'язні, дистанційно–транзитивні графи.

Лема 2.2. Якщо або $G \otimes H$ або $G \oplus H$ дистанційно-транзитивний, то або $D(G)=1$ або $D(H)=1$ [12].

Теорема 2.1. $G \otimes H$ є дистанційно – транзитивним якщо і тільки якщо. $G \cong K_m$ і $H \cong K_m$ для деяких $m,n \in N$ [3,12].

Теорема 2.2. У першому випадку, якщо G має принаймні три вершини, то $G \oplus H$ є дистанційно-транзитивним якщо і тільки якщо існує $m, n, t \in N$ такі, що $G \cong K_{m, \ldots, m}(t)$ та $H \cong K_n$. Та в другому випадку, граф $K_2 \oplus H$ є дистанційно-транзитивним якщо і тільки якщо, параметри H задовольняють наступні відношення для всіх $j = 0, 1, \ldots, D(H) -1$ [6,12]:

$$b_j^H = 1 + a_{j+1}^H + b_{j+1}^H,$$

$$1 + a_j^H + c_j^H = c_{j+1}^H$$

Нехай G та H зв'язні, дистанційно – транзитивні графи, тоді[12,13]:

1) G + H є дистанційно-транзитивним, якщо і тільки якщо G має ті ж параметри, що й Ham(D(G), a_1^G+2) і H має той самий параметр, як Ham(D(H), a_1^G+2) (за $b_j^H = 1 + a_{j+1}^H + b_{j+1}^H$).
2) G x H є дистанційно-транзитивним, якщо і тільки якщо кожен G ≅ H ≅ $K_{n,n}$ для деяких n∈ N (за $1 + a_j^H + c_j^H = c_{j+1}^H$) [8].
3) G ⊗ H є дистанційно-транзитивним, якщо і тільки якщо G ≅ K_m і H ≅ K_n для деяких m, n ∈ N.
4) Якщо G має принаймні три вершини, тоді G ⊕ H є дистанційно – транзитивним якщо і тільки якщо існує m, n, t ∈ N таке що G ≅ $K_{m,\ldots,m}(t)$ і H ≅ K_n.
5) K_2 ⊕ H є дистанційно–транзитивним якщо і тільки якщо параметри H задовольняє наступні відношення для всіх j = 0, 1, … , D(H)-1:

$$b_j^H = 1 + a_{j+1}^H + b_{j+1}^H, \qquad 1 + a_j^H + c_j^H = c_{j+1}^H$$

Можна побачити, що збереження дистанційної-транзитивності, лише якщо формула дистанційності для НРПС графів може бути виражена як симетрична функція дистанційності між координатами та деякі подальші умови щодо факторів НРПС.

Тож, маючи таку різноманітність формул дистанційності лише для особливих випадків, коли НРПС має лише два фактори, зрозуміло, що наразі навряд чи можна очікувати приємної формули дистанційності для загального випадку НРПС. Наразі, відомо лише, що якщо всі фактори НРПС зв'язані та двочасткові, а сам НРПС зв'язний, то діаметр НРПС не перевищує суму діаметрів факторів [12].

2.2.Програмна реалізація деяких операцій на Python

Покажемо декілька операцій за допомогою Python.

1. Кон'юнкція двох графів, де новостворений графік N - це об'єднання графів G і H. Якщо у нас є спільні вузли між двома графами і все ще хочемо отримати їх об'єднання, тоді ми будемо використовувати іншу функцію, яку називають disjoint_set(): N = nx.disjoint_set (G, H), що дозволить перейменувати вузли та отримаємо потрібний граф[14].

In [ ]:
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph()

plt.figure(figsize =(9, 12))
G.add_edges_from([(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4),
                  (4, 5), (4, 6), (5, 7), (5, 8), (7, 8)])

# створюємо перший граф
plt.subplot(311)
nx.draw_networkx(G)

H = nx.Graph()
H.add_edges_from([(13, 14), (13, 15), (13, 9),
                  (14, 15), (15, 10), (9, 10)])

# створюємо другий граф
plt.subplot(312)
nx.draw_networkx(H)


N = nx.union(G, H)
plt.subplot(313)
nx.draw_networkx(I)
```

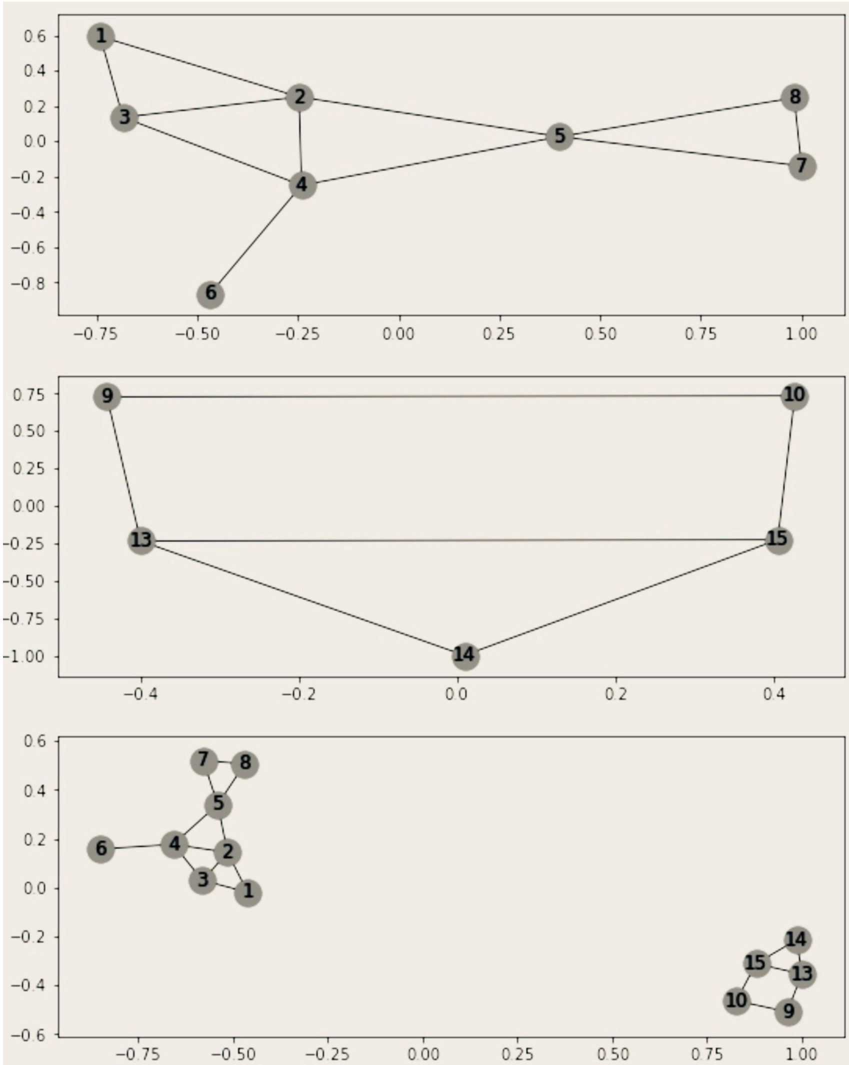


Рисунок 2.2.1. Результат для кон'юнкції

2. Декартовий добуток, ребро $((g_i, h_j), (g_k, h_l))$ існує тільки у випадку: $i=k$ і (h_j, h_l) існує як ребро в H; $j=l$ і (g_i, g_k) існує як ребро в G

In [ ]:
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph()

plt.figure(figsize =(9, 18))
G.add_edges_from([(1, 2), (2, 3)])

#перший граф
plt.subplot(311)
nx.draw_networkx(G)

H = nx.Graph()
H.add_edges_from([(6, 7)])
# другий граф
plt.subplot(312)
nx.draw_networkx(H)


N = nx.cartesian_product(G, H)
plt.subplot(313)
nx.draw_networkx(I)
```

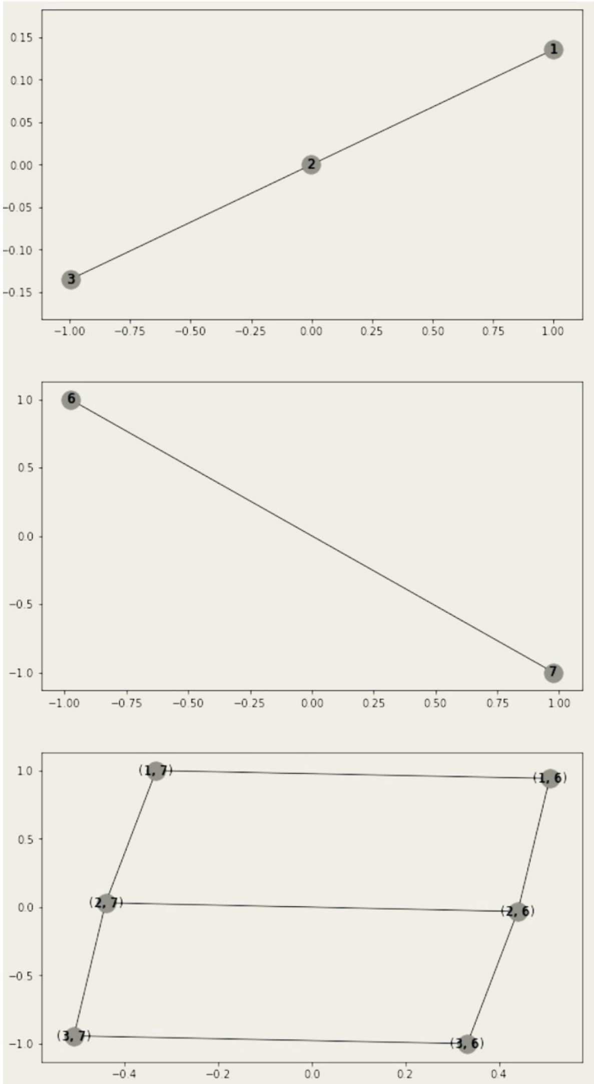


Рисунок 2.2.2. Результат для декартового добутку

3. Композиція двох графів.

```
In [ ]: import networkx as nx
        import matplotlib.pyplot as plt

        G = nx.Graph()

        plt.figure(figsize =(9, 15))
        G.add_edges_from([(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)])

        # перший граф
        plt.subplot(311)
        nx.draw_networkx(G)

        H = nx.Graph()
        H.add_edges_from([(3, 7), (7, 4), (3, 4)])
        # другий граф
        plt.subplot(312)
        nx.draw_networkx(H)


        N= nx.compose(G, H)
        plt.subplot(313)
        nx.draw_networkx(I)
```

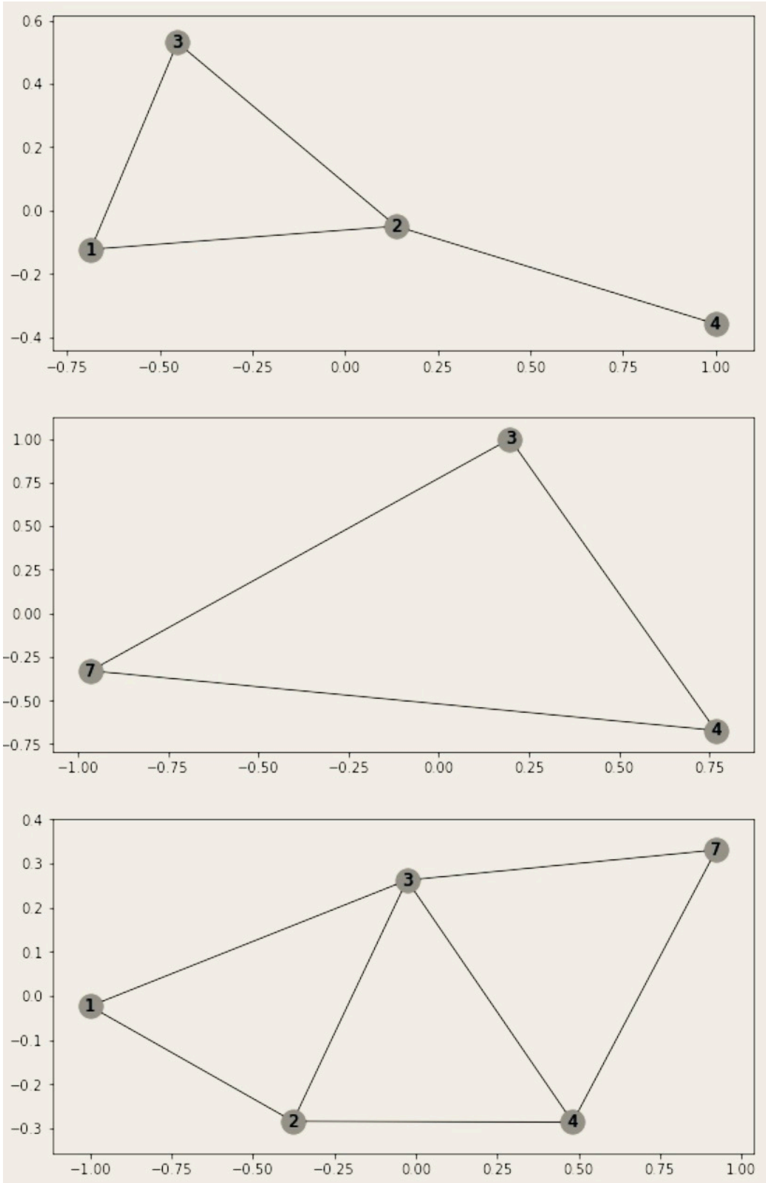


Рисунок 2.2.3. Результат для композиції двох графів

ВИСНОВКИ

В роботі розглянуті загальні властивості дистанційно – транзитивних графів. Описано операції над графами, зокрема, булеві операції над графами. Розглянуто властивості цих операцій.

Серед усіх розглянутих операцій тільки сума графів зберігає властивість дистанційної транзитивності.

Крім того, для операцій над графами написано програми на мові Python, що обчислюють і візуалізують результат операцій.

Список використаної літератури

1. Бондарчук, Ю. В. (2009). Основи дискретної математики: Навч. посіб. *ЮВ Бондарчук, БВ Олійник–К.: Вид. дім «Києво–Могилянська академія.*

2. Berge, C. (1962). The theory of graphs and its applications, Methuen & Co. *Ltd., London.*

3. B. Oliynyk, M. Lukashova, T. Lukashova, (2017) *Perfect 1-codes on cubic distance-transitive graphs*.

4. Brualdi, R. A. (1967). Kronecker products of fully indecomposable matrices and of ultrastrong digraphs. *Journal of Combinatorial Theory, 2*(2), 135-139.

5. Hall, M. (1959). The Theory of Groups, Chelsea Publ. Co., *New York*.

6. Harary, F. (1959). On the group of the composition of two graphs. *Duke Mathematical Journal, 26*(1), 29-34.

7. Moon, J. W., & Harary, F. (1967). A seminar on graph theory.

8. McAndrew, M. H. (1963). On the product of directed graphs. *Proceedings of the American Mathematical Society, 14*(4), 600-606.

9. Weichsel, P. M. (1962). The Kronecker product of graphs. *Proceedings of the American mathematical society, 13*(1), 47-52.

10. Harary, F., & Wilcox, G. W. (1967). Boolean operations on graphs. *Mathematica Scandinavica*, 41-51.

11. R.J. Wilson (1996), *Introduction to Graph Theory* (4th Edition), Prentice Hall.

12. Stevanovic, D. (2004). Distance regularity of compositions of graphs. *Applied mathematics letters, 17*(3), 337-344.

13. N. BIGGS, "Algebraic Graph Theory," Cambridge Univ. Press, London, 1974.

14. https://www.geeksforgeeks.org/, https://www.geeksforgeeks.org/operations-on-graph-and-special-graphs-using-networkx-module-python/