

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ КИСНЕВОГО РЕЖИМУ ВОДНИХ ЕКОСИСТЕМ ЗА УМОВИ ЇХ ЕВТРОФІКАЦІЇ

Проводиться якісний аналіз нелінійної динамічної системи, що описує кисневий режим у водних екосистемах. Встановлено умови, за яких у нелінійній системі виникають режими коливального типу.

1. Постановка задачі

У задачах моделювання процесів самоочищення водних екосистем одним із основних об'єктів досліджень є розчинений кисень. У найпростіших випадках його динаміка описується моделлю Фелпса–Стрітера [1]. Врахування додаткових факторів впливу – динаміки фосфору [3] та популяції фітопланктону [4] – на процеси формування кисневого режиму та трансформації

органічних сполук розширює математичну модель [2] до системи диференціальних рівнянь, яку можна представити у такому вигляді:

$$\frac{dC_{\text{БПК}}}{dt} = \frac{Q_{\text{БПК}}}{W} - \left(k_1 + \frac{q}{W} \right) C_{\text{БПК}} + m_1 C_{\text{ФП}},$$
$$\frac{dC_{\text{РК}}}{dt} = \frac{Q_{\text{РК}}}{W} + k_2 C^* + \alpha C_{\text{ФП}} - \left(k_2 + \frac{q}{W} \right) C_{\text{РК}} - k_1 C_{\text{БПК}},$$

$$\begin{aligned}\frac{dC_{\text{ФП}}}{dt} &= \left(P_{\text{ФП}}^{\max} \frac{C_{\text{Ф}}}{K_{\mu} + C_{\text{Ф}}} - m \right) C_{\text{ФП}}, \\ \frac{dC_{\text{Ф}}}{dt} &= \frac{Q_{\text{Ф}}}{W} - n_1 C_{\text{ФП}} + n_2 C_{\text{БПК}} - \frac{q}{W} C_{\text{Ф}},\end{aligned}\quad (1)$$

де функції $C_{\text{БПК}}$, $C_{\text{РК}}$, $C_{\text{ФП}}$, $C_{\text{Ф}}$ – концентрації біологічної потреби кисню, розчиненого кисню, фітопланктону та фосфору у водному об'єкті; параметри W , q , $Q_{\text{БПК}}$, $Q_{\text{РК}}$, $Q_{\text{Ф}}$, k_1 , $C_{\text{РК}}^*$, m , $R_{\text{БПК}} = m_1 C_{\text{ФП}}$, $m_1 = \gamma m$, $0 < \gamma < 1$, $A_{\text{РК}} = a C_{\text{ФП}}$, $P_{\text{ФП}}^{\max}$, n_1 , n_2 є характеристиками водного об'єкта та внутрішньоводоймних процесів у ньому. Для зручності вивчення системи (1) введемо такі позначення змінних системи $(C_{\text{БПК}}, C_{\text{РК}}, C_{\text{ФП}}, C_{\text{Ф}}) = (x, y, z, u)$ та параметрів $\frac{Q_{\text{БПК}}}{W} = A$, $\frac{Q_{\text{РК}}}{W} + k_2 C^* = B$, $\frac{Q_{\text{Ф}}}{W} = C$, $\frac{q}{W} = S$, $P_{\text{ФП}}^{\max} = P$:

$$\begin{aligned}x' &= A - (k_1 + S)x + m_1 z, \\ y' &= B - k_1 x - (k_2 + S)y + \alpha z, \\ z' &= \left(P \frac{u}{K_{\mu} + u} - m \right) z, \\ u' &= C + n_2 x - n_1 z - Su,\end{aligned}\quad (2)$$

де $(\cdot)' = \frac{d}{dt}(\cdot)$.

2. Лінійний аналіз стійкості стаціонарних точок та чисельний експеримент

Система (2) є нелінійною, і її загальний розв'язок знайти не вдається. Тому в даному випадку використаємо прийоми якісного аналізу динамічних систем [6]. Насамперед знайдемо координати стаціонарних точок, прирівнявши праві частини системи до нуля. У результаті нескладних обчислень отримаємо координати двох стаціонарних точок:

точки K

$$\begin{aligned}x_K &= \frac{A}{k_1 + S}, \quad y_K = \frac{B(k_1 + S) - Ak_1}{(k_1 + S)(k_2 + S)}, \\ z_K &= 0, \quad u_K = \frac{An_2 + C(k_1 + S)}{S(k_1 + S)}\end{aligned}$$

та **точки L**

$$\begin{aligned}x_L &= \frac{m_1 K_{\mu} S m - (m_1 C + n_1 A)(P - m)}{(P - m)(m_1 n_2 - n_1(k_1 + S))}, \\ y_L &= \frac{(B - A)(P - m)k_1 n_1 + B m_1 n_2 (P - m)}{(P - m)(m_1 n_2 - n_1(k_1 + S))(k_2 + S)} + \\ &+ \frac{C k_1 m_1 (P - m) - k_1 m_1 K_{\mu} m S + B m n_1 S - B n_1 P S}{(P - m)(m_1 n_2 - n_1(k_1 + S))(k_2 + S)} + \\ &+ \frac{\alpha (An_2(m - P) + C(m - P)(k_1 + S) + m K_{\mu} S(k_1 + S))}{(P - m)(m_1 n_2 - n_1(k_1 + S))(k_2 + S)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_L &= \frac{(K_{\mu} S m (S + k_1) - n_2 A (P - m) - C (P - m)(S + k_1))}{(P - m)(m_1 n_2 - n_1(S + k_1))}, \\ u_L &= \frac{K_{\mu} m}{(P - m)}.\end{aligned}$$

Знайдені точки відповідають стаціонарним розв'язкам системи (1)–(4), що задають стан рівноваги, на який може вийти модель з плином часу. Залежно від того, яка з точок є стійкою при заданому наборі параметрів, той режим і буде встановлюватись у системі з часом. Як тільки координати початкової точки потрапляють в область притягання стійкої точки, характер розв'язку буде передбачуваним. Дослідження на стійкість стаціонарної точки проведемо у лінійному наближенні. Для цього розглянемо лінеаризовану в околі стаціонарної точки систему

$$\frac{dY}{dt} = \hat{J}Y, \quad (3)$$

де

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{pmatrix} = \quad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} -k_1 - S & 0 & m_1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 - S & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Pu}{K_{\mu} + u} - m & \left(\frac{1}{K_{\mu} + C_{\text{Ф}}} - \frac{u}{(K_{\mu} + u)^2} \right) zP \\ n_2 & 0 & -n_1 & -S \end{pmatrix},$$

$f_i(x, y, z, u)$ – праві частини системи (2).

Характер стійкості особливої точки визначається власними значеннями матриці (4), які для стаціонарної точки K отримаємо з відомого співвідношення

$$\det |\hat{J} - \lambda E| = 0, \quad (5)$$

де λ – власне значення матриці Якобі

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} -k_1 - S & 0 & m_1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 - S & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ n_2 & 0 & -n_1 & -S \end{pmatrix}$$

$$\text{в точці K, } G = \frac{P(An_2 + C(k_1 + S))}{An_2 + (C + K_{\mu} S)(k_1 + S)} - m.$$

Користуючись властивостями визначників з умови (5), отримаємо усі чотири дійсні власні значення $\lambda_1 = -k_1 - S$, $\lambda_2 = -k_2 - S$, $\lambda_3 = -S$, $\lambda_4 = G$.

Якщо вибрати параметри так, щоб λ_i були від'ємні, то стаціонарна точка K є стійким вузлом. Однак за певного набору може статись, що $G > 0$, тоді точка K втрачає стійкість та перетворюється на сідлову.

В околі точки K динаміку компонент можна описати асимптотичним розв'язком лінеаризованої системи (3). Знайдемо власні вектори матриці (4)

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \left(-\frac{k_1}{n_2}, \frac{k_1^2}{n_2(k_2 - k_1)}, 0, 1 \right), \bar{E}_2 = (0, 1, 0, 0), \\ \bar{E}_3 &= (0, 0, 0, 1), \bar{E}_4 = (M_1, M_2, M_3, 1), \\ M_1 &= \frac{(S + G)m_1}{m_1 n_2 - n_1(k_1 + S + G)}, \\ M_2 &= \frac{(S + G)(-k_1 m_1 + \alpha(k_1 + S + G))}{(k_2 + S + G)(m_1 n_2 - n_1(k_1 + S + G))}, \\ M_3 &= \frac{(S + G)(k_1 + S + G)}{m_1 n_2 - n_1(k_1 + S + G)}.\end{aligned}$$

Користуючись принципом суперпозиції, побудуємо загальний розв'язок лінеаризованої системи (3)

$$(x, y, z, u) = (x_K, y_K, z_K, u_K) + C_1 \bar{E}_1 e^{-(k_1 + S)t} + C_2 \bar{E}_2 e^{-(k_2 + S)t} + C_3 \bar{E}_3 e^{-St} + C_4 \bar{E}_4 e^{Gt}. \quad (6)$$

Тоді з початкової умови $(x_K, y_K, z_K + \varepsilon, u_K)$, $\varepsilon \ll 1$, вибраної поблизу стаціонарної точки K , знайдемо сталі C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ у співвідношенні (6)

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{\varepsilon m_1 n_2}{k_1(G + k_1 + S)}, C_2 = -\frac{\varepsilon(k_1 m_1 + \alpha(k_2 - k_1))}{(k_1 - k_2)(G + k_2 + S)}, \\ C_3 &= \frac{\varepsilon(k_1 n_1 - m_1 n_2)}{(G + S)k_1}, C_4 = -\frac{\varepsilon(G n_1 + k_1 n_1 - m_1 n_2 + n_1 S)}{(G + S)(G + k_1 + S)}\end{aligned}$$

як розв'язок лінійної системи алгебраїчних рівнянь. Остаточно отримаємо частковий розв'язок:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_K - \frac{\varepsilon m_1}{(G + k_1 + S)} e^{-(S + k_1)t} + \varepsilon M_1 C_4 e^{Gt}, \\ y(t) &= y_K + \frac{\varepsilon k_1^2 C_1}{n_2(k_2 - k_1)} e^{-(S + k_1)t} + \varepsilon C_2 e^{-(S + k_2)t} + \\ &+ \varepsilon M_2 C_4 e^{Gt}, \\ z(t) &= z_K + \varepsilon e^{Gt}, \\ u(t) &= u_K + \varepsilon \frac{m_1 n_2}{k_1(G + k_1 + S)} e^{-(S + k_1)t} + \\ &+ \varepsilon \frac{(k_1 n_1 - m_1 n_2)}{k_1(G + S)} e^{-St} + \frac{\varepsilon}{M_3} e^{Gt}.\end{aligned} \quad (7)$$

Проведемо аналогічні обчислення для точки L . Матриця лінеаризованої системи (3) у точці B має вигляд

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} -k_1 - S & 0 & m_1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 - S & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H \\ n_2 & 0 & -n_1 & -S \end{pmatrix},$$

$$\text{де } H = \frac{(P - m)\{(n_2 A + C(S + k_1))(m - P) + K_\mu m S(S + k_1)\}}{K_\mu P(m_1 n_2 - n_1(S + k_1))}.$$

Із співвідношення (5) отримаємо

$$\begin{aligned}\det |\hat{J} - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -k_1 - S - \lambda & m_1 & 0 \\ 0 & -\lambda & H \\ n_2 & -n_1 & -S - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda + k_2 + S)(\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3) = 0, \\ \text{де } a_1 &= k_1 + 2S, a_2 = H n_1 + S^2 + k_1 S, \\ a_3 &= H k_1 n_1 - H m_1 n_2 + H n_1 S.\end{aligned} \quad (8)$$

Для отримання стійкої стаціонарної точки слід вимагати, щоб усі дійсні частини коренів характеристичного многочлена були від'ємні. В цьому випадку можна використати критерій Рауса-Гурвіца [6], згідно з яким на коефіцієнти кубічного многочлена (8) слід накласти умови

$$a_1 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0, a_3 > 0. \quad (9)$$

Використовуючи результати проведеного лінійного аналізу стаціонарних точок, можна з'ясувати загальну структуру фазового простору нелінійної системи (2). Зафіксуємо значення параметрів $A = 0.933$, $B = 4.974$, $C = 0.078$, $S = 0.067$, $m_1 = 0.4$, $\alpha = 0.05$, $k_1 = 0.99$, $k_2 = 0.5$, $n_1 = 0.9$, $n_2 = 0.7$. Тоді координати стаціонарних точок $K(0.883281, 7.23431, 0, 10.4411)$ та

$$L\left(\frac{1.298P - 1.318m}{P - m}, \frac{6.606P - 6.576m}{P - m}, \frac{1.096P - 1.149m}{P - m}, \frac{0.5m}{P - m}\right).$$

Власні значення матриці J в точці K дорівнюють $\lambda = (-1.057, -0.567, -0.067, 0.954P - m)$. У точці L коефіцієнти характеристичного многочлена мають вигляд

$$\begin{aligned}a_1 &= 1.123, \\ a_2 &= \frac{1.973P^3 + P^2(0.07 - 6.014m)}{P(P - m)} - \\ &- \frac{2.068m^3 - Pm(6.108m - 0.07)}{P(P - m)}, \\ a_3 &= \frac{1.471P^3 - 4.483P^2m + 4.554Pm^2 - 1.541m^3}{P(P - m)}.\end{aligned}$$

Графічно перевіримо другу та третю нерівності в умові (9). Для цього зафіксуємо значення параметра $m = 2.1$ та побудуємо графіки функцій $g_2(P) = a_1 a_2 - a_3$, $g_3(P) = a_3$ (рис. 1).

При $P < 2.1$ та $P > 2.20056$ виконуються умови Гурвіца, тому особлива точка L є стійкою.

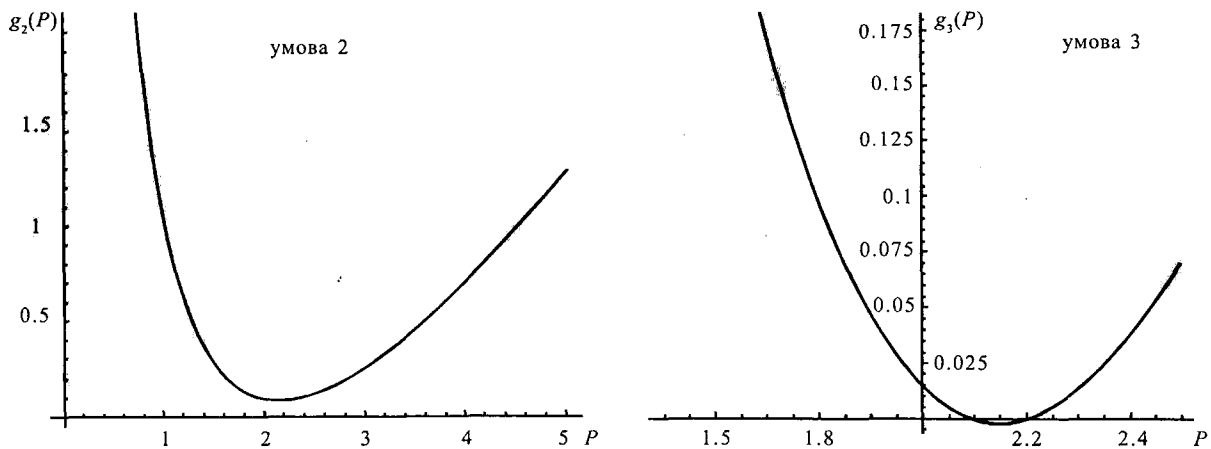


Рис. 1. Графічна перевірка умов Гурвіца при $m = 2.1$ для точки L

Зокрема, при $P = 2.4$ координати $L(1.15913, 6.81668, 0.728708, 3.5)$ та власні значення $\lambda = (-1.04231, -0.566667, -0.0405103 \pm 0.183146i)$. Наявність комплексних значень означає, що точка L є фокусом. При цьому точка K є сідловою (власні значення $\lambda = (-1.05667, -0.566667, 0.190322, -0.0666667)$). Виберемо початкову умову в околі точки $K(x_K, y_K, z_K + \epsilon, u_K)$, $\epsilon = 0.01$ та проінтегруємо чисельно систему (2), в резуль-

таті отримаємо фазовий портрет, представлений на рис. 2, а. Зіставлення чисельного розв'язку з асимптотичним (рис. 2, б) дає змогу визначити міру адекватності лінійної моделі: у випадку малих часів поблизу стаціонарних режимів можна користуватись спрощеними моделями та їх розв'язками. Траєкторія з сідла виходить по дотичній до власного вектора $\vec{E}_{\lambda=0.19} = (-0.122043, 0.134479, -0.380466, 1)$.

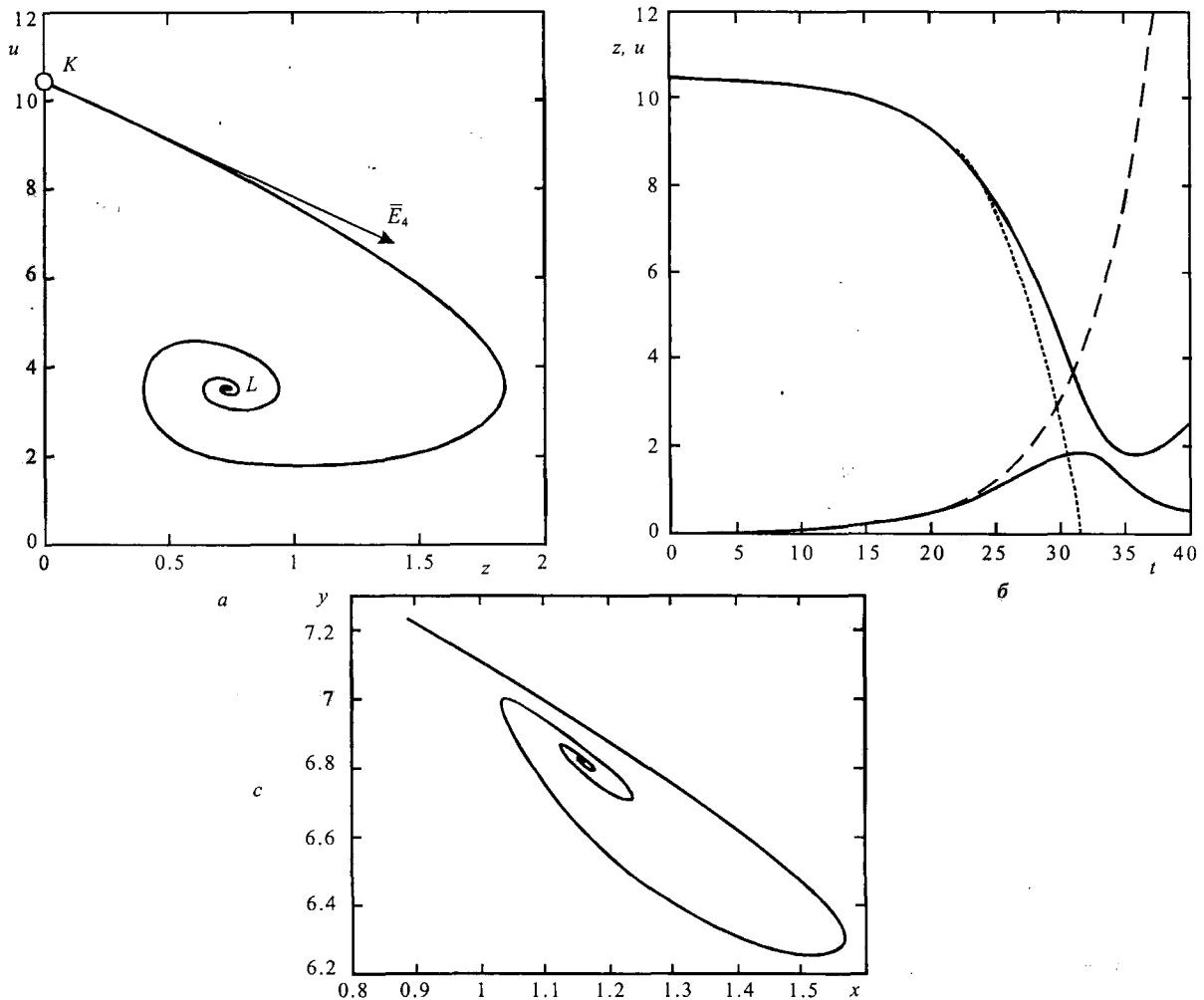


Рис. 2. а – проекція фазового портрета на площину (z, u) ; б – чисельні (суцільна лінія) та асимптотичні (штрихові) розв'язки в околі сідлової точки K ; с – проекція фазового портрета на площину (x, y)

Аналогічний характер розв'язку спостерігається і в площині змінних (x, y) (рис. 2, с). При $2.1 < P < 2.20056$ при $m = 2.1$ точка K стає стійким вузлом, точка L – сідлом. При $P < 2.1$ обидві точки є відповідно стійкими вузлом та фокусом.

3. Аналіз умов існування періодичних розв'язків динамічної системи (2) та чисельний експеримент

На відміну від лінійних динамічних систем у нелінійних існують інші стійкі режими, наприклад, граничні цикли, яким на практиці відповідають автоколивні процеси. Граничні цикли є нелокальними об'єктами, і для багатомірних систем відповісти на питання про їхнє існування при заданих значеннях параметрів важко. Однак можна використати умови народження такого режиму із стаціонарної точки при зміні керуючих параметрів. Використаємо теорему Андронова–Хопфа [5], згідно з якою граничний цикл може утворитися при зміні фокуса зі стійкого на нестійкий. При цьому дійсні частини двох комплексно спряжених власних значень

матриці (3) перетинають уявну вісь, тоді як інші дійсні власні значення залишаються від'ємними. Встановимо умови, за яких матриця системи (3) має два суто уявні та два дійсні власні значення. У випадку системи (3) одне власне значення завжди від'ємне при $k_1 > 0, S > 0$, тому для того щоб кубічне рівняння (8) можна було подати у вигляді $(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda + \delta) = 0$, накладемо умови $\det(J) = \text{sp}(J) \sum M_{ii}$, де $\text{sp}(J)$ та $\sum M_{ii}$ – слід та сума головних мінорів матриці J . Після підстановки коефіцієнтів многочлена (8) отримаємо:

$$F(P, m) \equiv a_1 a_2 - a_3 = H m_1 n_2 + k_1^2 S + H n_1 S + 3 k_1 S^2 + 2 S^3 = 0. \quad (10)$$

Співвідношення (10) у просторі параметрів задає криву народження граничного циклу. Зафіксувавши значення параметрів $A = 2, C = 5, K_\mu = 0.5, m_1 = 0.8, n_1 = 0.7, n_2 = 0.9, S = 0.3, B = 4, \alpha = 0.4, k_1 = k_2 = 0.1$, залишимо як керуючі параметри P і m та зобразимо у площині цих параметрів умову (10) як графік функції $m = m(P)$ (рівняння (10) є квадратним відносно m). Якщо вибрати $P = 1.25$, то $m^1 = 1.159$ та $m^2 = 1.39$.

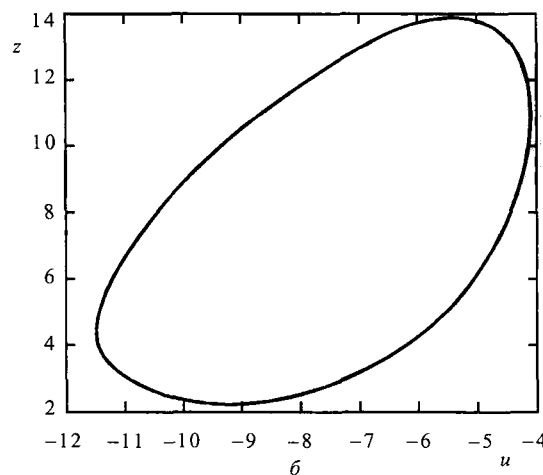
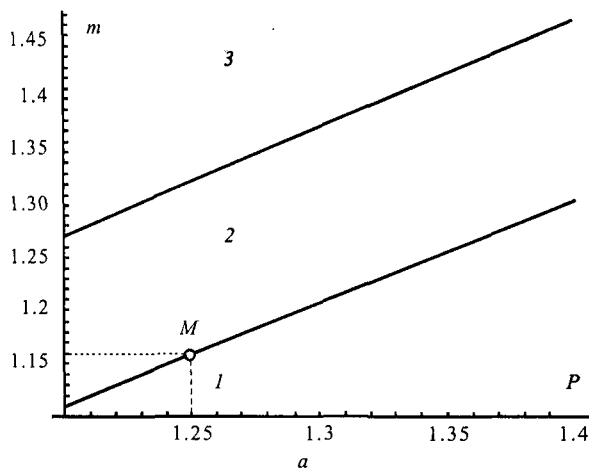


Рис. 3. а – крива народження граничного циклу: 1 – точка L є нестійким фокусом та область існування граничного циклу, 2 – точка L є стійким фокусом, 3 – точка L є нестійким фокусом; б – фазовий портрет граничного циклу при $P = 1.25, m = 1.159$

При цьому стаціонарна точка B з координатами $(-8.7992, 5.3002, -6.8996, 6.36813)$ є нестійким фокусом, про що свідчать власні значення матриці (3) $\lambda = (-0.701855, -0.4, 0.000927582 \pm 0.239394i)$. Прямим чисельним інтегруванням системи можна переконатись, що у системі народжується граничний цикл, і при зменшенні m амплітуда його зростає (рис. 3, б).

4. Висновки

Проведений аналіз розв'язків нелінійної системи диференціальних рівнянь (2) показав, що врахування у моделі (1) додаткових факторів

впливу суттєво змінює сценарії протікання процесів. На відміну від лінійних моделей [2] розв'язки описуються не тільки монотонними, а й осцилюючими функціями (періодичними у випадку граничного циклу та аперіодичними у випадку фокуса). Зміна параметрів моделі може спричинювати нестійкість, в умовах якої напрям еволюції моделі буде важкопрогнозованим. Враховуючи результати імітаційного моделювання, можемо сформулювати рекомендації щодо підтримання стійкого безкризового функціонування водного об'єкта або прогнозувати сценарії його еволюції при зміні умов експлуатації.

1. Лаврик В. І. Методи математичного моделювання в екології: Навч. посіб. для студ. екол. та біол. спец. вищ. навч. закл. - К.: Вид. дім «КМ Академія», 2002.- 203 с.
2. Лаврик В. І., Скуратівська І. А. Прогнозування та керування якістю поверхневого стоку за допомогою імітаційного математичного моделювання // Наукові записки НаУКМА.- 2004,- Т. 29: Біологія та екологія.- С. 51-57
3. Леонов А. В. Математическое моделирование трансформации соединений фосфора в пресноводных экосистемах на примере оз. Балатон.- М.: Наука, 1986.- 152 с.
4. Лаврик В. И., Добрынский В. А., Роголь И. В. Применение имитационного математического моделирования к вопросам управления процессами эвтрофикации озер и водохранилищ // Гидробиол. журнал, 2001.- Т. 37.- № 6.- С. 95-104.
5. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях.- М.: Мир, 1983.- 398 с.
6. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В. и др. Методы качественной теории в нелинейной динамике.- Москва-Ижевск, 2004.- Часть 1.- 416 с.

I. Skurativska

INVESTIGATION OF OXYGEN REGIME STABILITY OF WATER OBJECTS IN CONDITIONS OF THEIR EUTROPHICATION

Qualitative analysis of nonlinear dynamical system describing oxygen regime in water ecosystems is carried out. Conditions of appearance of the oscillating-type regimes are stated.