Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: «**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ІЗ СТРИБКАМИ НА ФІНАНСОВОМУ РИНКУ**»

Виконала: студентка 4-го року навчання,

Освітньої програми «Прикладна математика», 113

Горбачова Ірина Сергіївна

Керівник: доцент, к.ф-м.н. Щестюк Н.Ю.

Рецензент

____

(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена

з оцінкою

____

Секретар ЕК

____

«____» __________________ 20____ р.

Київ – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Галузь фінансової математики постійно розширюється і збагачується новими науковими методами та прийомами. Такий розвиток зумовлений тим, що різним фінансовим установам та трейдерам треба мати сучасні ефективні інструменти, які могли б оцінити наперед ймовірність підйому або ж спаду цін на акціїї та визначити справедливі ціни на call або put опціони. Основою таких сучасних методів і інструментів є застосування випадкових процесів, їхнє моделювання і симуляція.

Парадигмою фінансової математики для моделювання фінансових ринків продовжує залишатись модель Блека-Шоулза, що описує рух базових активів за допомогою геометричного броунівського руху. Проте геометричний броунівский рух є всюди неперервним і не враховує стрибків цін. Для цього використовуються дифузійні стрибкові процеси. Дифузійний процес із стрибками - це стохастичний процес, що включає стрибки та дифузію. Він має важливе застосування в магнітних перепідключеннях, викидах корональних мас, фізиці конденсованої речовини та в ціноутворенні опціонів.

Мета роботи — запропонування і реалізація ітераційної схеми для симуляції дифузійних процесів із стрибками.

Мета роботи зумовила наступне наукове завдання:

1. Здійснити моделювання арифметичного та геометричного броунівського рухів методом Монте-Карло, використовуючи відповідні ітераційні схеми.
2. Запропонувати ітераційну схему для процесів із стрибками для моделювання цін акцій.
3. Зробити симуляцію процесів із стрибками.
4. Змоделювати процеси із стрибками для конкретних фінансових даних.

Робота складається із чотирьох розділів.

Перший розділ включає у себе необхідні теоретичні відомості про броунівські арифметичні та геометричні рухи, а також теорію про стохастичні диференціальні рівняння. Також, у першому розділі описані параметри знесення і волатильності та як вони знаходяться.

У другому розділі розповідається загальна інформація про метод Монте-Карло, наведені ітераційні схеми для броунівських рухів, а також моделі, за якими вони програмуються. У цьому розділі наведені графіки, які були змодельовані мною за допомогою програми на Python.

Останній третій розділ має теоретичні відомості про стрибкові моделі дифузії, а також представлена ітераційна схема для симуляції процесів із стрибками. У цьому розділі є моделювання процесів із стрибками для конкретних фінансових даних. Усі симуляції були змодельовані мною за допомогою програми написаної на мові програмування Python.

РОЗДІЛ 1. БРОУНІВСЬКІ РУХИ

1.1 Броунівський рух

Броунівський рух - найбільш широко вивчений стохастичний процес і батько сучасного стохастичного аналізу. Броунівський рух - це випадковий процес B_t із незалежними, стаціонарними приростами, які слідують гауссовському розподілу [1].

Стандартний броунівський рух має кілька цікавих властивостей. Зокрема [1]:

- Броунівський рух скінченний;
- Броунівський рух має незмінену варіацію. Це означає, що якщо знак усіх негативних градієнтів був переведений на позитивний, тоді B_t досягне нескінченності за скільки завгодно короткий період часу;
- Броунівський рух неперервний. Хоча броунівський рух неперервний скрізь, він ніде не диференціюється. По суті, це означає, що броунівський рух має фрактальну геометрію. Це має важливі наслідки щодо вибору методів числення, коли маніпулюють броунівськими рухами.

Броунівський рух є фундаментальною складовою побудови стохастичних диференціальних рівнянь, що, потім, врешті-решт, дозволить вивести відоме рівняння Блека-Шоулза для ціноутворення.

Стандартний броунівський рух має ненульову ймовірність бути негативним. Очевидно, це небажана властивість - ціни на акції не можуть бути меншими за нуль. Отже, хоча стохастичний характер броунівського руху для нашої моделі повинен зберігатися, необхідно точно налаштувати спосіб розподілу цієї випадковості. Зокрема, тепер буде введено поняття геометричного броунівського руху, яке вирішить проблему негативних цін на акції. Однак перед тим, як розглядати геометричний броунівський рух, необхідно обговорити концепцію стохастичного диференціального рівняння. Це дозволить нам змоделювати ціни наших активів у вигляді стохастичних диференціальних рівнянь для геометричного броунівського руху та отримати ітераційну схему для моделювання руху ціни активів.

1.2 Стохастичні диференціальні рівняння

Броунівський рух є будівельним матеріалом для побудови стохастичних диференціальних рівнянь, в подальшому - СДР. Ми почнемо з обговорення стохастичних інтегралів, що природно приведе нас до концепції СДР [2] .

Стохастичним інтегралом функції $f = f(t)$ є функція X=X_t, t $\in$ [0, T] (Див. [2]):

$$X_t = \int_0^t f_s dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f_{t_{k-1}}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \text{ , де } t_k = \frac{kt}{N} \qquad (1.2.1)$$

Вираз (1.2.1) передбачає, що X_t є інтегральним виразом і, отже, є чітко визначеним для недиференційованої змінної B_t, завдяки властивості скінченності, а також вибраному середньому та дисперсії. Однак ми хочемо мати можливість написати це у диференціальній формі:

$$dX = f_t dB$$

Можна розглянути dB як нормально розподілену випадкову величину з нульовим середнім значенням та дисперсією dt. Надамо означення СДР [2].

Нехай B_t - броунівський рух, якщо X_t є послідовністю випадкових величин, такою, що для всіх t:

$$X(t + \delta t) - x_t - \delta t \mu(t, X_t) - \sigma(t, B_t)(B(t + \delta t) - B_t)$$

є випадковою величиною із середнім значенням та дисперсією є $o(\delta t)$, тоді:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \qquad (1.2.2)$$

є стохастичним диференціальним рівнянням для X_t.

Послідовність випадкових величин, наведених вище, називається або просто процесом Іто або стохастичним процесом.

У виразі (1.2.2) коефіцієн μ має інтерпретацію коефіцієнта нестохастичного знесення, тоді як σ представляє коефіцієнт волатильності - він множиться на стохастичний член dB. Отже, стохастичні диференціальні рівняння мають як нестохастичну, так і стохастичну складові.

Далі ми будемо розглядати арифметичний та геометричний броунівський рух, де буде використано стохастичне диференціальне рівняння для моделювання руху цін на активи.

1.3 Арифметичний броунівський рух

Арифметичний броунівський рух - це броунівський рух із параметром знесення та волатильністю. Актуальна модель арифметичного броунівського руху є стохастичним диференціальним рівнянням, яке виглядає наступним чином [3]:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t \tag{1.3.1}$$

Де μ - параметр знесення, а σ - параметр волатильності.

Значення параметру знесення - тенденція або темп зростання. Якщо параметр дрейфу позитивний, то траєкторія ціни акції буде зростати, якщо негативний - падати. Значення параметру волатильності є варіацією або поширенням розподілу, воно може бути лише позитивним (або дорівнювати нулю), бо воно пов’язано із страндартним відхиленням розподілу.

Для того, щоб була можливість змоделювати арифметичний броунівський рух, необхідно вирішити або стохастичне диференціальне рівняння, яке було наведено вище, або ж застосувати ітераційну схему Ейлера, яка буде розглянута далі. У першому випадку рішення знаходимо за допомогою звичайної ітерації:

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t$$

де X_0 - початкова ціна арифметичного БР, $X_0 + \mu t$ - середнє, а $\sigma^2 t$ - дисперсія.

1.4 Геометричний броунівський рух

Геометричний броунівський рух - випадковий процес з неперервним часом, в якому логарифм випадкової величини слідує за броунівським рухом [4]. Геометричний броунівський рух застосовується з метою моделювання ціноутворення на фінансових ринках і використовується переважно в моделях ціноутворення опціонів, так як геометричний броунівський рух може приймати будь-які позитивні значення. Геометричний броунівський рух є розумним наближенням до реальної динаміки цін акцій, що не враховує, однак, рідкісні події (стрибки).

Відомо, що ціни на акції відхиляються від стійкого стану в результаті поштовху торгів на фінансових ринках. Якщо розглядати ціну S_t в момент часу t та очікуваною нормою прибутковості μ, то повернення або відносна зміна його ціни протягом наступного періоду часу dt можна розкласти на дві частини [4]:

1. Детермінована та передбачувана частина, яка є очікуваною прибутковістю від утримання запасів протягом певного періоду часу dt. Це повернення дорівнює $S\mu dt$.

2. Стохастична та несподівана частина, яка відображає випадкові зміни ціни акцій протягом інтервалу часу dt, як реакцію на зовнішні ефекти, такі як несподівані новини на акції. Ця несподівана частина повернення дорівнює $\sigma S_t dB_t$.

Це визначення щоденної прибутковості веде до стохастичного диференціального рівняння і знаходиться наступним чином:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{1.4.1}$$

або ж

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t \tag{1.4.2}$$

де B_t - броунівський рух, μ - параметр знесення і σ - параметр волатильності постійні.

Рівняння (1.4.1) - диференціальне рівняння броунівського руху із дрейфом, якому відповідає ціна акцій S_t. Рівняння (1.4.2) - миттєва норма прибутку на S_t. Повернення S_t на період часу dt відбувається за процесом Іто.

Розв’язок стохастичного диференцільного рівняння можна знайти, застосовуючи формулу Іто. Розв’язок (1.4.3) - це геометрична броунівська модель руху майбутньої ціни акцій S_t. У цьому випадку майбутня ціна акції S_t може бути знайдена через початкове значення S_0, просто застосовуючи дану формулу до періоду часу t:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\epsilon\sqrt{t}} \tag{1.4.3}$$

Це є логнормальна розподілена випадкова величина з математичним очікуванням $E(S_t) = e^{\mu t}S_0$ та дисперсією $Var(S_t) = e^{2\mu t}S_0^2(e^{\sigma^2 t} - 1)$.

Для того, щоб змоделювати геометричний броунівський рух треба або скористатись розв’язком (1.4.3) рівняння (1.4.1), або застосувати ітераційну схему Ейлера, яка буде розглянута далі.

1.5 Оцінка параметрів

У вигляді ціни акцій S_t , які ми розглядати вище, є два важливі параметри. Ці параметри мають бути відомими. Якщо з якихось причин немає доступної інформації про дрейф та нестабільність запасів, їх потрібно оцінити на основі історичних даних. Використовуючи дані щоденних звітів про результати я дам оцінку двом параметрам.

1.5.1 Параметр волатильності

Волатильність - це постійна характеристика запасу, виражена як річний відсоток [6]. Це дає уявлення про стабільність курсу акцій. Відносно висока волатильність означає, що ціна акцій постійно змінюється протягом відносно великого інтервалу. Найбільш звичайним методом вимірювання волатильності акцій є стандартне відхилення повернення ціни. Ця процедура є досить стандартною. Практичним способом емпіричної оцінки волатильності акції є спостереження за історичними даними через фіксовані інтервали часу, наприклад, щоденна ціна закриття.

Якщо ми позначимо S_i як ціну закриття акцій на кінець i-го торгового періоду, а τ - тривалість часового інтервалу між двома послідовними торговими періодами, вираженими в роках, $\tau = \tau_i - \tau_{i-1}$ для i цілого додатного числа.

Якщо u_i - логарифм добової дохідності запасу за короткий проміжок часу τ, тобто $u_i = ln(\frac{s_i}{s_{i-1}})$ для *i=1,2…n*, тоді середнє *u* логарифму повернень задається так:

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \qquad (1.5.1.1)$$

Оцінка середньоквадратичного відхилення інтервалу значень задано формулою:

$$v = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{n-1}^{n}(u_u - \bar{u})^2}$$

$$d(lnS_t) = ln(S_t) - ln(S_{t-1}) = ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma\epsilon\sqrt{dt} \quad (1.5.1.2)$$

З формули (1.5.1.2) оцінка середньоквадратичного відхилення добової дохідності запасу дорівнює $\sigma\tau^{\frac{1}{2}}$. Звідси випливає, що σ можно записати наступним чином:

$$\sigma = \frac{v}{\sqrt{\tau}}$$

При стандартній похибці, що дорівнює:

$$\frac{\sigma}{2n^{\frac{1}{2}}}$$

1.5.2 Параметр дрейфу

Параметр дрейфу (знесення) - це швидкість, з якою змінюється очікувана вартість процесу [6].

Використовуючи результат у рівнянні (1.5.1.1) та (1.5.1.2), отримуємо очікувану річну норму віддачі або параметр знесення μ :

$$\overline{u} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$$

Отже:

$$\mu = \frac{\overline{u}}{\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2$$

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛЮВАННЯ АРИФМЕТИЧНОГО ТА ГЕОМЕТРИЧНОГО БРОУНІВСЬКИХ РУХІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО

2.1 Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло - загальна назва групи чисельних методів, заснованих на отриманні великого числа реалізацій стохастичного процесу, який формується таким чином, щоб його імовірнісні характеристики співпадали з аналогічними величинами розв'язуваної задачі [7] .

Багато систем занадто складні для дослідження впливу невизначеності з впровадженням аналітичних методів. Однак такі системи можна дослідити, якщо розглядати вхідні дані у вигляді випадкових змінних, повторюючи велику кількість обчислень N (ітерацій), для отримання результату з необхідною точністю. Метод може бути застосований в складних ситуаціях, які важкі для розуміння і вирішення за допомогою аналітичних методів. Моделі систем можуть бути розроблені з впровадженням таблиць та програм [7].

Метод Монте-Карло є способом оцінки впливу невизначеності оцінки параметрів системи в широкому діапазоні ситуацій. Метод зазвичай використовують для оцінки діапазону зміни результатів і відносної частоти значень в цьому діапазоні для кількісних величин, таких як вартість, тривалість, продуктивність, попит та ін. Моделювання методом Монте-Карло може бути використано для двох різних цілей [7]:

1. Трансформування невизначеності для звичайних аналітичних моделей;
2. Розрахунку ймовірностей, якщо аналітичні методи не можуть бути використані.

Метод Монте-Карло може бути застосований для оцінки невизначеності фінансових прогнозів, результатів інвестиційних проектів, при прогнозуванні вартості і графіка виконання проекту, порушень бізнес-процесу і заміни персоналу. Даний метод застосовують в ситуаціях, коли результати не можуть бути отримані аналітичними методами або існує висока невизначеність вхідних або вихідних даних.

Вхідними даними для моделювання методом Монте-Карло є добре опрацьована модель системи, інформація про тип вхідних даних, джерела невизначеності і необхідних вихідних даних. Вхідні дані та відповідну їм невизначеність розглядають у вигляді випадкових змінних з відповідними розподілами. Часто для цих цілей використовують рівномірні, трикутні, нормальні і логарифмічно нормальні розподіли.

Процес моделювання включає наступні етапи [7]:

1. Визначення моделі або алгоритму, які найбільш точно описують поведінку досліджуваної системи.

2. Багаторазове застосування моделі з використанням генератора випадкових чисел для отримання вихідних даних моделі (моделювання системи). При необхідності моделюють вплив невизначеності. Модель записують у формі рівняння, що виражає співвідношення між вхідними та вихідними параметрами. Значення, відібрані в якості вхідних даних, отримують виходячи з відповідних розподілів ймовірностей, що характеризують невизначеності даних.

3. За допомогою програми багаторазово використовують модель з різними вхідними даними і отримують вихідні дані. Вони можуть бути оброблені за допомогою статистичних методів для отримання оцінок середнього, стандартного відхилення, довірчих інтервалів.

Вихідними даними можуть бути значення характеристик, як показано в наведеному вище прикладі, або розподіл ймовірності або частоти відмови, або виходом може бути ідентифікація основних функцій моделі, які роблять основний вплив на вихідні дані. Метод Монте-Карло зазвичай використовують для оцінки розподілу вхідних або вихідних результатів, або ж характеристик розподілу, в тому числі для оцінки:

- ймовірності встановлених станів;

- значень вихідних величин, для яких встановлено межі, які не повинні бути порушені.

Аналіз взаємозв'язку вхідних і вихідних величин може виявити відносне значення факторів роботи системи та ідентифікувати способи зниження невизначеності вихідних величин.

Недоліками методу є [7]:

- Точність рішень залежить від кількості ітерацій, які можуть бути виконані;
- Великі і складні моделі можуть представляти труднощі для фахівців з моделювання і ускладнювати залучення зацікавлених сторін;
- Метод не може адекватно моделювати події з дуже високою або дуже низькою ймовірністю появи, що обмежує його застосування при аналізі ризику.

2.2 Ітераційна схема Ейлера

Метою роботи було застосування методу Монте-Карло для симуляції випадкових процесів дифузії (процес Іто), які описуються стохастичними диференціальними рівняннями [8]:

$$dx = a(x)dt + b(x)\delta B$$

В даному рівнянні ми припускаємо, що параметр знесення $\mu = a(x, t)$, а параметр волатильності $\sigma = b(x, t)$, бо вважаємо що μ та σ - функції часу t, які також можуть залежати від значення x. В данному рівнянні вважаємо, що $\delta B = \epsilon\sqrt{dt}$ нескінченно малий вінерівський шум, а $\epsilon \sim N(0,1)$. Квадрат коєфіцієна волатильності $b^2(x, t)$ називається дифузією.

Відомо (див. [8]), що ітераційна схема Ейлера для дифузії має наступний вигляд:

$$x_{k-1} = x_k + a_k\Delta + b_k\epsilon_k\sqrt{\Delta t}$$

де $\epsilon \sim N(0,1)$, $a_k = a(x_k), b_k = b(x_k)$.

2.3 Симуляція арифметичного броунівського руху (модель Башельє)

Стохастичне диференціальне рівняння для арифметичного броунівського руху має наступний вигляд [8]:

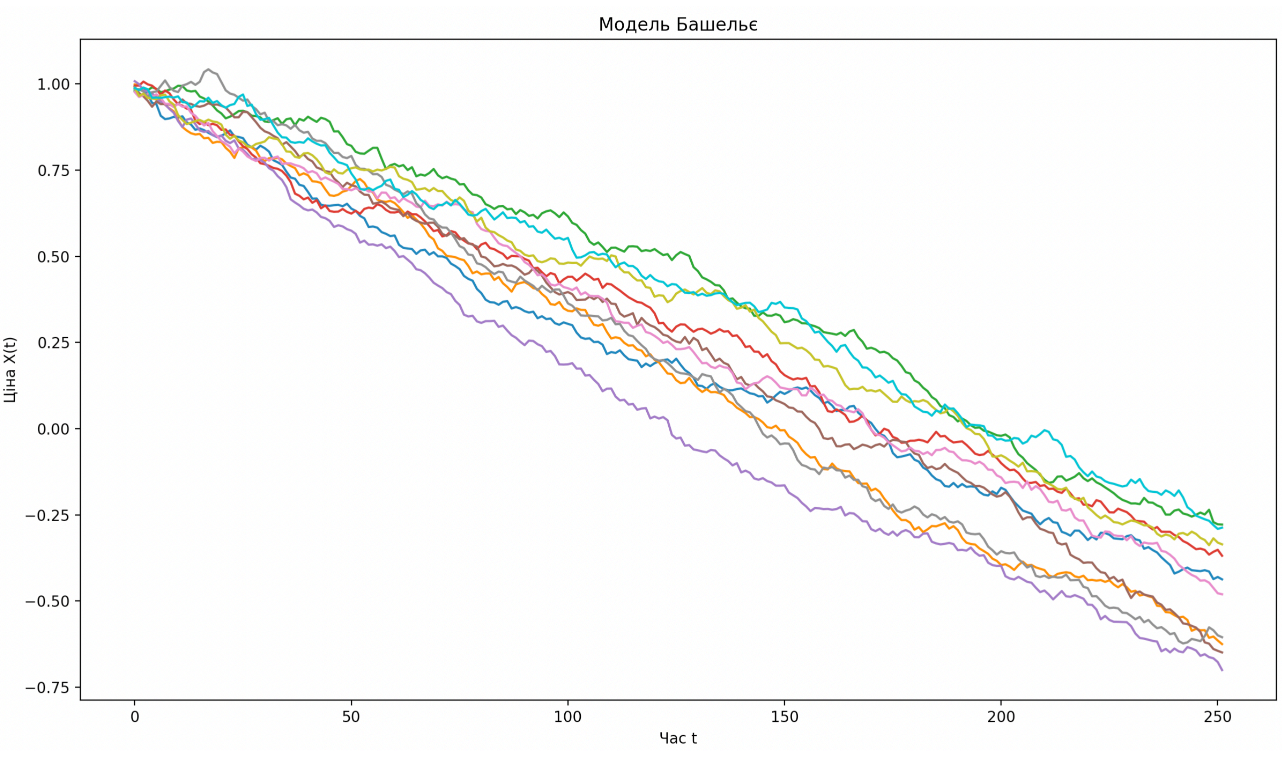
$$dx_t = \mu dt + \sigma dB_t$$

Саме це рівняння описує рух ризикових активів в моделі Башельє.

Ітераційна схема моделі Башельє виглядає наступним чином:

$$x_{k+1} = x_k + \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

На малюнку (2.1) наведена симуляція моделі Башельє для арифметичного броунівського руху B_t на проміжку часу t, для незалежних випадкових величин, який був отриманий мною за допомогою програми, прикріпленої у додатку, написаної на мові програмування Python.



Мал. 2.1

Для симуляції у програмі були встановлені наступні величини:

- t = 252 - кількість робочих днів у році;
- X = 1 - початкова ціна;
- μ = -0.2 - параметр знесення;

- $\sigma = 0.4$ - параметр волатильності;
- Кількість симуляцій: 10.

2.4 Симуляція геометричного броунівського руху (модель Блека-Шоулза)

Стохастичне диференціальне рівняння для геометричного броунівського руху має наступний вигляд [8]:

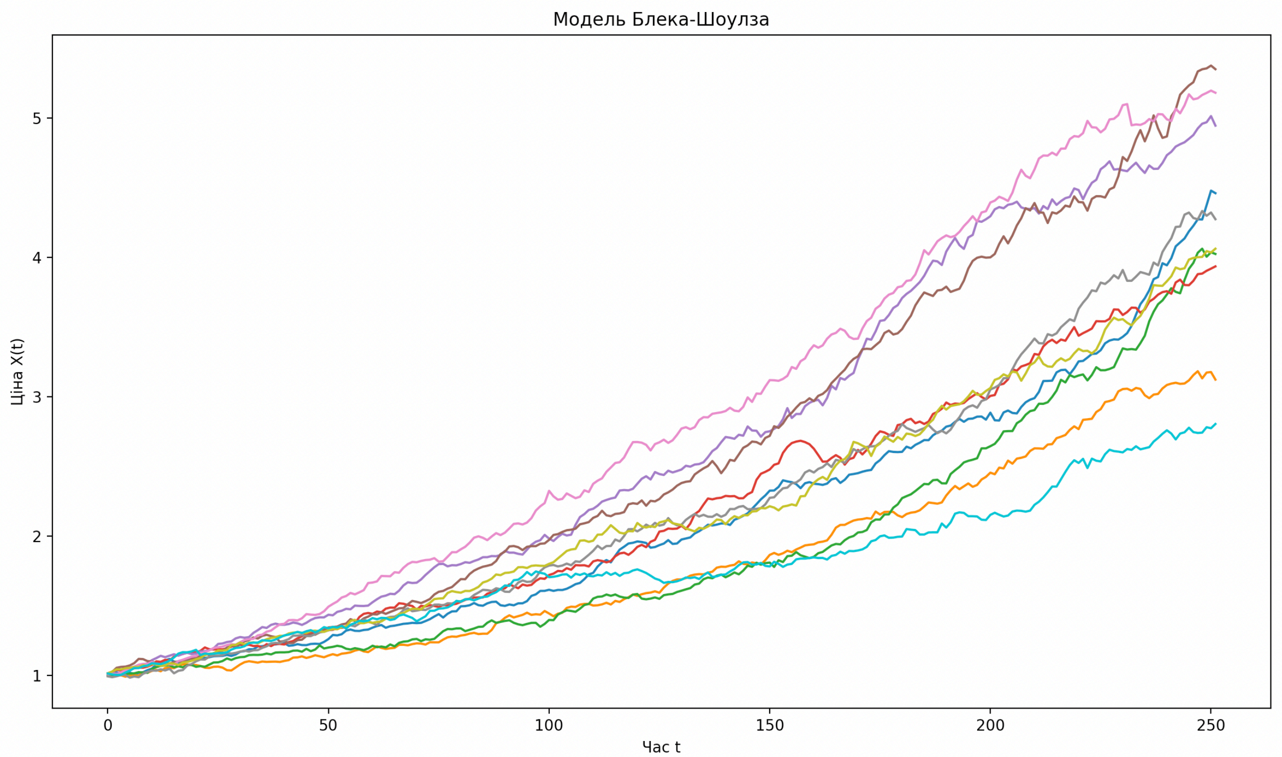
$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma B_t$$

Це рівняння описує рух акцій у моделі Блека-Шоулза.

Ітераційна схема моделі Блека-Шоулза виглядає наступним чином:

$$x_{k+1} = x_k + x_k \mu \Delta t + \epsilon x_k \sqrt{\Delta t}$$

На малюнку (2.2) наведена симуляція моделі Блека-Шоулза для геометричного броунівського руху B_t на проміжку часу t, для незалежних випадкових величин, який був отриманий мною за допомогою програми, прикріпленої у додатку, написаної на мові програмування Python.



Мал. 2.2

Для симуляції у програмі були встановлені наступні величини:

- t = 252 - кількість робочих днів у році;
- X = 1 - початкова ціна;
- μ = 0.2 - параметр знесення;
- σ = 0.4 - параметр волатильності;
- Кількість симуляцій: 10.

РОЗДІЛ 3. ПРОЦЕСИ ІЗ СТРИБКАМИ

3.1 Стрибкові моделі дифузії

Емпіричні дослідження виявили, що модель стохастичної дифузії, заснована на броунівському русі, не може пояснити деякі характеристики дохідності активів та ціни їх похідних (наприклад, «посмішка волатильності») [9]. Помішка волатильності називається опуклою функцією між передбачуваною волатильністю та ціною страйку опціону. Як грошові, так і не грошові опціони, як правило, мають вищу приховану волатильність, ніж опціони, які не мають грошей, особливо на валютних ринках. Помішка волатильності менш виражена для опціонів на акції. Неадекватність стандартної моделі стохастичної дифузії призвела до розробки альтернативних моделей безперервного часу. Наприклад, в літературі [9] запропоновано моделі дифузії стрибків та стохастичної волатильності для уникнення невідповідності цим вимогам.

Стрибки цін на акції часто вважаються відповідними закону ймовірності. Наприклад, стрибки можуть відбуватися за процесом Пуассона, який є дискретним процесом безперервного часу. Для даного часу *t* нехай X_t - кількість разів, коли особлива подія відбувається протягом періоду часу [*0, t*]. Тоді X_t - процес Пуассона, якщо:

$$Pr(X_t = m) = \frac{\lambda^m t^m}{m!} e^{(-\lambda t)}, \lambda > 0$$

Тобто, X_t слідує розподілу Пуассона з параметром λt. Параметр λ регулює настання особливої події і називається швидкістю або інтенсивністю процесу.

Надалі ми будемо обговорювати просту модель дифузії стрибків, запропоновану Коу у 2000 році [10]. Ця проста модель має кілька приємних властивостей. Прибутковості, передбачені даною моделлю, є лептокуртичними (частотний розподіл або його графічного зображення, що має більший ексцентричний коефіцієнт, ніж звичайний розподіл) та асиметричними щодо нуля. Крім того, модель може відтворити хиткість посмішки та надати аналітичні формули цін на багато варіантів. Модель складається з двох частин, причому перша частина є безперервною слідує геометричному броунівському руху, а друга частина - є процесом стрибка. Випадки стрибка регулюються процесом Пуассона, і розмір стрибка слідує за подвійним експоненціальним розподілом.

Нехай P_t - ціна активу в момент часу t. Модель простої дифузії стрибків зумовлює, що ціна дотримується стохастичного диференціального рівняння [10]:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dB_t + d(\sum_{i=1}^{n_t}(J_i - 1)) \tag{3.1.1}$$

де B_t - процес Вінера, а n_t - процес Пуассона зі інтенсивністю λ, і $\{J_i\}$ - послідовність незалежних і однаково розподілених невід'ємних випадкових величин, така що $X = ln(J)$ має подвійний експоненціальний розподіл із функцією щільності ймовірності:

$$f(x) = \frac{1}{2\eta} e^{\frac{-|x-k|}{\eta}}, 0 < \eta < 1$$

У моделі простої дифузії стрибків (3.1.1) n_t, B_t, J_i незалежні, так що не існує зв'язку між випадковістю моделі. Звернемо увагу, що n_t- це кількість стрибків у часовому інтервалі [*0, t*] і слідує розподілу Пуассона з параметром λt, де λ - константа. При *i*-тому стрибку частка стрибка ціни становить $(J_i - 1)$.

Експоненційний розподіл можна записати наступним чином:

$$X - k = \xi \text{ з ймовірністю } 0.5$$

$$X - k = -\xi \text{ з ймовірністю } 0.5 \tag{3.1.2}$$

де ξ - експоненціальна випадкова величина із середнім значенням η та дисперсією η^2. Функція щільності ймовірності ξ дорівнює:

$$f(x) = \frac{1}{\eta} e^{-x/\eta}, 0 < x < \infty$$

Деякі корисні властивості подвійного експоненціального розподілу наступні:

$$E(x) = k, Var(x) = 2\eta^2, E(e^X) = \frac{e^k}{1-\eta^2}$$

Для скінченних зразків важко відрізнити експоненційний розподіл від t-розподілу Стьюдента. Однак експоненціальний розподіл є більш аналітичним і може генерувати вищу концентрацію ймовірності (наприклад, більший пік) навколо свого середнього значення.

Розв'язування стохастичного диференціального рівняння в моделі простої дифузії стрибків, отримуємо динаміку ціни активу як [11]:

$$P_t = P_0 exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t]\prod_{i=1}^{n_t} J_i$$

де $\prod_{i=1}^{0} = 1.$

Отже, ліва цінова межа в момент часу t_1 становить (надалі розглядаємо: що $B_t = w_t$):

$$P_t = P_0 e^{\frac{(\mu - \sigma^2)}{2}t_1 + \sigma w_t}$$

У момент t_1 частка стрибка ціни становить $J_1 - 1$, так що ціна стає:

$$P_{t_1} = (1 + J_1 - 1)P_{t_1} = J_1 P_{t_1} = P_t = P_0[e^{\frac{(\mu - \sigma^2)}{2}t_1 + \sigma w_t}]J_1$$

Для t $\in (t_1, t_2)$ немає інтервального стрибка $(t_1, t]$, так що:

$$P_t = P_{t_1} e^{\frac{(\mu - \sigma^2)}{2}(t - t_1) + \sigma(w_t - w_{t_1})} \quad (3.1.3)$$

Отримавши P_t з ріняння (3.2.3), ми маємо наступне рішення:

$$P_t = P_0 exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w_t]J_1$$

3.2 Ітераційна схема процесів із стрибками

З розв'язування стохастичного диференціального рівняння в моделі простої дифузії стрибків, ми отримали динаміку ціни активу як [9]:

$$P_t = P_0 e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})}t + \sigma B_t] \prod_{i=1}^{n_t} J_i$$

тоді просте повернення базового активу за невеликий проміжок збільшення часу Δt стає:

$$\frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} = e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})}\Delta t + \sigma(w_{t+\Delta t} - w_t) + \sum_{i=n_t+1}^{n_t+\Delta t} X_i] - 1$$

де розуміється, що підсумовування по порожній множині дорівнює нулю та $X_i = ln(J_i)$.

Для малого проміжку Δt ми можемо використати наближення $e^x \approx \frac{1 + x + x^2}{2}$ і, беручи до уваги, що $(\Delta w_t)^2 \approx \Delta t$ то отримуємо:

$$\frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} \approx (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\Delta w_t + \sum_{i=n_t+1}^{n_t+\Delta t} J_i + \frac{1}{2}\sigma^2(\Delta w_t)^2 \approx \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} + \sum_{i=n_t+1}^{n_t+\Delta t} X_i$$

де $\Delta w_t = w_{t+\Delta t}$ та ϵ є стандартною нормальною випадковою величиною.

Згідно з припущенням процесу Пуассона [11], ймовірність одного стрибка в інтервалі часу $(t, t + \Delta t]$ дорівнює $\lambda\Delta t$, а шансів мати більше одного стрибка - $o(\Delta t)$, де символ $o(\Delta t)$ означає, що якщо б ми ділили цей член на Δt, тоді його значення прагне до нуля, оскільки Δt прагне до нуля. Тому для малого Δt, ігноруючи кілька стрибків, ми маємо:

$$\sum_{i=n_t+1}^{n_t+\Delta t} X_i \approx X_{n_t+1} \text{ із ймовірністю } \lambda\Delta t$$

$$\sum_{i=n_t+1}^{n_t+\Delta t} X_i \approx 0 \text{ із ймовірністю 1- } \lambda\Delta t$$

Поєднуючи попередні результати, ми бачимо, що проста віддача базового активу приблизно розподіляється як:

$$P_{t+\Delta t} = P_t(\mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} + XI) \tag{3.2.1}$$

У рівнянні (3.2.3) I - випадкова величина Бернуллі, де :

$$Pr(I = 1) = \lambda t$$
$$Pr(I = 0) = 1 - \lambda t,$$

а величина X задана експоненціальним розподілом у рівнянні (3.1.2).

3.4 Моделювання ітераційної схеми для процесів із стрибками

Для моделювання процесів із стрибками ми використовуємо ітераційну схему (3.2.1). Алгоритм наступний:

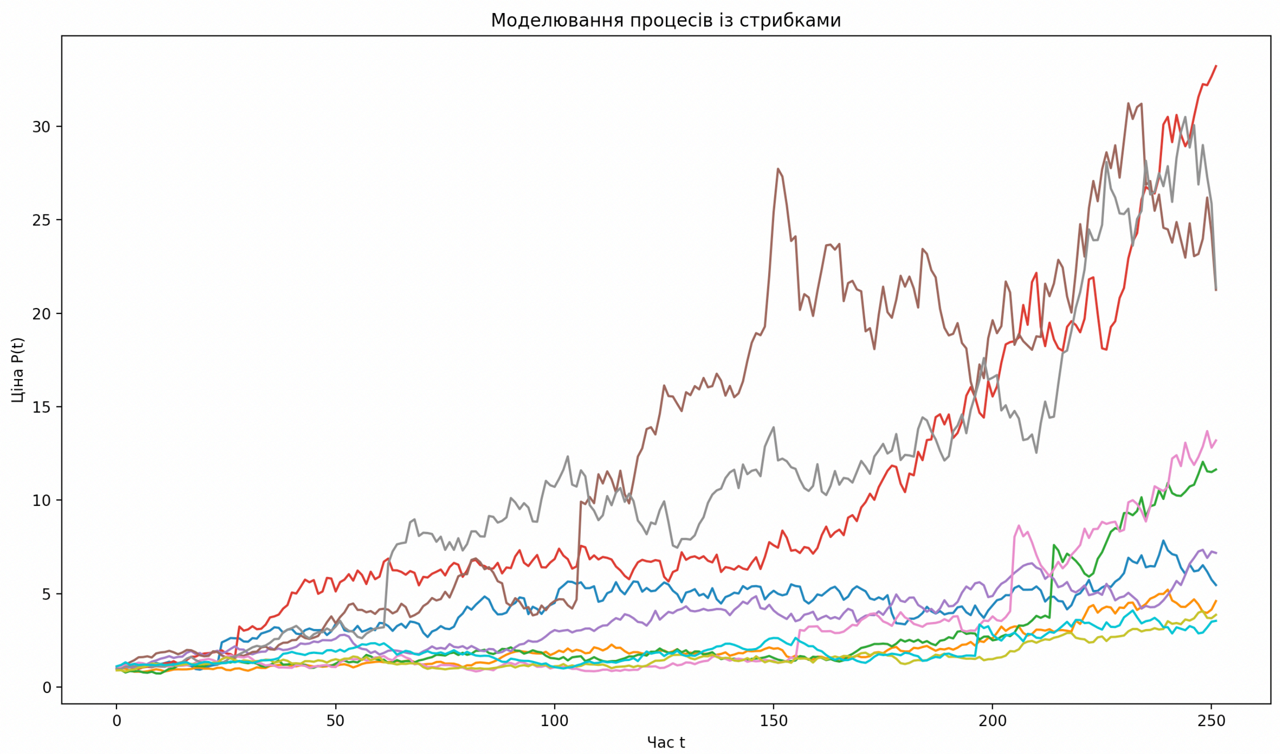
1. Симулюємо випадкову виличину ξ, яка має експоненційний розподіл із $\eta = 0.02$.
2. Знаходимо величину X за допомогою формули (3.1.2).
3. Знаходимо I як випадкову величину Бернуллі, де:

$$Pr(I = 1) = \lambda t$$
$$Pr(I = 0) = 1 - \lambda t,$$

де $k = -0.02, \lambda = 5$.

4. Моделюємо ітераційну схему (3.2.1).

На малюнку (3.1) наведена симуляція геометричного броунівського руху із стрибками на проміжку часу t, для незалежних випадкових величин, який був отриманий мною за допомогою програми, прикріпленої у додатку, написаної на мові програмування Python.



Для симуляції були використані наступні величини:

- $\mu = 0.1$ - параметр знесення;
- $\sigma = 1$ - параметр волатильності;
- $\lambda = 2$ - інтенсивність Пуассона;
- $\eta = 0.02$ - середнє;
- $t = 252$ - кількість робочих днів у році;
- $P = 1$ - початкова ціна;
- $k = -0.02$;
- Кількість симуляцій: 10.

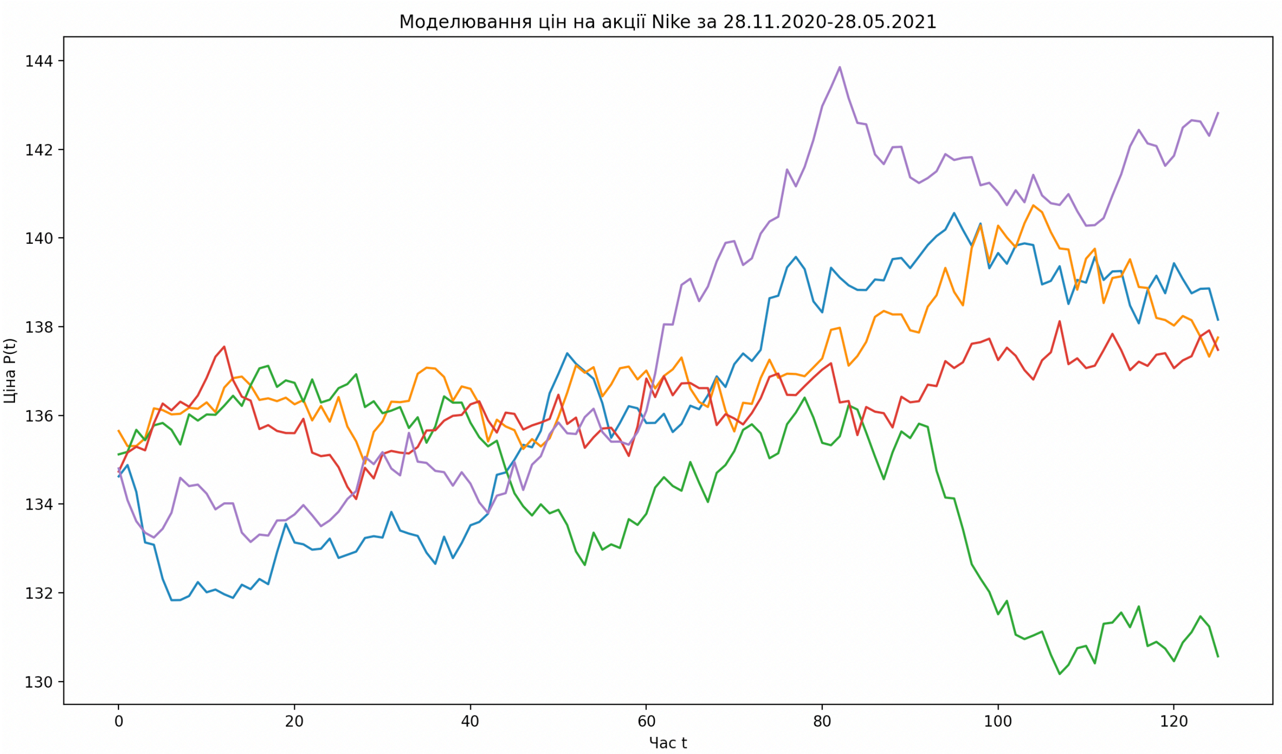
3.5 Моделювання процесів із стрибками для конкретних фінансових даних

Для моделювання процесів із стрибками для конкретних фінансових данних взято акції компанії Nike за період 28.11.2020-28.05.2021. За допомогою Excel знайдено параметри μ і σ.

Отже для конкретних фінансових даних маємо наступні параметри:

- $\mu = 0{,}000111495956878091$ - параметр знесення;
- $\sigma = 0{,}178418296542672$ - параметр волатильності.

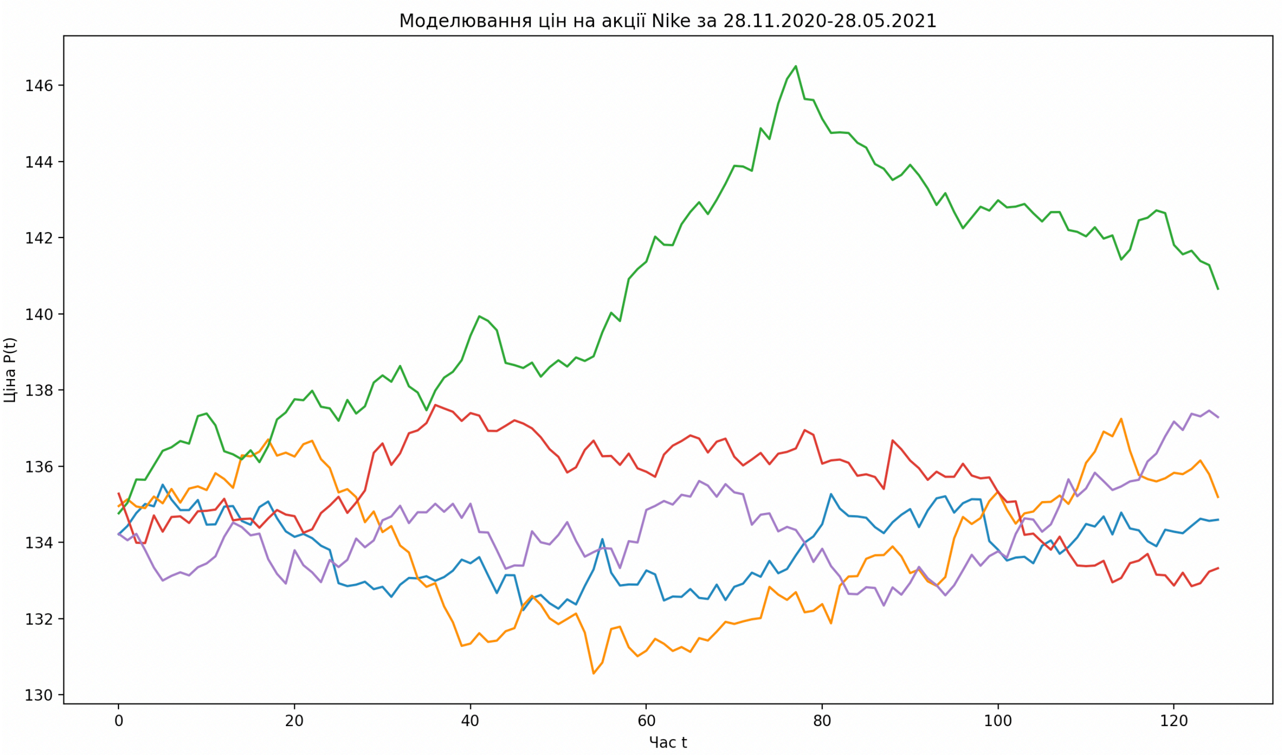
На малюнку (3.3-3.5) наведені симуляції фінансових данних із стрибками компанії Nike із знайденими параметрами μ та σ на проміжку часу 28.11.2020-28.05.2021, для незалежних випадкових величин, які були отримані мною за допомогою програми, прикріпленої у додатку, написаної на мові програмування Python.



Мал. 3.3

Для симуляції були використані наступні величини:

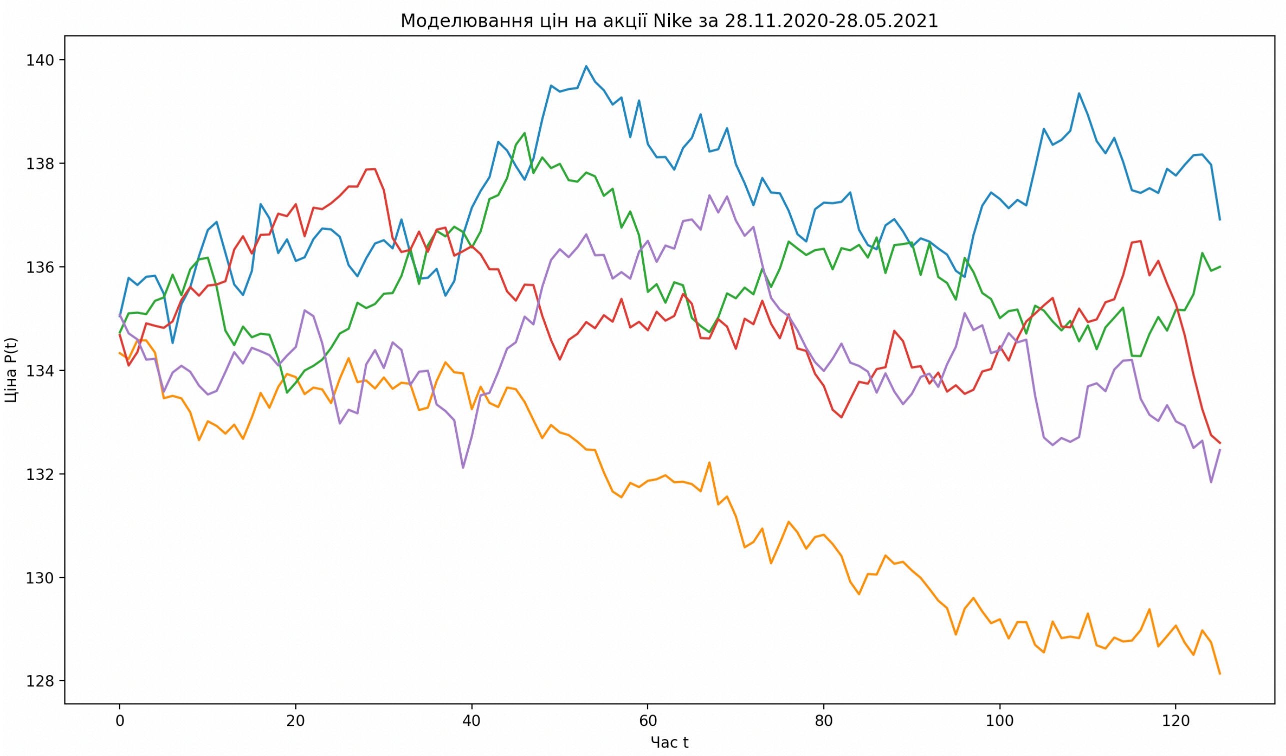
- $\lambda = 0.1$ - інтенсивність Пуассона;
- $\eta = 0.02$ - середнє;
- $t = 126$ - кількість робочих днів за півроку;
- $P = 134.699997$ - початкова ціна;
- $k = -0.02$;
- Кількість симуляцій: 5.



Мал. 3.4

Для симуляції були використані наступні величини:

- $\lambda = 0.2$ - інтенсивність Пуассона;
- $\eta = 0.02$ - середнє;
- $t = 126$ - кількість робочих днів за півроку;
- $P = 134.699997$ - початкова ціна;
- $k = 0.02$;
- Кількість симуляцій: 5.



Мал. 3.5

Для симуляції були використані наступні величини:

- $\lambda = 0.01$ - інтенсивність Пуассона;
- $\eta = 0.02$ - середнє;
- $t = 126$ - кількість робочих днів за півроку;
- $P = 134.699997$ - початкова ціна;
- $k = 0.1$;
- Кількість симуляцій: 5.

ВИСНОВОК

Моделювання (симуляція) випадкових процесів методом Монте-Карло на базі ітераційної схеми відповідного рівняння дифузії є важливим і корисним інструментом будь-яких досліджень у фінансовій математиці. Перевагою цього методу є те, що дослідник не потребує аналітичного розв'язку даного рівняння.

Основними резільтатами роботи стало те, що в роботі було здійснено:

- моделювання (симуляції) арифметичного і геометричного броунівського руху методом Монте-Карло з використанням ітераційних схем;
- запропонувано ітераційну схему та алгоритм її реалізування для процесів із стрибками для моделювання цін акцій;
- зроблено симуляцію руху акцій для конкретних фінансових даних.

Усі моделювання були зроблені мною за допомогою мови програмування Python, вихідний код яких можна переглянути у додатку до дипломної роботи.

ЛІТЕРАТУРА

[1] https://www.quantstart.com/articles/Brownian-Motion-and-the-Wiener-Process/

[2] С. Степанов, Стохастический мир, 2012. с. 9-14.

[3] https://people.revoledu.com/kardi/tutorial/StochasticProcess/BrownianMotion/ABM.html

[4] https://www.quantstart.com/articles/Geometric-Brownian-Motion/

[5] https://www.quantstart.com/articles/Itos-Lemma/

[6] https://www.researchgate.net/publication/222640753 _Drift_and_volatility_ estimation_in_discrete_time

[7] http://sewiki.ru/Моделирование_методом_Монте-Карло

[8] С. Степанов, Стохастический мир, 2012. с. 250-258.

[9] Ruey S. Tsay, Analysis of financial time series, 2002. p. 221-256.

[10] S.G. Kou, A Jump-Diffusion Model for Option Pricing, 2002. p. 1087-1090.

[11] Peter Tankov, Financial modelling with jump processes, 2004, p. 36-55.

[12] Merton, R.C. (1976) Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, Journal of Financial Economics, 3:125-144