

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«МАРКОВСЬКІ СТРИБКОПОДІБНІ ПРОЦЕСИ З ЛОКАЛЬНОЮ
ВЗАЄМОДІЄЮ»**

Виконав: студент 4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Дідик Тимур Валерійович
Керівник: Михалевич В. М.,
доцент, д.н.

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

«____» _____ 20____ р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
<i>Тема роботи</i>	<i>3</i>
<i>Мета роботи</i>	<i>3</i>
<i>Актуальність теми</i>	<i>3</i>
ОСНОВНА ЧАСТИНА.....	4
Теоретична частина	4
<i>Розділ 1. Марковські процеси із взаємодією в дискретному часі</i>	<i>4</i>
<i>Розділ 2. Напівмарковські процеси</i>	<i>8</i>
<i>Розділ 3. Керовані напівмарковські процеси</i>	<i>13</i>
<i>Розділ 4. Напівмарковські процеси із взаємодією в дискретному часі.....</i>	<i>16</i>
<i>Розділ 5. Марковські стрибкоподібні процеси із локальною взаємодією.....</i>	<i>25</i>
<i>Розділ 6. Марковські стрибкоподібні процеси із локальним та синхронним перехідним механізмом та з керованістю в момент стрибка</i>	<i>31</i>
Практична частина	34
<i>Розділ 7. Огляд моделей марковських стрибкоподібних процесів</i>	<i>34</i>
Програма для аналізу поведінки марковського стрибкоподібного процесу	39
Висновки	41
Список використаної літератури	42

ВСТУП

Тема роботи

Марковські стрибкоподібні процеси з локальною взаємодією

Мета роботи

Розглянути напівмарковські процеси, марковські стрибкоподібні процеси, локальну та синхронну взаємодію, розглянути моделі марковських стрибкоподібних процесів, побудову імовірнісного розподілу та зробити програмну реалізацію побудови розподілу та аналізу стрибкоподібного процесу.

Актуальність теми

Марковські стрибкоподібні процеси – це неперервні стохастичні процеси, що широко використовуються в різноманітних прикладних дисциплінах. Такі процеси також називають марковськими ланцюгами із неперервним часом. Ці процеси відіграють дуже важливу роль у теорії, що стосується моделей масового обслуговування, моделей приросту населення та моделей інженерних систем. В цій роботі розглядається вся основна теорія, що стосується марковських стрибкоподібних процесів, розглядаються можливі моделі даних процесів та робиться аналіз їх поведінки за допомогою імовірнісного розподілу.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Теоретична частина

Розділ 1. Марковські процеси із взаємодією в дискретному часі

В багатьох галузях застосування (наприклад в біології, економіці або інженерії) випадкові поля описують стан системи для якогось зафіксованого часу. Еволюція за проміжок часу цієї системи описується стохастичним процесом η із випадковими полями. В цьому випадку ми записуємо $\xi = (\xi^t)$ щоб емпіризувати часову залежність.

Імовірності локального та синхронного переходу [1]

$\xi = \{\xi^t, t = 0, 1, \dots\}, \xi^t: (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \rightarrow (X, \mathbb{X})$ є марковським процесом із дискретним часом на простором станів $(X, \mathbb{X}) = (x_{i \in V} X_i, \otimes_{i \in V} \mathbb{X}_i)$. Імовірності переходу процесу ξ визначені як *локальні* якщо:

$$\Pr\{\xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi^t = x^t, \dots, \xi^0 = x^0\} = \Pr\{\xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi_{\tilde{N}(k)}^t = x_{\tilde{N}(k)}^t\} \text{ для } k \in V, x^0, \dots, x^t \in X, C_k \in \mathbb{X}_k,$$

містить $\Pr^{(\xi^t, \dots, \xi^0)}$. Тобто імовірність переходу у вершині k залежить від стану його повного околу у попередньому моменті часу.

Імовірності переходу для ξ є *синхронними* [10] якщо:

$$\Pr\{\xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi^t = x^t\} = \prod_{k \in K} \Pr\{\xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi^t = x^t\}, \forall K \subset V, x^t \in X, C_K = x_{k \in K} C_k \in \mathbb{X}_K$$

містить $\Pr^{(\xi^t, \dots, \xi^0)}$.

Лема [1]: Суворо додатне випадкове поле із дискретним простором станів $\xi: (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \rightarrow (X, \mathbb{X}) = (x_{i \in V} X_i, \otimes_{i \in V} \mathbb{X}_i)$ є марковським полем тоді і тільки тоді якщо для $\forall$ непорожніх $K, J \subseteq V$ таких, що $\tilde{N}(K) \subseteq J$ містить

$$\Pr\{\xi_K = y_K \mid \xi_{J-\{K\}} = x_{J-\{K\}}\} = \Pr\{\xi_K = y_K \mid \xi_{N(K)} = x_{N(K)}\}, \forall x \in X, y_K \in X_K$$

Якщо ξ задовольняє Лему, то даний процес називається Марковським процесом із локальною взаємодією на (Γ, X) або, якщо коротко, Марковським випадковим полем.

Візьмемо $\xi = (\xi_k^t: (t, k) \in N \times V)$ як головний випадковий елемент:

Перша частина означення забезпечує, що однокрокова перехідна поведінка залежного від часу марковського випадкового поля в напрямку t на деякому субграфі K графу Γ має зафіксовані значення випадкових елементів в сусідстві $N(K)$ в напрямку k та не залежить від поведінки поля поза $N(K)$. Друга частина гарантує умовну незалежність вузлів графу, що еволюціонує в часовому напрямку, заданому в просторовому околі.

Потенціал u на (Γ, X) є парним потенціалом якщо u визначено як множина функцій $u_k: X_k \rightarrow R$; $u_{kj}: X_k \times X_j \rightarrow R, k \in V, \{k, j\} \in B$, така, що $u_{kj}(y, z) = u_{jk}(z, y)$ для будь-яких $\{k, j\} \in B, y \in X_k, z \in X_j$.

Теорема 1 [1]. Нехай $\xi = \{\xi^t, t = 0, 1, \dots\}, \xi^t: (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \rightarrow (X, X)$ є дискретним у часі марковським процесом із дискретним простором станів $X := \prod_{i \in V} X_i$, що має локальні та синхронні перехідні імовірності з урахуванням взаємодії з графом $\Gamma = (V, B)$. Припустимо ξ має суворо додатній марковський перехідне ядро $Q = \prod_{k \in V} Q_k$ (Q_k суворо додатній для всіх $k \in V$). Тоді ξ оборотний процес тоді і тільки тоді коли він є стаціонарним та Q є перехідною функцією Гіббса.

Перехідна функція Q марковського ланцюга із локальним та зворотнім перехідним ядром є перехідною функцією Гіббса із парним потенціалом u , якщо для всіх $k \in V, y_k \in X_k, x_{N(k)} \in X_{N(k)}$

$$\begin{aligned} \Pr\{\xi_k^{t+1} = y_k \mid \xi_{N(k)}^t = x_{N(k)}\} &=: Q_k(y_k \mid x_{N(k)}) \\ &= \frac{\exp[-u_k(y_k) - \sum_{j \in N(k)} u_{kj}(y_k, x_j)]}{\sum_{z_k \in X_k} \exp[-u_k(z_k) - \sum_{j \in N(k)} u_{kj}(z_k, x_j)]} \end{aligned}$$

Теорема 2 [1]. Нехай $\xi = \{\xi^t, t = 0, 1, \dots\}$, $\xi^t: (\Omega, \mathcal{F}, Pr) \rightarrow (X, \mathbb{X})$ є дискретним у часі оборотним марковським процесом із дискретним простором станів $X := \bigcup_{i \in V} X_i$, що має локальні та синхронні перехідні імовірності з урахуванням взаємодії з графом $\Gamma = (V, B)$. Якщо перехідне ядро Q з ξ є перехідною функцією Гіббса із парним потенціалом u , тоді інваріантна міра імовірності π є мірою Гіббса на (Γ, X) .

Важливість цих теорем полягає в тому, що вони забезпечують нам структурні умови, які роблять властивість Маркова у просторі спадковою в тому сенсі, що з локальної структури відносно i (що нагадує властивість Маркова в просторі) перехідного ядра, локальна структура впливає обмежувальний та стаціонарний розподіл.

Локальний контроль взаємодій марковського процесу зі структурованим графом станів. Простори дій та локальні обмеження [1]

Послідовність моментів прийняття рішень (керованих моментів) є шкалою часу N .

- (1) Простір дій (або множина значень керування) придатний для контрольних моментів позначається як $A = \bigcup_{i \in V} A_i$ на Γ , де A_i – це множина усіх можливих дій (рішень) для вершини i . Будемо вважати, що A_i – це польський простір із Борелевою σ – алгеброю λ_i . λ – добуток Бореля- σ – алгеброю на A [1].
- (2) Якщо для того, хто приймає рішення в вузлі i в момент часу t із історією $h^t \in H^t$ множина керованих дій обмежена до $A_i^t(h^i) \subseteq A_i$, ми називаємо

$A_i^t(h^i)$ множиною локально допустимих дій (рішень) в момент часу t та з історією $h^t \in H^t$ [1].

(3) Будемо вважати, що визначена множина значень планує

$$A_i^t(H^t \rightarrow 2^{A_i} - \{\emptyset\}, h \rightarrow A_i^t(h), i \in V$$

в залежності тільки від локальної історії та вимірювана за Борелем [1].

Розділ 2. Напівмарковські процеси

Напівмарковський процес [2] або, як його іноді називають, марковський процес відновлення вміщає в себе властивості як марковських процесів, так і процесів відновлення. Напівмарковський процес – це такий випадковий процес котрий переходить з одного стану в інший у відповідності з заданим розподілом імовірностей, а час перебування процесу в будь-якому стані є випадковою величиною, розподіл котрої залежить як від цього стану, так і від стану, в який буде перехід даного процесу.

Процес відновлення [2], марковський ланцюг із дискретним часом та однорідний марковський процес із неперервним часом є виключеннями напівмарковського процесу. Процес відновлення – напівмарковський процес із одним станом. Марковський ланцюг із дискретним часом – напівмарковський процес, у якого час перебування в будь-якому стані дорівнюють одиниці, а однорідний марковський процес із неперервним часом це напівмарковський процес, у якого час перебування в кожному стані має показник розподілу, який залежить лише від номеру цього стану.

Відомо, що однорідний регулярний ланцюг Маркова з дискретною множиною станів [3] $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ задається довільною матрицею $Q = \{q_{ij}, i, j, j \in E\}$, в котрій

$$q_{ij} = -q_i = -\sum_{\substack{j \in E \\ i \neq j}} q_{ij}$$

еволюція ланцюга Маркова відбувається наступним чином: в i -му стані система знаходить випадковий час θ_i , який розподілений за показниковим законом з параметром q_i , а потім переходить в j -тий стан з ймовірністю

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}, i, j \in E.$$

Такі системи отримали назву напівмарковських.

Напівмарківською матрицею [2] називається матричнозначна функція $Q(x) = \{Q_{ij}(x), i, j \in E\}$, яка задовольняє умови:

- 1) $Q_{ij}(x) \equiv 0, x < 0, i, j \in E$;
- 2) $Q_{ij}(x)$ – незменшувані зліченні функції
- 3) $\sum_{j \in E} Q_{ij}(\infty) \leq 1, i \in E$.

Нехай (Ω, β, P) – ймовірнісний простір [4], на якому визначені наступні величини:

- a) $L(\omega)$, яка приймає значення з $\{1, 2, \dots, \infty\}$;
- b) $\xi_n(\omega)$, визначена для $0 \leq n < L(\omega)$ та набуваюча значень з E ;
- c) $\tau_n(\omega)$, визначена для $0 \leq n < L(\omega)$ та набуваюча значень з $[0, \infty]$ таких, що для майже всіх $\omega \in \Omega$

$$0 = \tau_0(\omega) \leq \tau_1(\omega) \leq \dots$$

Передбачається, що для будь-якого $n \geq 0$ σ -алгебра β містить σ -алгебри, породжені множинами:

$$\{\omega: \xi_m = k, \tau_{m+1} - \tau_m \leq t, L(\omega) > n, m = \overline{0, n}\}, k \in E, t \in [0, \infty).$$

Процес $\{\xi_{n+1}(\omega), \tau_{n+1}, L\}$ називається процесом марковського відновлювання (ПМВ) [2], породжений напівмарковською матрицею $Q(x)$, якщо

$$\begin{aligned} P\{\xi_{n+1}(\omega) = j, \tau_{n+1} \leq t | \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n; \tau_0, \dots, \tau_n\} = \\ = P\{\xi_{n+1} = j, \tau_{n+1} \leq t | \xi_n, \tau_n\} = Q_{\xi_n j}(t - \tau_n) \end{aligned}$$

майже всюди на $\{\omega: L(\omega) > n\}$ для кожного $j \in E, t \in [0, \infty), n \geq 0$. Визначимо $\theta_n = \tau_{n+1} - \tau_n, n \geq 0$. Тоді напівмарковська матриця $Q(x)$ також задає перехідні імовірності двомірного ланцюга Маркова $\{\xi_n, \theta_n, L\}$:

$$P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} \leq t | \xi_n, \theta_n\} = Q_{\xi_n j}(t).$$

Введемо наступні величини

$$\zeta(\omega) = \sup_{0 \leq n < L} \tau_n(\omega),$$

$$N_j(t) = N_j(t, \omega) = \text{card} \{n: \xi_n = j, \tau_n \leq t\},$$

$$N(t) = N(t, \omega) = \sup_{0 \leq n < L} \{n: \tau_n \leq t\}$$

Процес $\{\xi(t), \zeta\} = \{\xi_{N(t)}, L\}$ називається напівмарковським процесом, породженим напівмарковською матрицею $Q(x)$ [2].

Для напівмарковського процесу $\{\xi(t), \zeta\}$ величини τ_n називають моментами переходу (зміна стану), ξ_n визначають стан в момент n -го переходу, θ_n називають часом перебування НМП в стані ξ_n , $N(t)$ – загальне число переходів за час t , $N_j(t), j \in E$ – число потраплянь в j -тий стан за час t .

$$N(t) = \sum_{j \in E} N_j(t)$$

L – загальне число переходів процесу, враховуючи момент $\tau_0 = 0$.

Процес $\{\vec{N}(t), L\} = \{N_j(t), j \in E, L\}$ називається рахуючим (counting) процесом [2].

Марковський ланцюг $\{\xi_n, L\}$ називають ланцюгом Маркова, вкладеним в марковський процес відновлення, напівмарковський процес або рахуючий процес відповідно [2].

В залежності від властивостей напівмарковської матриці, яка задає марковський процес відновлення та напівмарковське відновлення, траєкторії процесу можуть мати істотно різні властивості.

Зазвичай розглядається вузький клас напівмарковських процесів, у якого напівмарковська матриця задовольняє додаткову умову

$$\sum_{j \in E} Q_{ij}(\infty) = \sum_{j \in E} p_{ij} = 1$$

Ця умова еквівалентна тому, що $L(\omega) = \infty$ з імовірністю 1. Процеси, що задовольняють цю умову, називаються консервативним.

Напівмарковський процес визначається двумірним марковським ланцюгом[9]

$$(\xi_n, \theta_n), 0 \leq n \leq \infty, \xi_n \in E = \{1, 2, \dots, N\}, \theta_n \in [0; \infty).$$

$$\text{Розподіл: } P\{\theta_0 = 0\} = 1, p_i = P\{\xi_0 = i\} \geq 0, \sum_{i \in E} p_i = 1.$$

Марковський ланцюг задається перехідними імовірностями, котрі називаються напівмарковським ядром [2]:

$$P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t | \xi_n = i, \theta_n < \tau\} = P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t | \xi_n = i\} = Q_{ij}(t)$$

Будемо вважати, що ця перехідна імовірність не залежить від n (номера кроку), це означає одорідність марковського ланцюга.

Напівмарковське ядро – імовірність того, що напівмарковський процес перейде із стану j і час цього переходу не перевищує t за умови, що процес перебуває у стані i [2].

$$\text{Властивості напівмарковського ядра [2]} \quad P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t | \xi_n = i\} = Q_{ij}(t)$$

- 1) $Q_{ij}(t) \geq 0, i, j \in E = \{1, 2, \dots, N\}.$
- 2) $p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t) = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\}, i, j \in E = \{1, 2, \dots, N\}.$
- 3) $\sum_{j \in E} P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t\} = \sum_{j \in E} Q_{ij}(t) = P\{\theta_{n+1} < t | \xi_n = i\}, i, j \in E = \{1, 2, \dots, N\}$
- 4) $F_{ij}(t) = P\{\theta_{n+1} < t | \xi_n = i, \xi_{n+1} = j\} = \frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}}, p_{ij} \neq 0, i, j \in E = \{1, 2, \dots, N\}$
- 5) $Q_{ij}(t)$ є неспадаючою функцією, так само як і $F_{ij}(t)$
- 6) $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1, i \in E = \{1, 2, \dots, N\}$

Імовірності переходів в моменти стрибків визначаються стохастичною матрицею $N \times N$, $P = ||p_{ij}||$, котра задає вкладений ланцюг Маркова, де p_{ij} –

імовірність переходу із стану i в стан j . Якщо перехід здійсниться, то час перебування процесу в стані i не перевищує t та процес переходить в стан j .

Послідовність побудови напівмарковського процесу [2]:

- 1) Визначення Марковських моментів.
- 2) Визначення стану процесу.
- 3) Обрахунок напівмарковського ядра $Q_{ij}(t)$.
- 4) Перевірка властивостей напівмарковського ядра.

Розділ 3. Керовані напівмарковські процеси

Щоб задати керований напівмарковський процес визначається тривимірний марковський ланцюг $(\xi_n, \theta_n, u_n), 0 \leq n \leq \infty, \xi_n \in E = \{1, 2, \dots, N\}, \theta_n \in [0; \infty), u_n \in U_i$ [2].

$\mathbf{B}$ є сигма алгеброю підмножин множини $U, B \in \mathbf{B}$. При цьому розподіл $P\{\theta_0 = 0\} = 1, p_i = P\{\xi_0 = i\} \geq 0, \sum_{i \in E} p_i = 1. u_n \in U_i$ – керування.

Марковський ланцюг задається перехідними імовірностями, що в сукупності є напівмарковським ядром $\hat{Q}_{ij}(t, B)$ [2]:

$$P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t, u_{n+1} \in B | \xi_n = i, \theta_n < \tau, u_n \in A\} = P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t, u_{n+1} \in B | \xi_n = i\} = \hat{Q}_{ij}(t, B)$$

Ця перехідна імовірність не залежить від номера кроку n , що означає, що ланцюг однорідний.

Властивості $\hat{Q}_{i,j}(t, B)$ [2]:

- 1) $\hat{Q}_{ij}(t, B) \geq 0, i, j \in E = \{1, 2, \dots, N\}$.
- 2) $\hat{Q}_{ij}(t, B)$ – неспадаюча функція $i, j \in E = \{1, 2, \dots, N\}$.
- 3) $p_{ij}(B) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Q}_{ij}(t, B) = P\{\xi_{n+1} = j, u_{n+1} \in B | \xi_n = i\}, i, j \in E = \{1, 2, \dots, N\}$
- 4) $p_{ij}(B) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{Q}_{ij}(t, B) = P\{\xi_{n+1} = j, u_{n+1} \in B | \xi_n = i\} = p_{ij}, i, j \in E = \{1, 2, \dots, N\}$.
- 5) $\sum_{j \in E} P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t, u_{n+1} \in B | \xi_n = i\} = \sum_{j \in E} \hat{Q}_{ij}(t, B) = P\{\xi_{n+1} \in E, \theta_{n+1} < t, u_{n+1} \in B | \xi_n = i\} = P\{\theta_{n+1} < t, u_{n+1} \in B | \xi_n = i\}, i \in E = \{1, 2, \dots, N\}$.
- 6) $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j \in E} \hat{Q}_{ij}(t, B) = P\{u_{n+1} \in B | \xi_n = i\} = G_i(B), i \in E = \{1, 2, \dots, N\}$.
- 7) $\hat{Q}_{ij}(t, B) \leq G_i(B), i, j \in E = \{1, 2, \dots, N\}$.

Тоді $Q_{ij}(t, U) = P\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t | \xi_n = i, u_n = u\}$ – напівмарківське ядро, або ж умовна імовірність того, що напівмарковський процес перейде в стан j і час

цього переходу не перевищить t за умови, що процес перебуває в стані i та в цьому стані прийнято рішення із множини рівнянь [6].

$$p_{ij}(u) = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i, u_n = u\}$$

$$F_{ij}(t, u) = P\{\theta_{n+1} < t | \xi_n = i, \xi_{n+1} = j, u_{n+1} = u\} = \frac{Q_{ij}(t, u)}{p_{ij}(u)}$$

Керований напівмарковський процес може бути заданий наступними методами [2]:

- За допомогою задання імовірностей $\hat{Q}_{ij}(t, B)$
- За допомогою задання сімейства матриць $Q_{ij}(t, U)$ і вектора набору імовірнісних мір

Керований напівмарковський процес $X(t)$ визначається як пара:

$$X(t) = (\xi(t), u(t)), \xi(t) = \xi_{v(t)-1}, u(t) = u_{v(t)},$$

Де $v(t) = \inf(n: \sum_{k \leq n} \theta_k)$, $\theta_0 = 0$ називається рахуючим процесом. Процес $\xi(t)$ співпадає із стандартним напівмарковським процесом. Друга компонента напівмарковського процесу $u(t)$ визначає траєкторії рішень, що приймаються [7].

Компоненти керованого напівмарковського процесу $\xi(t), u(t)$ та рахуючий процес $v(t)$ мають ступінчаті траєкторії, для яких співпадають моменти розривів [7].

Для зафіксованої стратегії керування імовірнісні характеристики напівмарковського процесу визначаються рівностями:

$$Q_{ij}(t) = Q_{ij}(t, U_i) = \int_{U_i} Q_{ij}(t, u) G_i(du).$$

Множина імовірнісних мір $G_i(B)$ визначає марковську однорідну рандомізовану стратегію управління.

Побудова керованого напівмарковського процесу [2]:

- 1) Визначення марковських моментів
- 2) Визначення стану процесу
- 3) Визначення множини керувань
- 4) Для визначення напівмарковського ядра необхідно задати $G_i(B)$ вектор на просторі керувань $Q_{ij}(t, U)$.
- 5) Виконання перевірки властивостей напівмарковського ядра.

Розділ 4. Напівмарковські процеси із взаємодією в дискретному часі

Якщо напівмарковський процес η та асоційований з ним марковський процес (ξ, τ) судячи з їх конструкції зв'язані із системою сусідства $\{N(k): k \in V\}$ з (V, B) , то буде природньо припустити, що із узятою до уваги еволюцією за момент часу, значення $\xi_k^n = \eta_k(\sigma^n) = x_k$ k -ї вершини залежить від попереднього стану всієї системи через значення вершин в $\tilde{N}(k)$ (включаючи k) після перехідного моменту σ^{n-1} . Щоб описати це, ми вводимо властивість Маркова в простір для ядра вбудованого ланцюга переходів для напівмарковського процесу. Оскільки ми концентруємося на локальній поведінці вбудованого ланцюга стрибків, ми дійшли лише до визначення синхронних та локальних ядер. Звідси випливає, що ми можемо виразити необхідні властивості безпосередньо через перехідне ядро вбудованої ланцюга Маркова Q [1].

Ядра локальних та синхронних переходів [1]

Нехай $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ із простором X є напівмарковським процесом, що асоційований з марковським процесом відновлення $(\xi, \tau) = \{(\xi^n, \tau^n), n = 0, 1, \dots\}$. Імовірність переходу стрибком η та ξ є локальною [1] якщо для всіх $k \in V, x^0, \dots, x^{n+1} \in X, C_k \in \mathbb{X}_k$

$$\Pr\{\xi_k^{n+1} \in C_k \mid \xi^n = x^n, \dots, \xi^0 = x^0\} = \Pr\{\xi_k^{n+1} \in C_k \mid \xi_{\tilde{N}(k)}^n = x_{\tilde{N}(k)}^n\}$$

тобто, стан вершини k одразу після стрибка залежить від стану його повного сусідства на останньому переході. Імовірності переходу X називаються синхронними [1] якщо

$$\Pr\{\xi_k^{n+1} \in C_k \mid \xi^n = x^n\} = \prod_{k \in K} \Pr\{\xi_k^{n+1} \in C_k \mid \xi^n = x^n\}, \forall K \subset V, x^n \in X$$

де $C_k = \bigcup_{k \in X} C_k \in \mathbb{X}_k$.

Якщо η , ξ або (ξ, τ) виконують умови наступних властивостей, то η називається напівмарковським процесом [2] із локально-взаємодіючими синхронними компонентами над (Γ, X) або ж напівмарковським випадковим полем [3]. Так само, (ξ, τ) є процесом марковського відновлення із локально-взаємодіючими синхронними компонентами над (Γ, X) або ж марковським полем відновлення.

Простори дій та локальні обмеження [1]

$\sigma = \{\sigma^n, n = 0, 1, \dots\}$ є послідовністю моментів прийняття рішень (керованих моментів).

- 1) Простір дій (або множина керованих значень) придатний для контрольних моментів позначається як $A = x_{i \in V} A_i$ на Γ , де A_i – це множина усіх можливих дій (рішень) для вершини i . Будемо вважати, що A_i – це польський простір із Борелевою σ – алгеброю λ_i . λ – добуток Бореля- σ – алгеброю на A [1]
- 2) Якщо для особи, що приймає рішення у вузлі i та в момент часу σ^n у стані $\xi^n = x$ множина контрольних дій обмежена до $A_i^n(x) \subset A_i$, то ми називаємо $A_i^n(x)$ множиною допустимих дій (рішень) момент часу σ^n і стані x . Завжди вважається, що набори обмежень є інваріантними щодо часу, і тому залежать лише від фактичного стану системи [1]
- 3) Будемо вважати, що визначена множина значень планує

$$A_i: X \rightarrow 2^{A_i} - \{\emptyset\}, x \rightarrow A_i(x), i \in V$$

в залежності від $x \in X$ тільки через $x_{\tilde{N}(k)} \in X_{\tilde{N}(k)}$ та є борелівськими. Таким чином, A_i визначає прийнятність як локальну власність. Тому записуємо $A_i(x) =: A_i(x_{\tilde{N}(i)})$. Також вважаємо, що множина

$$k_i = \{(x_{\tilde{N}(i)}, a_i): x_{\tilde{N}(i)} \in X_{\tilde{N}(i)}, a_i \in A_i(x_{\tilde{N}(i)})\}$$

є борелівською множиною простору добутків $X_{\tilde{N}(i)} \times A_i$ і $k = x_{i \in V} k_i$ теж є борелівською в просторах добутків $\tilde{X} \times A$, $\tilde{X} = x_{i \in V} X_{\tilde{N}(i)}$ та $\tilde{X} = \sigma\{x_{i \in V} X_{\tilde{N}(i)}\}$ [1].

Історії напівмарковських процесів [1]

Послідовність історій $(\bar{H}^n: n \in N)$ [9] для напівмарковської моделі рішень де рішення дозволяються лише після стрибка задаються як $\bar{H}^0 = X$, $\bar{H}^{n+1} = \bar{H}^n \times A \times R_+ \times X$ для $n \geq 0$. (Реальні цінні координати історії описують час між стрибками.) Кожне $\bar{H}^n$, що містить $3n+1$ фактор просторів має добуток із σ -алеброю $\mathfrak{C}^n$.

Послідовність $A = (A^n: n \in N)$ із множини функцій визначає допустимі дії $A^n: H^n \subseteq \bar{H}^n \rightarrow 2^A - \{\emptyset\}$ та домен H^n рекурсивно визначений як $H^0 := X$ та $H^{n+1} := \{(h, a, t, x) \in \bar{H}^{n+1}: h \in H^n, a \in A^n(h), t \in R_+, x \in X\}$. $A^n(h)$ є множиною допустимих дій в момент часу n та історії h .

Стратегії [1]

- 1) Нехай a_i^n визначає дії (рішення), зроблені тим, хто обирає рішення у вузлі i та в переході n σ^n , $a^n := (a_i^n: i \in V)$ вектор спільного рішення σ^n , $n \in N$ [1]
- 2) Стратегія (політика) π управління системою із взаємодіючими компонентами визначається як вектор координаційних політик $\pi = (\pi_i, i \in V)$ де для вузла i $\pi_i = \{\pi_i^0, \dots, \pi_i^n, \dots\}$ є послідовністю перехідних імовірностей $\pi_i^n = \pi_i^n(\cdot | x^0, a^0, t^0, \dots, x^{n-1}, a^{n-1}, t^{n-1}, x^n)$. Отже π_i^n є імовірнісною мірою $(A_i, \mathfrak{C}_i)$ для будь-яких $(x^0, a^0, t^0, \dots, x^{n-1}, a^{n-1}, t^{n-1}, x^n)$ та мірно залежить від історії $h^n = (x^0, a^0, t^0, \dots, x^{n-1}, a^{n-1}, t^{n-1}, x^n)$ системи до n -го переходу. Для всіх $B_i \in \mathfrak{C}_i$ маємо:

$$\Pr \left\{ a_i^n \in B_i \middle| \xi^0 = x^0, \lambda^0 = a^0, \tau^0 = t^0, \dots, \xi^{n-1} = x^{n-1}, \lambda^{n-1} = a^{n-1}, \tau^{n-1} = t^{n-1}, \xi^n = x^n \right\} = \pi_i^n \{ B_i | x^0, a^0, t^0, \dots, x^{n-1}, a^{n-1}, x^n \} [1]$$

3) Паралельно синхронним переходам і локалізації перехідних ядер, ми завжди припускаємо, що особи, що приймають рішення, розташовані у вузлах, діють умовно незалежно, враховуючи історію системи. Це призводить до управління процесом, керованим синхронним ядром управління.

$$\Pr \left\{ a^n \in \bigcup_{i \in V} B_i \middle| \xi^0 = x^0, \lambda^0 = a^0, \tau^0 = t^0, \dots, \xi^{n-1} = x^{n-1}, \lambda^{n-1} = a^{n-1}, \tau^{n-1} = t^{n-1}, \xi^n = x^n \right\} = \prod_{i \in V} \Pr \left\{ a_i^n \in B_i \middle| \xi^0 = x^0, \lambda^0 = a^0, \tau^0 = t^0, \dots, \xi^{n-1} = x^{n-1}, \lambda^{n-1} = a^{n-1}, \tau^{n-1} = t^{n-1}, \xi^n = x^n \right\} = \prod_{i \in V} \pi_i^n (B_i | x^0, a^0, t^0, \dots, x^{n-1}, a^{n-1}, t^{n-1}, x^n), B_i \in \mathfrak{C}_i, a^s \in A, x^s \in X, t^s \in R_+ [1]$$

Локальні стратегії [1]

Ми завжди припускаємо, що для дій набори обмежень інваріантні за часом і залежать лише від околу:

$$A^n(x) = A(x) = \bigcup_{i \in V} A_i(x_{\tilde{N}(i)}) \text{ для всіх } n$$

1) Якщо в момент переходу $\sigma^n, n = 0, 1, \dots$, рішення a_i^n у вузлі i було зроблено згідно з імовірністю π_i^n на базі локальної історії $h_i^n = (x^0_{\tilde{N}(i)}, a_i^0, t^0, \dots, x^{n-1}_{\tilde{N}(i)}, a_i^{n-1}, t^{n-1}, x^n_{\tilde{N}(i)})$ околу $\tilde{N}(i)$ з i тільки, і якщо $\pi_i^n (A_i(x^n_{\tilde{N}(i)}) | h_i^n) = 1$ для $x^s_{\tilde{N}(i)} \in X_{\tilde{N}(i)}, a_i^s \in A_i^s(x^s_{\tilde{N}(i)}), t^s \in R_+$, тоді π_i^n вважається допустимим локальним, а послідовність перехідних імовірностей (рішень) $\pi_i = \{\pi_i^n, n \in N\}$ називається допустимою локальною стратегією для вершини i [1]

2) Допустима локальна стратегія $\pi_i = \{\pi_i^n, n \in N\}$ називається допустимою локальною марковською стратегією якщо

$$\pi_i^n(\cdot | x^0_{\tilde{N}(i)}, a_i^0, t^0, \dots, x^{n-1}_{\tilde{N}(i)}, a_i^{n-1}, t^{n-1}, x^n_{\tilde{N}(i)}) = \pi_i^n(\cdot | x^n_{\tilde{N}(i)}), i \in V$$

[1]

3) Допустима локальна марковська стратегія $\pi_i = \{\pi_i^n, n \in N\}$ називається допустимою локальною стаціонарною марковською стратегією якщо

$$\pi_i^{n'}(\cdot | x^n_{\tilde{N}(i)}) = \pi_i^{n''}(\cdot | x^n_{\tilde{N}(i)}), i \in V \text{ для всіх } n', n'' \text{ та всіх } x \text{ [1].}$$

4) Допустима локальна стаціонарна стратегія $\pi = \{\pi_i, i \in V\}$ називається допустимою локальною стаціонарною детерміністичною (не рандомізованою) стратегією якщо $\pi_i(\cdot | x_{\tilde{N}(i)}), i \in V$ є одновимірною на $A_i(x_{\tilde{N}(i)}), i \in V$ відповідно для всіх $x \in X$ [1].

Позначається клас усіх допустимих локальних стратегій (з наборами інваріантних обмежень щодо часу) як LS , субклас допустимих локальних марковських стратегій як LS_M , виразом $LS_S \subseteq LS_M$ позначаємо клас допустимих локальних стаціонарних стратегій. LS_P позначаємо клас допустимих локальних детерміністичних (чистих) стратегій (із інваріантним набором обмежень часу) та як LS_D позначаємо субклас допустимих локальних стаціонарних детерміністичних стратегій [6].

Пара (η, π) (або ж переважно трійка (ξ, τ, π)) називається контрольованим стохастичним стрибкоподібним процесом [1] із локальною взаємодіючими синхронними компонентами із урахуванням кінцевого графа взаємодій $\Gamma = (V, B)$, якщо виконується наступне:

- $\xi = (\xi^n: n \in N)$ є стохастичним процесом із простором станів $X = \prod_{i \in V} X_i$, $\tau = (\tau^n: n \in N)$ є стохастичним процесом із простором станів R_+ ; [1]

- $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ є стохастичним процесом із простором станів $X = \prod_{i \in V} X_i$ та ці процеси зв'язані. [1]

Визначені на R_+ випадкові значення τ^n є перервними у часі та послідовність $\{\xi^n, n = 0, 1, \dots\}$ це послідовність станів процесу, в які входив цей процес одразу після стрибків. [1]

- $\sigma = \{\sigma^n: n = 0, 1, \dots\}$ разом з $\sigma^0 = 0$ та $\sigma^n = \sum_{i=0}^{n-1} \tau^i, n > 0$ є зростаюча послідовність кількості стрибків. Тоді, якщо $t \in [\sigma^n, \sigma^{n+1})$ ми маємо $\eta^t = \xi^n, n \in N$.

Вважаємо, що умовний розподіл функції τ^n заданий як $\{\xi^{n+1} = x^{n+1}, \xi^n = x^n, \lambda^n = a^n\} \in T(\cdot | x^n, a^n, x^{n+1})$ та визначена як борелівська функція на $k \in X$. $\pi = \{\pi_i, i \in V\}$ є допустимою місцевою стратегією та перехід ξ визначений як послідовний. $\Pr(\xi^0, a^0, \dots, \xi^{n-1}, a^{n-1}, \xi^n, a^n)$ точно визначає умовні імовірності для напівмарковського процесу.

$$\begin{aligned} & \Pr\{\xi_K^{n+1} \in C_K | \xi^0 = x^0, \lambda^0 = a^0, \dots, \xi^{n-1} = x^{n-1}, \lambda^{n-1} = a^{n-1}, \xi^n = y, \lambda^n = a\} = \\ & \Pr\{\xi_K^{n+1} \in C_K | \xi^n = y, \lambda^n = a\} = \prod_{j \in K} \Pr\{\xi_K^{n+1} \in C_K | \xi^n = y, \lambda^n = a\} = \\ & \prod_{j \in K} \Pr\{\xi_K^{n+1} \in C_K | \xi_{\tilde{N}(K)}^n = y_{\tilde{N}(K)}, \lambda_j^n = a_j\} = \prod_{j \in K} Q_j(C_j | y_{\tilde{N}(K)}, a_j) = \\ & Q_K(C_K | y, a), K \subseteq V, y \in X, a_j \in A_j(y_{\tilde{N}(j)}) \quad [1] \end{aligned}$$

$Q_K(\cdot | \cdot): \otimes_{i \in K} X_i \times X \times A \rightarrow [0, 1], (C_K, y, a) \rightarrow Q_K(C_K | y, a)$ є перехідним ядром [2] та так само визначено $Q_j(C_j | y_{\tilde{N}(j)}, a_j)$. Якщо $K = V$, то записуємо $Q_V(C_V | y, a) = Q(C | y, a)$. Аналогічно до означення про локальні та синхронні ядра переходу, Марковське ядро $Q = \prod_{i \in V} Q_j$ має бути локальним та синхронним [1]. Тоді, комбінуючи розподіли стрибків та їх імовірності з їх специфічною структурою, ця конструкція формує напівмарковське ядро для керованого процесу

$$\tilde{Q}(C, s | x, a) = \Pr\{\xi^{n+1} \in C, \tau^n \leq s | \xi^n = x^n, \lambda^n = a^n\}.$$

$$\tilde{Q}(C, \infty | x, a) = \Pr\{\xi^{n+1} \in C | \xi^n = x^n, \lambda^n = a^n\} = Q(C | x^n, a^n).$$

η , або ж (ξ, τ) , тоді буде названо керованим, залежним у часі напівмарковським випадковим полем або ж керованим, залежним у часі марковським полем відновлення [2].

Критерій оптимальності [1]

Стратегія $\pi^* \in LS$ називається оптимальною з рахуванням критерія максимального результату в класі LS допустимих випадкових локальних стратегій якщо

$$\varphi(x, \pi^*) = \sup_{\pi \in LS} \varphi(x, \pi), \forall x \in X$$

Таке π^* називається локально оптимальним.

Існування оптимальних марковських стратегій в класі локальних стратегій

$$k = \times_{i \in V} k_i = \times_{i \in V} \{(x_{\tilde{N}(i)}, a_i) : x_{\tilde{N}(i)} \in X_{\tilde{N}(i)}, a_i \in A_i(x_{\tilde{N}(i)})\}$$

$$\bar{k} = \{(x, a) \in X \times A : a \in A(x)\}$$

Припущення 1 [1]: $\tau(x, a) \geq t > 0, (x, a) \in \bar{k}$

Припущення 2 [1]: $(x, a) \leq M < \infty, (x, a) \in \bar{k}$

Припущення 3 [1]: існує така невід'ємна міра μ на $(X, \mathfrak{X})$, що

$$a) \mu(C) \leq Q(C | x, a), (x, a) \in \bar{k}, C \in \mathfrak{X};$$

$$b) \mu(X) > 0.$$

Теорема 1 [1]: Припущення 1 дійсне якщо існує константа q та обмежена функція $v(x)$ на X такі, що

$$v(x) = \sup_{a \in A(x)} \left\{ r(x, a) + \int v(y) Q(dy|x, a) - q\tau(x, a) \right\}, x \in X$$

Тоді

$$\sup_{\pi \in LS} \varphi(x, \pi) \leq q, x \in X$$

Таким чином, якщо

$$v(x) = \max_{a \in A(x)} \left\{ r(x, a) + \int v(y) Q(dy|x, a) - q\tau(x, a) \right\}, x \in X$$

Та для деякої стратегії $\pi^* \in LS_D$

$$v(x) = r(x, \pi^*(x)) + \int v(y) Q(dy|x, \pi^*(x)) - q\tau(x, \pi^*(x)), x \in X$$

Дійсне, то π^* є локально оптимальним та $\varphi(x, \pi^*) \equiv q$

Теорема 2 [1]: Нехай припущення 1-3 дійсні, припустимо наступне:

- 1) Оператор U відображає деякий метричний підпростір $S(X) \subseteq M(X)$ (із метрикою ρ , індукованою нормою $M(X)$) сам у себе.
- 2) Для кожної функції $u \in S(X)$ існує відображення $A_u: X \rightarrow 2^A - \{\emptyset\}$, що визначає для кожного $x \in X$ множину

$$A_u(x) := \{a: a \in A(x), Uu(x) = r(x, a) + \int u(y) Q'(dy|x, a)\},$$

що є борелівською.

Тоді існує така стратегія в LS_D , що є локально оптимальною в LS .

Теорема 3 [1]: Розглянемо напівмарковське випадкове поле. Існують простір локальних станів X_i , простір локальних рішень A_i , глобальний простір станів X та глобальний простір рішень A , які є локальними метричними просторами зі скінченними базисами. Нехай відображення A , що асоціюється із будь-яким станом x та інваріантною множиною обмежень $A(x)$,

$$A: X \rightarrow 2^A - \{\emptyset\}, x \rightarrow A(x) = \prod_{i \in V} A_i(x)$$

є неперервним та нехай припущення 1-3 дійсні. Припустимо наступне:

- 1) Середнє значення функції $r(x, a)$ та $\tau(x, a)$ є неперервним на $(x, a) \in \bar{k}$;
- 2) Імовірність переходу $Q(\cdot | x, a)$ є слабо неперервною на $(x, a) \in \bar{k}$

Тоді існує така оптимальна стратегія π^* в LS_D та функція $\pi^*: X \rightarrow A$ може бути обрана з класу Баєра [1].

Розділ 5. Марковські стрибкоподібні процеси із локальною взаємодією

Марковський стрибкоподібний процес [11]

Однорідний Марковський стрибкоподібний процес у деякому моменті часу є напівмарковським процесом $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ із простором станів $(X, \mathcal{X})$ та границями, що задані умовою $(\xi, \tau) = \{(\xi^n, \tau^n), n = 0, 1, \dots\}$. Вважатимемо, що процес $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ має стаціонарні перехідні імовірності P :

$$P(t; x, C) := \Pr\{\eta^{t+s} \in C | \eta^s = x\} \quad \forall s \in R_+ = [0; \infty), x \in X, C \in \mathcal{X}.$$

Послідовність $X \setminus \{\xi^n, n = 0, 1, \dots\}$ є послідовністю станів у які входив процес одразу після стрибка. Випадкові значення $\{\tau^n, n = 1, 2, \dots\}$ є міжстрибковими переходами. Якщо задано $\{\xi^n = x_n, n = 0, 1, \dots\}$, тоді $\{\tau^n, n = 1, 2, \dots\}$ є послідовністю незалежних експоненційно розподілених змінних з параметром $\beta(x_n)$ [1].

- Послідовність стрибків процесу η задається як $\sigma = \{\sigma^n: n = 0, 1, \dots\}, \sigma^0 = 0, \sigma^n = \sum_{i=1}^n \tau^i, n \in N$. Тоді для $t \in [\sigma^n, \sigma^{n+1})$ маємо $\eta^t = \xi^n, n \in N$.
- Імовірністю переходу в один крок вбудованого ланцюга стрибків є ядром Маркова $(Q(C|x): C \in \mathcal{X}, x \in X)$ для послідовності $\{\xi^n = \eta, n^{\sigma^n} = 0, 1, \dots\}$.
- Функція інтенсивності $\beta: X \rightarrow R_+$ обмежена функцією міри по x $\beta(x) < \Lambda < \infty$ для всіх $x \in X$.

Перехідні імовірності P для однорідного стрибкоподібного марковського процесу $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ дійсні для $x \notin C$.

Неперервний за часом однорідний стрибкоподібний марковський процес $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ може бути визначений як Марковський процес, для якого слабкий нескінченно малий оператор задано формулою

$$[\mathbb{Q} f(\cdot)](x) = \beta(x)[-f(x) + \int_X Q(dy|x)f(y)] \quad [1]$$

Синхронні та локальні ядра переходів [1]

Неперервний за часом стрибкоподібний марковський процес $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ із асоційованим з ним процесом $(\xi, \tau) = \{(\xi^n, \tau^n), n = 0, 1, \dots\}$ та з простором станів $(X, \mathcal{X}) = (x_{i \in V} X_i, \sigma\{x_{i \in V} X_i\})$ є локальним та синхронним за означенням локальності та синхронності для напівмарковського процесу. Тоді η називається неперервним за часом стрибкоподібним марковським процесом із локально взаємодіючими синхронними компонентами на (I, X) або ж стрибкоподібним марковським випадковим полем.

Залежна від стану односерверна черга [12]

Ми вважаємо одиничний сервер є типу $M/M/1/\infty$, де різні клієнти приходять один за одним. Клієнти, що бачать вільний сервер, одразу попадають на нього, коли як клієнти, що бачать зайнятий сервер, входять до кімнати очікування, що має необмежену кількість місць для очікування. Якщо тільки кімната очікування не задана згідно з режимом «Той хто перший зайшов, того першим обслуговують»: Якщо обслуговування закінчується, задоволений клієнт одразу ж виходить із системи, та найперший у черзі клієнт (якщо такий існує) заходить до точки обслуговування, коли як інші клієнти в черзі зсуваються на 1 вперед. Завжди припускається, що зсув не займає часу [12].

Якщо є n клієнтів у системі, тоді час до надходження наступного проходить із інтенсивністю $\lambda(n)$, та, якщо $n > 0$, клієнт в сервісі обслуговується з інтенсивністю $\mu(n)$. Враховуючи кількість клієнтів у системі, яку називаємо довжиною черги, фактичний залишковий час обслуговування та залишковий час взаємодії не залежать від минулого та не залежать від іншого [12].

Як $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ позначаємо процес випадкової довжини черги в системі.

Теорема [12]: Процес випадкової довжини черги η із залежного від стану одинокої серверної серги є процесом народження-смерті. η є ергодичним тоді і тільки тоді

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)} < \infty.$$

Якщо η є ергодичним, тоді це унікальний стійкий стан та розподіл обмеження задається як $\pi = (\pi(n): n \in N)$ із

$$\pi(n) = G^{-1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)}, n \in N,$$

Де $G < \infty$ є нормуючою константою.

Мережа Гордона-Ньювелла [12]

Мережа Гордона-Ньювелла це мережа станцій обслуговування (вузлами), пронумерованими $\{1, 2, \dots, J\} := V$. Станція j є станозалежною одинокою серверною системою із необмеженою кімнатою очікування, що підпорядковується режиму «Той, хто перший зайшов, того першим

обслуговують». Існує $I > 0$ клієнтів, що циклюють згідно з незвідною марковською матрицею $R = (r(i, j): i, j = 1, 2, \dots, J)$.

Клієнт, що йде з вузла i , обирається з імовірністю $r(i, j) \geq 0$ щоб перейти у вузол j наступним кроком, та потім увійти у вузол j одразу ж, починаючи обслуговування, якщо сервер є вільним. В іншому випадку, клієнт приєднується до хвоста черги до вузла j .

Дано вузол виходу i , клієнт обрав рішення про перехід незалежно від історії мережі. Клієнт, що приходить у вузол j , робить запит про кількість роботи (час обслуговування), що експоненційно розподілена із середнім 1. Весь запитуваний час обслуговування становить незалежну родину випадкових величин.

Нехай η_j^t визначає кількість клієнтів, що знаходяться у вузлі j в момент часу $t \geq 0$, та чекають на обслуговування. Тоді $\eta^t := (\eta_j^t: j = 1, 2, \dots, J)$ є вектором довжини спільної черги мережі в момент часу t . $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ позначається як вектором довжини спільного процесу мережі Гордона-Ньювелла.

Узагальнена мережа Гордона-Ньювелла [12]

Узагальнена мережа Гордона-Ньювелла є мережею вузлів $\{1, 2, \dots, J\} := V$ із станозалежним сервером. Існує $I > 0$ клієнтів, що циклюють згідно з незвідною марковською матрицею $R = (r(i, j): i, j = 1, 2, \dots, J)$.

Нехай η_j^t визначає кількість клієнтів, що знаходяться у вузлі j в момент часу $t \geq 0$, та чекають на обслуговування. Тоді $\eta^t := (\eta_j^t: j = 1, 2, \dots, J)$ є вектором довжини спільної черги мережі в момент часу t . $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ позначається як вектором довжини спільного процесу узагальненої мережі Гордона-Ньювелла.

Часова еволюція мережі [12]: Якщо $\eta^t := (\eta_j^t: j = 1, 2, \dots, J) = (n_1, \dots, n_J)$, тоді система залишається в цьому стані на час, що експоненційно розподілений параметром $\lambda(n_1, \dots, n_J)$. Якщо даний час закінчується, тоді в кожному вузлі з'являється рішення (для кожного вузла, незалежно від історії мережі) коли теперішній сервіс закінчується (із імовірністю $\gamma(i) > 0$) або продовжується (із імовірністю $1 - \gamma(i) > 0$). Якщо обслуговування на станції i закінчується, тоді задоволений клієнт у кінцевому вузлі i обирає з імовірністю $r(i, j) \geq j$ відвідати вузол j наступним, а потім одразу входить до цього вузла та входить в процес обслуговування якщо сервер є вільним, інакше він стає в хвіст черги вузла j .

Процес міграції мережі [12]

Задано марковський процес $\eta = (\eta^t: (\Omega, F, Pr) \rightarrow (X, \mathbb{X})), X = N^J, \mathbb{X} = 2^X$. Для $x, y \in X, q(x, y) > 0$ нехай $(y_j - x_j)_+ = b_j, (y_j - x_j)_- = d_j$ позначають приріст і зменшення мережі на цьому переході в координаті j . $b = (b_1, \dots, b_J)$ є вектором приросту мережі, $d = (d_1, \dots, d_J)$ є вектором зменшення мережі. Нехай $F \subseteq N^J \times N^J$ визначає множину можливих пар спільних векторів приросту та зменшення.

Тоді частота переходу процесу η задається як

$$q(x, y) = \Lambda(x, b, d) \text{ для } y = x - d + b, x, y \in X, q(x, y) > 0$$

Та має $F = \{(b, d): \Lambda(x, b, d) > 0 \text{ для деякого } x \in X\}$ для множини можливих моментів мережі з η .

Процес міграції та процес народження-смерті [12]

Нехай η має частоту переходу задану як в попередньому означенні. Тоді η називається узагальненим процесом міграції.

Нехай η має іншу частоту переходу

$$q(x, y) = \begin{cases} \Lambda(x, b, \mathbf{0}) = \beta(x, b), \text{ якщо } x, y = x + b \in X \text{ для деякого } b \in B \\ \Lambda(x, \mathbf{0}, d) = \delta(x, d), \text{ якщо } x, y = x - b \in X \text{ для деякого } d \in D \\ 0, \text{ якщо інший випадок} \end{cases}$$

Де $\mathbf{0}$ це $|V|$ -вимірний вектор, де всі вхідні значення дорівнюють 0, та $B, D \subseteq N^J$ є множинами векторів народження, векторів смерті та $F = (B \times \{\mathbf{0}\}) \cup (\{\mathbf{0}\} \times D)$. $\beta(\cdot)$ є частотою народжуваності, $\delta(\cdot)$ частотою смертності. У таких процесах народження не відбуваються одночасно зі смертю і навпаки, але народження в декількох координатах можуть відбуватися одночасно (так само як і смерть) [12].

Розділ 6. Марковські стрибкоподібні процеси із локальним та синхронним перехідним механізмом та з керованістю в момент стрибка

Простори рішень та локальні обмеження [1]

Послідовність моментів прийняття рішень $\sigma = (\sigma^n, n = 0, 1, \dots)$ - кількість стрибків процесу $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$.

- 1) Множина рішень (керовані значення), що використовуються в моментах керування, є мірним простором $(A, U) = (x_{i \in V} A_i, \bigotimes_{i \in V} U_i)$ на Γ , де A_i є множиною можливих дій (рішень) у вершині i . Припускається, що A_i є компактним метричним простором із зліченим базисом [1].
- 2) Якщо для особи, що приймає рішення, у вузлі i , в момент часу σ^n та в стані $\xi^n = x$ множина дій керування обмежена до $A_i^n(x) \subset A_i$, $A_i^n(x)$ є множиною допустимих дій (рішень) в момент часу σ^n в стані x . Завжди припускається, що множини обмежень інваріантні в часі та тому залежать тільки від дійсного стану системи. $A_i(x) := A_i^n(x) \subset A_i$ [1].

Локальні стратегії [1]

Нехай α_i^t позначає дії, обрану тим, хто приймає рішення, у вузлі i в моменті t , $\alpha^t := (\alpha_i^t: i \in V)$ є вектором спільних рішень в момент часу t , $t \in R_+$. Припустимо, що стратегії є заздалегідь визначеними із імовірнісними мірами $\pi_i^n(\cdot | \cdot, \dots, \cdot)$, та ті, хто приймають рішення, діють незалежно один від одного.

Клас всіх цих допустимих локальних (випадкових) стратегій позначається як LS .

Пара (η, π) , або ж переважно трійка (ξ, τ, π) , називається керованим марковським стрибкоподібним процесом із локальною взаємодіючими синхронними компонентами [1] з урахуванням кінцевого графа взаємодій $\Gamma = (V, B)$, якщо дійсне наступне:

- $\xi = (\xi^n: n \in N)$ є стохастичним процесом із простором станів $X = \prod_{i \in V} X_i$; $\tau = (\tau^n: n \in N)$ теж є стохастичним процесом із простором станів R_+ ;
- $\eta = (\eta^t: t \geq 0)$ є стохастичним процесом із простором станів $X = \prod_{i \in V} X_i$ та ці процеси зв'язані;

Визначені на R_+ випадкові елементи τ^n є міжстрибковими моментами [1], що експоненційно розподілені параметром $\lambda(x, a)$, що мірно залежить від (x, a) , тобто в системі станів $\eta^t = x \in X$ в моменті стрибка t якщо рішення $\alpha^t = a$ є дійсним, та послідовність $\{\xi^n: n = 0, 1, \dots\}$ є послідовністю станів процесу, в які він входив одразу після моментів стрибку.

- $\sigma = (\sigma^n, n = 0, 1, \dots), \sigma^0 = 0, \sigma^n = \sum_{i=1}^n \tau^i, n \in N$ є зростаючою послідовністю моментів стрибків. Тоді якщо $t \in [\sigma^n, \sigma^{n+1})$ ми маємо $\eta^t = \xi^n, n \in N$.
- $\lambda(x, a)$ є невід'ємним на зв'язним: $0 < \lambda < \lambda(x, a) < \Lambda < \infty$ для всіх $x \in X, a \in A$.

Ми припускаємо, що $\pi = (\pi_i: i \in V)$ є допустимою локальною чистою марковською стратегією, та умовний розподіл функції η^t належить $P(x, s, ; a)$, що є борелівською на $X \times R_+$ та імовірності переходів ξ задовольняють

$$\begin{aligned} \Pr\{\xi_K^{n+1} \in C_K | \xi^n = x, \alpha^n = a\} &= \prod_{j \in K} \Pr\{\xi_j^{n+1} \in C_j | \xi^n = x, \alpha^n = a\} = \\ \prod_{j \in K} \Pr\{\xi_j^{n+1} \in C_j | \xi^n_{\tilde{N}(j)} = x_{\tilde{N}(j)}, \alpha^n_j = a_j\} &= \prod_{j \in K} Q_j(C_j | x_{\tilde{N}(j)}, a_j) = \\ Q_K(C_K | x, a), K \subseteq V, y \in X, a_j \in A_j(x_{\tilde{N}(j)}) & [1] \end{aligned}$$

Імовірності переходу $Q_K(C_V|x, a)$ є локальними імовірностями стрибків (що не є в загальному виді марковськими). Якщо $K = V$, то $Q_v(C_v|x, a) = Q(C|x, a)$ [1].

Практична частина

Розділ 7. Огляд моделей марковських стрибкоподібних процесів

Модель 1. Модель пересування транспорту

В деякому аеропорті, таксі до центра міста, їздить із єдиною кінцевою зупинкою. Всі таксі однієї марки та моделі, в кожному з них можуть бути 4 пасажери (не враховуючи водія). Кінцева зупинка влаштована таким чином, що порожні таксі шикуються в одну лінію, і пасажери мають йти до першого в ряду порожнього таксі. Як тільки воно заповнюється, таксі рушає. Закон забороняє таксі відправлятись не повним. Машин така кількість, зо завжди є хоча б одне таксі, що очікує в лінії.

Пасажири приходять згідно із процесом Пуассона із частотою β за хвилину.

- 1) Пояснити як кількість пасажирів у черзі до першого таксі може бути змодельована як Марковський стрибкоподібний процес
- 2) Записати для процесу:
 - (1) Генеруючу матрицю переходів
 - (2) Рівність Колмогорова в компонентній формі

Розв'язок:

- 1) Основні елементи стрибкоподібного марковського процесу:
 - Неперервний час
 - Кінцевий простір станів

Простір станів задається у вигляді кількості вільних пасажирів, тобто $X = (0,1,2,3)$. Якщо вільних пасажирів стає 4, то таксі рушає.

Майбутнє процесу залежить лише від кількості пасажирів в таксі. Кількість очікуючих пасажирів теж залежить від кількості пасажирів в таксі. Тобто, все залежить тільки від теперішнього стану процесу.

2) Матриця переходів A:

	0	1	2	3
0	$-\beta$	β	0	0
1	0	$-\beta$	β	0
2	0	0	$-\beta$	β
3	β	0	0	$-\beta$

Рівності Колмогорова

Імовірнісна матриця

P_{00}	P_{01}	P_{02}	P_{03}
P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}
P_{20}	P_{21}	P_{22}	P_{23}
P_{30}	P_{31}	P_{32}	P_{33}

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t) \cdot A$$

$$\frac{d}{dt}P_{00}(t) = -\beta \cdot P_{00} + \beta \cdot P_{03}$$

$$\frac{d}{dt}P_{10}(t) = -\beta \cdot P_{10} + \beta \cdot P_{13}$$

...

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = -\beta \cdot P_{ij}(t) + \beta \cdot P_{i(j-1)}(t)$$

Модель 2. Модель прогресії раку [13]

Модель має 3 стани та час очікування в кожному стані, що заданий експоненційним розподілом. Данна модель може бути задана як однорідний у часі марковський стрибкоподібний процес.

Простір станів $X = \{0,1,2\}$, за яким можна описати матрицю переходів A :

$$\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & & -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 \\ 2 & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Заради простоти розв'язку припускається, що $\lambda_1 + \lambda_2 \neq \lambda_3$. Перехідні імовірності знаходяться за рівністю Колмогорова для однорідного випадку $\frac{d}{dt}P(t) = P(t) \cdot A$ із граничною умовою $P(0) = I$. Візьмемо перші три рівняння, що відповідають стану 0:

$$\frac{d}{dt}P_{00}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{00}(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_{01}(t) = \lambda_1 P_{00}(t) - \lambda_3 P_{01}(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_{02}(t) = \lambda_2 P_{00}(t) + \lambda_3 P_{01}(t)$$

Має бути дійсна умова $P_{00}(t) + P_{01}(t) + P_{02}(t) = 1$ із додатковою граничною умовою $P_{00}(0) = 1, P_{01}(0) = 0, P_{02}(0) = 0$. Якщо обрахувати диференційне рівняння, то отримаємо $P_{00}(t) = Ae^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$ для деякої константи A . Оскільки $P_{00}(t) = 1$, то $A = 1$ та $P_{00}(t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$. Підставимо цей результат в друге диференційне рівняння $\frac{d}{dt}P_{01}(t) = \lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} - \lambda_3 P_{01}(t)$. Однорідна частина цього диференційного рівняння має вигляд $P_{01}^{hom}(t) = Be^{-\lambda_3 t}$ для деякої константи B . Неоднорідна частина (частковий розв'язок) : $P_{01}^{part}(t) =$

$Ce^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$. Якщо провести заміну, то отримаємо $C = \frac{\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1-\lambda_2}$. Загальний розв'язок другого диференційного рівняння:

$$P_{01}(t) = P^{hom}_{01}(t) + P^{part}_{01}(t) = Be^{-\lambda_3 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

За граничною умовою $P_{01}(0) = 0$ знаходимо $B = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1-\lambda_2}$.

В результаті, маємо:

$$P_{00}(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$P_{01}(t) = \frac{\lambda_1}{-\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2} (e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t})$$

$$P_{02}(t) = 1 - \frac{\lambda_1}{-\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_3 t} + \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{-\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Рівняння, що відповідають стану 0:

$$\frac{d}{dt}P_{10}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{10}(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_{11}(t) = \lambda_1 P_{10}(t) - \lambda_3 P_{11}(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_{12}(t) = \lambda_2 P_{10}(t) + \lambda_3 P_{11}(t)$$

Має бути дійсна умова $P_{10}(t) + P_{11}(t) + P_{12}(t) = 1$ із додатковою граничною умовою $P_{10}(0) = 0, P_{11}(0) = 1, P_{02}(0) = 0$.

Розв'язавши диференціальні рівняння отримаємо:

$$P_{10}(t) = 0$$

$$P_{11}(t) = e^{-\lambda_3 t}$$

$$P_{11}(t) = 1 - e^{-\lambda_3 t}$$

Оскільки стан 2 є кінцевим, то маємо $P_{20}(t) = 0, P_{21}(t) = 1, P_{22}(t) = 0$.

Знайдемо загальний часовий розподіл для цієї моделі.

Нехай T є загальним часом очікування із стану 0 в стан 2. Потрібно знайти розподіл T . T_0 є часом очікування в стані 0, T_1 є часом очікування в стані 1. Нехай $J(n), n = 1, 2, \dots$ є n -ю кількістю стрибків. Розподіл T :

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= P(T \leq t | X_{J(1)} = 1)P(X_{J(1)} = 1) + P(T \leq t | X_{J(1)} = 2)P(X_{J(1)} = 2) \\ &= P(T_0 + T_1 \leq t)P(X_{J(1)} = 1) + P(T_0 \leq t)P(X_{J(1)} = 2) \\ &= \left(1 + \frac{\lambda_1}{-\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{-\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_3 t}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \\ &\quad + \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \\ &= 1 + \frac{\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2 + \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 + \lambda_2)(-\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2)} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} - \frac{\lambda_1}{-\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_3 t} \end{aligned}$$

Функція щільності T :

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{d}{dt} P(T \leq t) \\ &= - \frac{(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(-\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2)} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \\ &\quad + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{-\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_3 t} \end{aligned}$$

Програма для аналізу поведінки марковського стрибкоподібного процесу

Задання матриці імовірностей:

```
P = np.array([[0.5, 0.5, 0.0],[0.1, 0.3, 0.6],[0.4, 0.2, 0.4]])
stTransitHist - штучна матриця для відслідковування історії станів
stTransitHist = np.array([[0.0, 0.0, 0.0],[0.0, 0.0, 0.0],[0.0, 0.0, 0.0]])
state = np.array([[0.0, 1.0, 0.0]])
curSt - початковий стан в ітерації
curSt = 0
stHist = state
dfStHist = pd.DataFrame(state)
distribHist = [[0,0,0]]
```

Функція побудови мультиномінального розподілу:

```
def multinom_distr(mult):
    r = np.random.uniform(0.0,1.0)
    cs = np.cumsum(mult)
    cs = np.insert(cs,0,0)
    m = (np.where(cs<r))[0]
    nextSt = m[len(m)-1]
    return nextSt
```

Аналіз заданого процесу:

```
for t in range(3000):
    curRow=np.ma.masked_values((P[curSt]), 0.0)
    nextSt = multinom_distr(curRow)
    #відслідковування станів
    stTransitHist[curSt, nextSt]+=1
    #відслідковування векторів станів
    state = np.array([[0,0,0]])
    state[0,nextSt] = 1.0
    #відслідковування історій станів
    stHist = np.append(stHist,state,axis=0)
    curSt=nextSt

    #обрахування розподілу
    totals = np.sum(stHist,axis=0)
    gt = np.sum(totals)
```

```
distrib = totals/gt  
distrib = np.reshape(distrib, (1,3))  
distribHist = np.append(distribHist,distrib,axis=0)
```

Вивід розподілу:

```
print(distrib)
```

```
dfDistribHist = pd.DataFrame(distribHist)  
dfDistribHist.plot(title="Simulation History")  
plt.show()
```

Висновки

Основним завданням моєї роботи було дослідження марковських стрибкоподібних процесів із локальною взаємодією та моделей, які будуються з їх допомогою. Використовуючи марковські ланцюги з необмеженим часом можна зручно описувати моделі масового обслуговування, моделі приросту населення або моделі інженерних систем та аналізувати поведінку цих моделей на нескінченному відрізку часу.

Список використаної літератури

1. Ruslan K. Chornei, Hans Daduna, Pavel. S. Knopov, Control of Spatially structured random processes and random fields with applications, Springer, 47 – 65, 152 – 166, 174-189 с.
2. Каштанов В. А., «Исследование функционала для заданной системы массового обслуживания», Моск. гос. ин-т электроники и математики, 4-7 с.
3. Корольок В. С., Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний. Укр. мат. ж., 1965, 123-128 с.
4. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайный процессов: учебное пособие. 2-е издание, исправленное. Издательство НТЛ, 2010. 41, 50 - 53, 109 – 111, 139 – 141, 155 - 157 с.
5. K. Wakuta. Arbitrary state semi-Markov decision processes with unbounded rewards. Optimization, 1987, 447-454 с.
6. O. Vega-Amaya. Average optimality is semi-Markov control models on Borel spaces: Unbounded cost and controls. Bol. Soc. Math. Mex., 1993, 38-60 с.
7. Губенко Л. Г., Об управляемых полумарковских процессах. Кибернетика, 1972, 26-29 с.
8. Denardo E. V., Markov renewal programs with small interest rates. Ann. Math. Stat., 1972, 477 – 496 с.
9. Корольок В. С., Полумарковские процессы и их применение, УДК 9.653, 48-56 с.
10. Кнопов П. С., Самосенок А. С. О некоторых прикладных задачах марковских случайных процессов с локальным взаимодействием. Статья, 2011. 19 - 23 с.
11. Boqian Zhang, Vintyak Rao. Efficient Parameter Sampling for Markov Jump Processes. Department of Statistics, Purdue University. 3-5 с.

12. R. F. Serfoso. Optimal control of random walks, birth and death processes, and queues. Adv. in Appl. Probab., 1981, 13-83 c.
13. Muhammad Fikri Budiana. Flowgraph Models and Analysis for Markov Jump Processes. The University of Manchester, Oxford road, Manchester, M13 9PL, c 8-10.