ПАРАБОЛА БЕЗПЕКИ

В.А. ВЕЛИЧКО

Математика – це не лише абстарктна наука, але й засіб моделювання різноманітних процесів у житті людини. Математичний апарат дозволяє інженерам розв'язувати практичні завдання, що перед ними постають. Розглянемо одне з них.

Відомо, що траєкторією руху тіла в полі сил тяжіння Землі є балістична крива. Якщо вважати це поле однорідним, тобто таким при якому тіло кинуте з початковою швидкістю набагато меншою за першу космічну, то в спрощенні балістичною кривою буде парабола.

Розглянемо рух тіла (рух снаряда), кинутого з фіксованої точки з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту, нехтуючи опором повітря. Рівняння траєкторії такого тіла описується так:

$$x = v_0 t \cos\alpha; y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$

Нехай на площині задано рівняння $F(x, y, \varphi) = 0$ параметричної сім'ї кривих, де φ –параметр сім'ї.

Означення 1. *Крива l класу C^1, що задається параметрично:* $\begin{cases} x = x(\lambda); \\ y = y(\lambda), \end{cases}$ *називається обгорткою сім'ї кривих $F(x, y, \varphi)$, де функція F має неперервні частинні похідні по всіх змінних, коли задана функція $\varphi = \varphi(\lambda)$ — «привило прикріплення» кривих сім'ї до кривої l, що задовольняє такі умови: 1) $F(x(\lambda), y(\lambda), \varphi(\lambda)) \equiv 0$; 2) при кожному фіксованому λ_0 крива $F(x, y, \varphi(\lambda_0)) = 0$ дотикається кривої l; 3) функція $\varphi = \varphi(\lambda)$ не є сталою на жодному інтервалі зміни λ.* [1]

Теорема 1. *Якщо обгортка сім'ї $F(x, y, \varphi) = 0$ існує, то її точки задовольняють сиситему рівнянь:* [1]

$$\begin{cases} F(x, y, \varphi) = 0; \\ F_\varphi(x, y, \varphi) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Розглянемо сім'ю траєкторій, що залежать від α – рівняння (1). Обгорткою цієї сім'ї є парабола, що називається параболою безпеки. Поставимо завдання вивести її рівняння, скориставшись Теоремою 1. Щоб виразити рівняння сім'ї кривих, виключимо змінну t з рівняння (1). Щодо другого

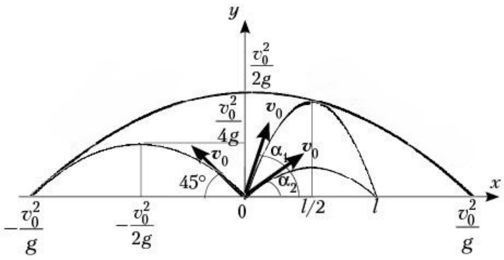

Рис. 1. Парабола безпеки.

рівняння системи (2), то потрібно продиференціювати отримане рівняння сім'ї кривих по змінній α. Отже, отримаємо систему рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} y - x\operatorname{tg}\alpha + \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)) = 0; \\ 0 - x\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}\cdot 2\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

З другого рівняння системи (3):

$$\frac{x}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{gx}{\upsilon_0^2}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right) = 0,$$

тоді $1 - \frac{gx}{\upsilon_0^2}\cdot\operatorname{tg}\alpha = 0$, відповідно $tg\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{gx}$, підставимо цю рівність у перше рівняння системи (3) і отримаємо:

$$y = \frac{x\upsilon_0^2}{xg} - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}\left(1 + \frac{\upsilon_0^4}{g^2x^2}\right) = \frac{\upsilon_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2} - \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{\upsilon_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2},$$

$$y = \frac{\upsilon_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}. \tag{4}$$

Це рівняння параболи безпеки, зведемо його до вигляду системи, виразивши x і y через параметр t. Нехай $x = \upsilon_0 t$, тоді рівняння (4) набуде вигляду:

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 t; \\ y = \frac{\upsilon_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Практичним застосуванням виведеного рівняння є те, що коли літак знаходиться вище параболи безпеки, а швидкість вильоту снаряда не перевищує υ_0, то літак невразливий.

Література

[1] Борисенко, О. А. *Диференціальна геометрія і топологія: Навч. посібник для студ.* — Харків : Основа — 1995. — 304с.

[2] Крижанівський, С. Є. *Диференціальні рівняння : посібник для студентів університетів і пединститутів.* — Х. : Держтехвидав, 1938. — 398 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: v.velychko.al31@kpi.ua