Презентація дипломної роботи на тему «М-Ліпшицеві відображення на графах»

Виконала: студентка 4 курсу спеціальності «Прикладна математика»

Гуназа Анна

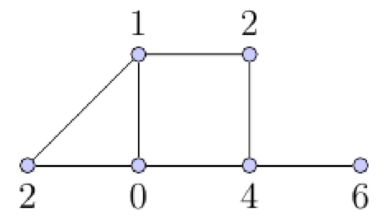
Науковий керівник: к. ф.-м.н. Козеренко Сергій Олександрович

Мета роботи

- Дослідити основні властивості М-Ліпшицевих відображень на графах.
- Реалізувати алгоритми з розширення М-Ліпшицевих відображень на деревах і на загальних графах за наданими псевдокодами.
- Створити модифікації цих алгоритмів для розширення сильних М-Ліпшицевих відображень.
- Створити і реалізувати власний алгоритм з розширення М-Ліпшицевих відображень на графах блоків.

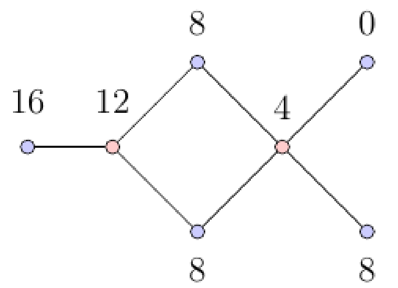
Основні означення

Означення 0.1. Для $M \in \mathbb{N}$, *M-Ліпшицеве відображення* зв'язного графа $G = (V, E)$ з коренем $v_0 \in V$ - це відображення $f : V \to \mathbb{Z}$ таке, що $f(v_0) = 0$ і для кожного ребра $uv \in E$ виконується $|f(u) - f(v)| \leq M$. Множина всіх M-Ліпшицевих відображень графа G позначається $\mathcal{L}_M(G)$.



Приклад графа з M-Ліпшицевим відображенням, $M = 4$

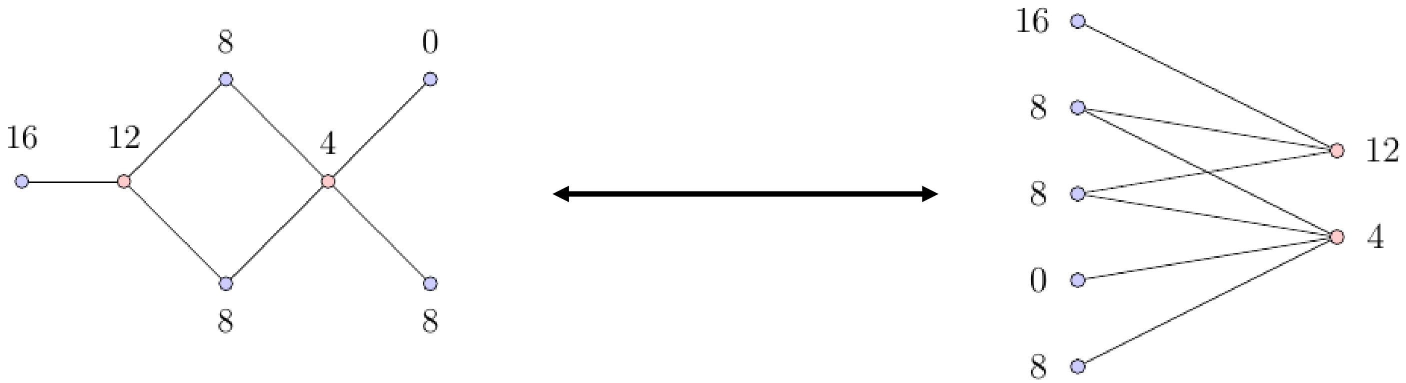
Означення 0.1. Для $M \in \mathbb{N}$, *сильне M-ліпшицеве відображення* зв'язного графа $G = (V, E)$ з коренем $v_0 \in V$ - це відображення $f : V \to \mathbb{Z}$ таке, що $f(v_0) = 0$ і для кожного ребра $uv \in E$ виконується умова $|f(u) - f(v)| = M$. Множина всіх сильних M-ліпшицевих відображень графа G позначається $L_{\pm M}(G)$.



Приклад графа з сильним M-Ліпшицевим відображенням, M=4

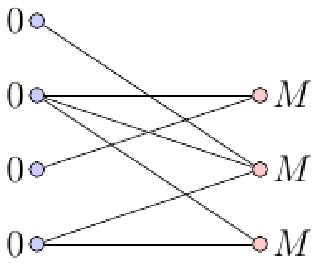
Доведення твердження

Лема 0.1. *Граф має сильне M-ліпшицеве відображення тоді і тільки тоді, коли він є двочастковим.*



Твердження 0.1. *Якщо граф є двочастковим, то він має сильне M-ліпшицеве відображення f.*

Ідея доведення: будь-який двочастковий граф завжди має “тривіальне” M-Ліпшицеве відображення, коли вершини однієї частки отримують 0, а іншої - M.



Приклад сильного M-Ліпшицевого відображення на двочастковому графі

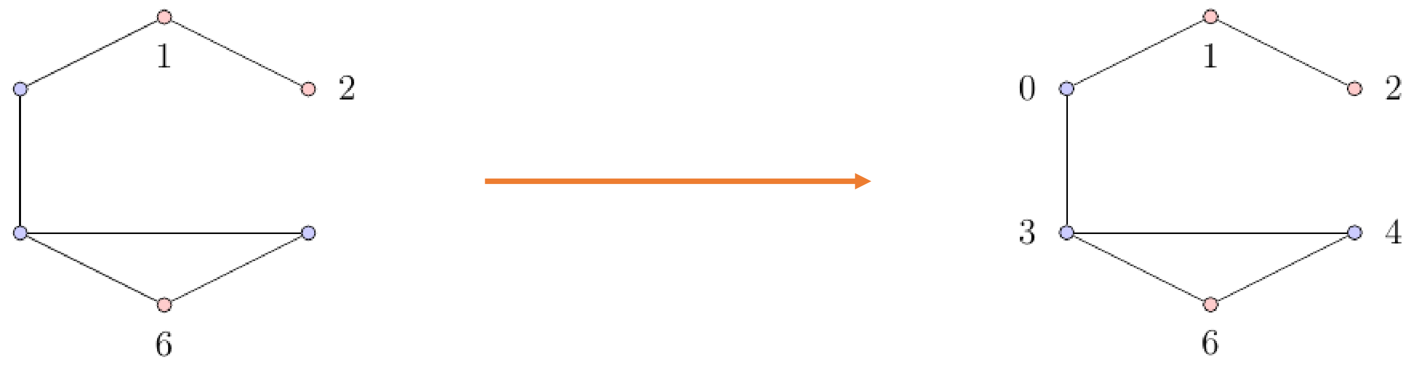
Постановка задачі

Проблема M-ParExt: Розширення часткового M-Ліпшицевого відображення

Вхідні дані: Зв'язний граф $G = (V, E)$, підмножина $V' \subseteq V$ з функцією $f' : V' \to \mathbb{Z}$.

Питання: Чи існує M-Ліпшицеве відображення f графу G таке, що $f' \subseteq f$?

Проблема для розширення сильного M-Ліпшицевого відображення називається **Strong M-ParExt**.



Часткове відображення

Розширене M-Ліпшицеве відображення, $M = 3$

Алгоритм M-ParExt на деревах

Algorithm 1 Алгоритм для M-ParExt на деревах

Require: A tree graph G, a vertex set $V' \subseteq V(G)$, and a partial M-Lipschitz mapping $f' : V' \to \mathbb{Z}$.

1: Check if $|f'(v) - f'(u)| \leq M$ for $u, v \in V' : uv \in E(G)$. If not, f' cannot be extended.
2: Set $P(v) := [f'(v), f'(v)]$ for every $v \in V'$.
3: Set $P(v) := [-\infty, \infty]$ for every $v \in V(G) \setminus V'$.
4: **for** every v' in V' **do**
5: Start the DFS on G from v'.
6: In DFS, when you process vertex v with $P(v) = [\underline{P}(v), \overline{P}(v)]$, do the following:
7: **for** every $w \in N_G(v)$ **do**
8: $P(w) := [\underline{P}(v) - M, \overline{P}(v) + M] \cap P(w)$.
9: **end for**
10: **end for**
11: Find $r \in V(G)$ such that $0 \in P(v)$ and re-run DFS from Line 5 with $v' = r$.
12: **if** no such r exists **then**
13: **return** The mapping f' cannot be extended.
14: **end if**
15: Set $f(r) := 0$.
16: **if** $P(v) = \emptyset$ for some $v \in V(G)$ **then**
17: **return** The mapping f' cannot be extended.
18: **end if**
19: Launch the BFS from r and for every visited vertex $v \neq r$, set $f(v)$ so that for parent vertex p, $f(v) \in [f(p) - M, f(p) + M] \cap P(v)$ holds.
20: **if** the previous BFS could not be completed **then**
21: **return false**
22: **end if**
23: **return true**

Зауваження

У статті: $|f'(v) - f'(u)| \leq M$ for all $u, v \in V'$.

Наше виправлення: $|f'(v) - f'(u)| \leq M$ for $u, v \in V' : uv \in E(G)$.

У статті: $f(v) \in [f(p) - M, f(p) + M]$.

Наше виправлення: $f(v) \in [f(p) - M, f(p) + M] \cap P(v)$.

Алгоритм M-ParExt на деревах

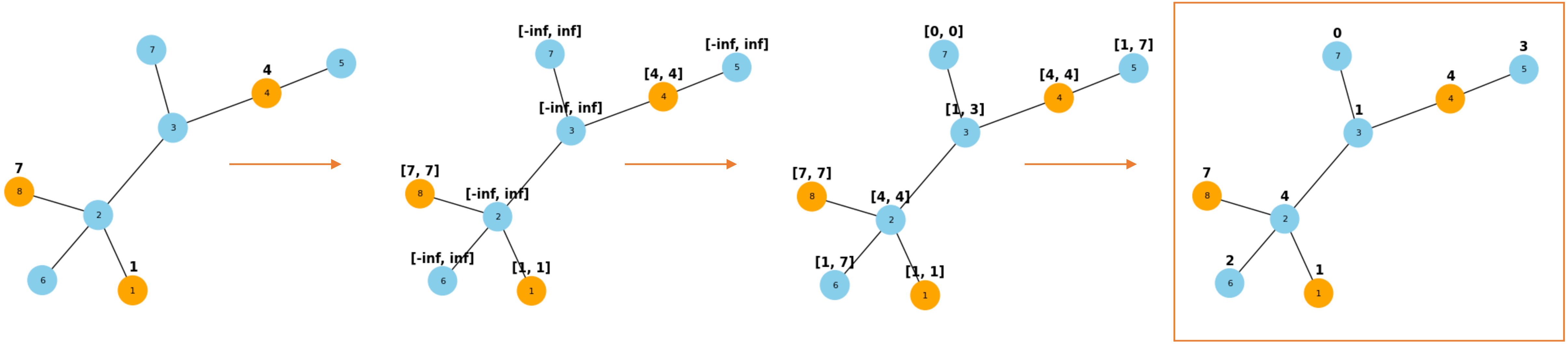
Приклад 0.1. Чи існує М-Ліпшицеве відображення f дерева G таке, що $f' \subseteq f$?

$V(G) = \{1, ..., 8\}, E(G) = \{12, 23, 26, 34, 37, 45, 82\}$

$V'(G) = \{1, 4, 8\}, f' = \{1 : 1, 4 : 4, 8 : 7\}, M = 3$

Розв'язок

```
G = nx.Graph()
edges = [(1, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 4), (3, 7), (4, 5), (8, 2)]
G.add_edges_from(edges)
V_prime = [1, 4, 8]
f_prime = {1: 1, 4: 4, 8: 7}
M = 3
m_par_ext_on_trees(G, V_prime, f_prime, M)
```



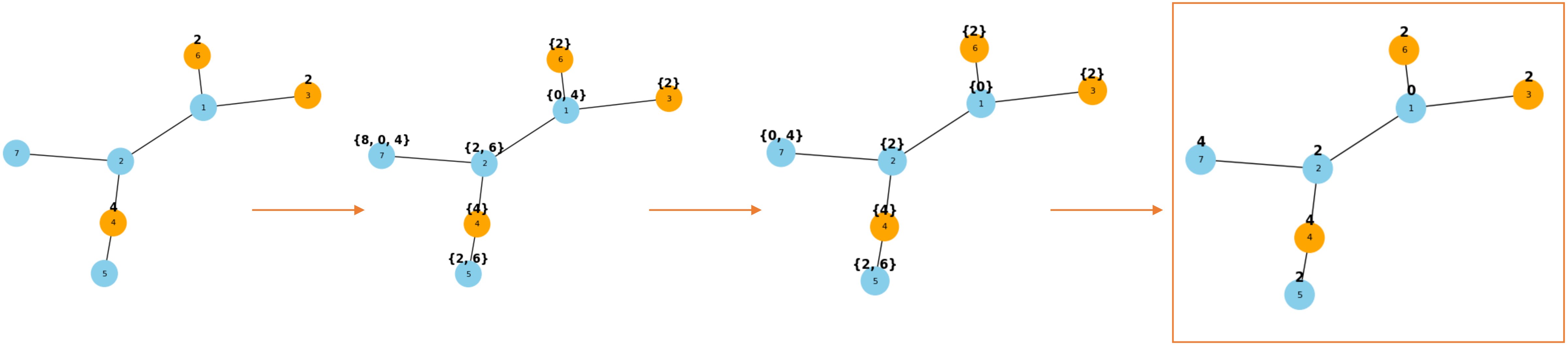
Алгоритм Strong M-ParExt на деревах

Приклад 0.1. Чи існує сильне М-Ліпшицеве відображення f дерева G таке, що $f' \subseteq f$?
$V(G) = \{1, ..., 7\}$,
$E(G) = \{12, 13, 45, 16, 24, 27\}$
$V'(G) = \{3, 4, 6\}$, $f' = \{3 : 2, 4 : 4, 6 : 2\}$, $M = 2$

Розв'язок

```
G = nx.Graph()
edges = [(1, 2), (1, 3), (4, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 7)]
G.add_edges_from(edges)
V_prime = 3, 4, 6,]
f_prime = {3: 3, 4: 6, 6: 3}
M=3
strong_m_par_ext_on_trees(G, V_prime, f_prime, M

```



Алгоритм M-ParExt на загальних графах

Algorithm 2 Алгоритм для M-ParExt на загальних графах

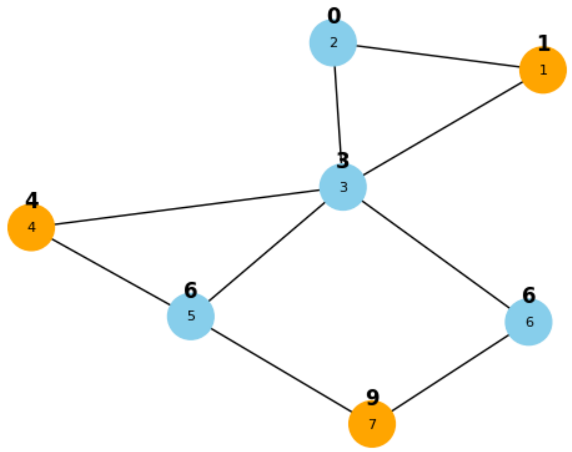
Require: A graph G, a set of vertices $V' \subseteq V(G)$, and a partial M-Lipschitz mapping $f' : V' \to \mathbb{Z}$.

1: Compute all-pairs distances.
2: **if** f' rooted **then**
3:     Set $f'' := f'$ and go to line 8.
4: **end if**
5: **if** f' not rooted **then**
6:     **for** every $v' \in V \setminus V'$ **do**
7:         Set $f'' := f' \cup \{(v', 0)\}$.
8:         **if** f'' is M-reachable **then**
9:             **while** some vertex not mapped under f'' **do**
10:                 Pick a non-mapped vertex a adjacent to some already mapped vertex. Choose some $k \in \bigcap_{c \in f''(V'')} I_c$ with c's and I_c's defined analogously as in the proof of Theorem 7.
11:                 Set $f'' := f'' \cup (a, k)$.
12:             **end while**
13:             **return True**
14:         **end if**
15:     **end for**
16: **end if**
17: **return False**

Приклад 0.1. Чи існує M-Ліпшицеве відображення f загального графа G таке, що $f' \subseteq f$?
$V(G) = \{1, ..., 7\}$,
$E(G) = \{12, 13, 23, 34, 35, 36, 45, 57, 67\}$
$V'(G) = \{1, 4, 7\}, f' = \{1 : 1, 4 : 4, 7 : 9\}, M = 3$

Розв'язок

```
G = nx.Graph()
edges = [(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5),
  (5, 7), (6, 7)]
G.add_edges_from(edges)
V_prime = [1, 4, 7]
f_prime = {1: 1, 4: 4, 7: 9}
M = 3
M_ParExt(G, V_prime, f_prime, M)
```



Алгоритм M-ParExt на графах блоків

Algorithm 3 Алгоритм M-ParExt на графах блоків

Дано: Граф блоків G, підмножина вершин $V' \subseteq V(G)$, та часткове M-Ліпшицеве відображення $f' : V' \to \mathbb{Z}$.
Знайти: M-Ліпшицеве відображення f графу G таке, що $f' \subseteq f$.

1. Створюємо **block cutpoint tree** T на основі даного графа G.
   Для цього визначаємо список блоків і точок з'єднання. Кожен блок з G переходить у вершину, а кожна точка з'єднання - у вершину, що з'єднує відповідні блоки.

2. Для кожного блоку визначаємо **інтервал** P можливих значень у вигляді: $[max - M, min + M]$, де max та min є найбільшим та найменшим значенням наявних міток в даному блоці, відповідно.
   Окремо зберігаємо список блоків зі скінченним інтервалом. Запишемо їхню кількість як k.
   Якщо існує блок з порожнім інтервалом, то f не існує.

3. Обходимо дерево k разів, щоразу починаючи з блоку з визначеним у (2) інтервалом, оновлюючи інтервали для кожної вершини.
   Використовуємо пошук в глибину з алгоритму для дерев, пропускаючи при цьому точки з'єднання.
   Якщо існує блок з порожнім інтервалом, то f не існує.

4. Визначаємо **інтервали для точок з'єднання** як перетин інтервалів блоків, з якими вони суміжні.
   Якщо існує точка з'єднання з порожнім інтервалом, то f не існує.

5. Знаходимо блок, що може мати в собі **корінь**. Це блок, чий інтервал містить 0. Розставляємо мітки всередині даного блоку.
   Ще раз оновлюємо інтервали, починаючи обхід дерева з цього блоку.
   Якщо кандидата для кореня не знайдено, то f не існує.

6. Наостанок, обходимо решту блоків дерева T, проставлячи мітки вершинам в кожному з них.
   Завершивши цю процедуру, отримаємо шукане відображення f.

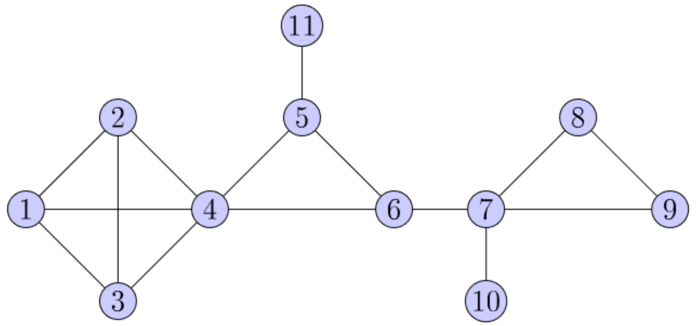


Рис. 5: Граф блоків G_1

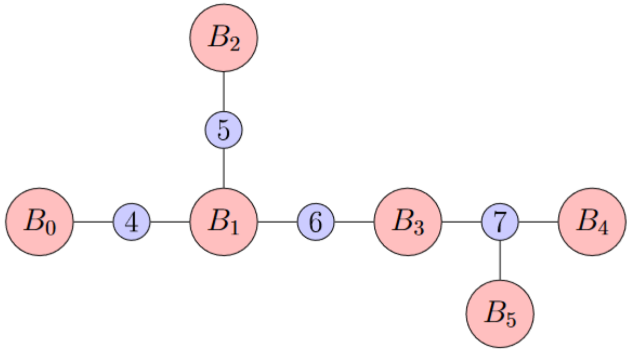


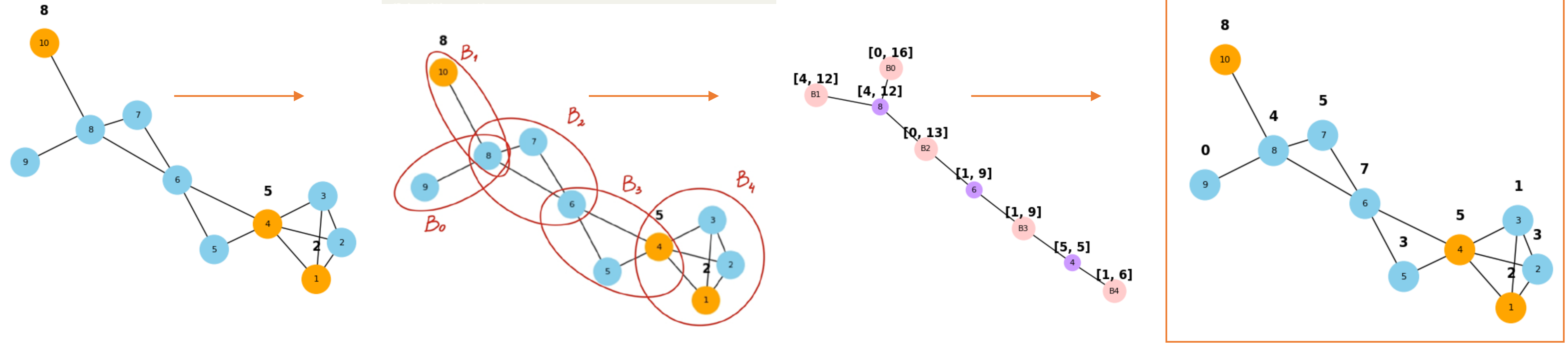
Рис. 6: Блоко-точкове дерево для графа G_1

Алгоритм M-ParExt на графах блоків

Приклад 0.1. Чи існує M-Ліпшицеве відображення f графа блоків G таке, що $f' \subseteq f$?
$V(G) = \{1, ..., 10\}$,
$E(G) = \{12, 13, 14, 23, 24, 34, 45, 46, 56, 67, 68, 78, 89, (8, 10)\}$
$V'(G) = \{1, 4, 10\}, f' = \{1 : 2, 4 : 5, 7 : 8\}, M = 4$

Розв'язок

```
G = nx.Graph()
edges = [(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (4,5), (4,6),
  (5,6), (6,7), (6,8), (7,8), (8,9), (8,10)]
G.add_edges_from(edges)
V_prime = [1, 4, 10]
f_prime = {1: 2, 4: 5, 10: 8}
M = 4
f = M_ParExt_block_graphs(G, f_prime, M)
```



Висновки

- Досліджено основні властивості M-Ліпшицевих відображень на графах.
- Реалізовано два алгоритми M-ParExt (на деревах і загальних графах) за наданими псевдокодами.
- Створено їхні модифікації для роботи з сильними відображеннями.
- Створено і реалізовано власний алгоритм M-ParExt на графах блоків.
- Знайдено дві помилки в M-ParExt на деревах.
- Доведено твердження про сильну M-Ліпшицевість двочасткових графів.

Дякую за увагу!